கணிதம்

பகுதி - 1

வகுப்பு

X

Mathematics
Part - 1
Std X
Tamil Medium

கேரளஅரசு
கல்வித் துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2025

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நவத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

கணிதம்

10

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

அன்பு மாணவர்களே,

அளவுகளை எண்களாக மாற்றுவதும், அளவுகள் சார்ந்த சிக்கல்களை எண்கணிதப் பிரச்சினைகளாகவும், இயற்கணிதப் பிரச்சனைகளாகவும் மாற்றித் தீர்வுகளைக் கண்டடைவதெல்லாம் முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் கண்டறிந்துள்ளீர்கள். சார்பு எண்களின் செயல் தொடர்புகளை இயற்கணித கருத்துகளாக வளர்ச்சி அடைய செய்வதும், அவைகளை அளவுகள் தொடர்பான சிக்கல்களில் பயன்படுத்தப்படுவதையும் நீங்கள் புரிந்துகொண்டுள்ளீர்கள். வடிவங்களின் சிறப்புத் தன்மைகளை வடிவியல் கருத்துக்களாக மாற்றுவதற்கான எடுத்துக்காட்டுகளும் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

இந்த வழிமுறைகளிலேயே சற்று கூட முன்னேறுவதற்காக இப்பாடநூலில் செய்யப்பட்டுள்ளது. வெவ்வேறு கிளைகளாக வளர்ந்து வரும் வடிவியலும் இயற்கணிதமும் இணைந்து ஒரு புதிய கணிதக் கிளையை உருவாக்குவதை இங்கே காணலாம். அனைத்து அறிவியல் துறைகளிலும் பயன்படுத்துவதும், இன்று பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் செயற்கை நுண்ணறிவு உருவாக்கத்தில் தவிர்க்க முடியாததாகிய வாய்ப்புகளின் கோட்பாட்டின் முதன்மை பாடங்களும் இதில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

கணிதத்தை நேசித்துத் தொடர்ந்து படிக்க விரும்பும் மாணவர்களுக்குத் தேவையான அடிப்படை அறிவு அனைத்தும் இந்தப் பாடநூலில் உள்ளது. ஆரம்பக் கல்வியின் ஒரு நிலையை முடித்த பிறகு அனைவரும் கண்டிப்பாகக் அறிந்திருக்க வேண்டிய கணித கலாச்சாரம் தான் இந்த நூலின் உள்ளார்ந்த முக்கியத்துவம். காரிய காரண உணர்வுடன் கூடிய பகுப்பாய்வுகளை மேற்கொண்டு, அதன்மூலம் மட்டும் முடிவுகளை வடிவமைக்கத் தேவைப்படும் மனோபாவத்தை இந்தக் கலாசாரம் உருவாக்குகிறது.

அன்பான வாழ்த்துகளுடன்,

முனைவர் ஜெயபிரகாஷ் ஆர்.கெ.
இயக்குநர்
எஸ்.சி.இ.ஆர்.டி கேரளம்

TEXTBOOK DEVELOPMENT TEAM

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. P. Ramesh Kumar
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University of Kerala
Karyavattom, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Preenu C.S.
Assistant Professor, University College,
Thiruvananthapuram

Dr. Sumesh
Assistant Professor, Mar Ivanious College,
Thiruvananthapuram

Participants

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary
School, Pulapatta, Palakkad

Vijayakumaran T.K.
HSST (Retd),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Pravanadukkam, Kasaragod

C.T. Firoz Babu
HST Mathematics,
GGVHSS Wandoor, Malappuram

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
GHSS, Kadannappally P.O,
Kadannappally, Kannur

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School,
Champad, Kannur

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics, GHSS Madappally,
Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K.
HST Mathematics, Pandallur HSS,
Kadambode Post, Malappuram

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

Firoza Moidu
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS,
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
HST Mathematics,
MGD High School, Puthusserry,
Puthusserry South P.O,
Pathanamthitta

Ayishakutty K.K.
HST Mathematics,
GHS, Beenachi,
Sulthanbethery, Wayanad

Rajesh M.
HST Mathematics,
Kalladi HSS Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

Ullas U.G., (Artist)
HST Physical Science, CBHSS Vallikunnu, Malappuram

Tamil Version

Language Expert

Dr. Hepsy Rose Mary A
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala,
Thiruvananthapruam.

Subject Expert

Venugopal C
Assistant Professor (Retd)
Govt. IASE, Thrissur.

Members

S.C Edwin Daniel, Rtd. HM, GHS Pambanar, Idukki
Little Linda T R., Rtd. HST Maths, GHSS Anakkara, Idukki.
Domanatha Sarath Kame, HST Maths, CPM GHSS Peermade, Idukki
Amirthaselvi S A, HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.
K. Palaniselvam, HST Maths, GHS Chinnakanal, Idukki.
Balson Nesa Raj N L, HST Maths, GHS Chemmannu, Idukki.

Academic Coordinator

Dr. Anilkumar A.K.
Research Officer, SCERT

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

உள்ளடக்கம்

1	கூட்டுத்தொடர்கள்	7
2	வட்டங்களும் கோணங்களும்	31
3	கூட்டுத்தொடரும் இயற்கணிதமும்	59
4	வாய்ப்புகளின் கணிதம்	73
5	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	85
6	முக்கோணவியல்	97
7	குறிகாட்டி எண்கள்	127

இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காகச் சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணக்குச் செய்து பார்க்கலாம்

ஆராய்ச்சி

ICT வாய்ப்பு

இந்திய அரசமைப்பு

முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

1 கூட்டுத்தொடர்கள்

எண் வரிசைகள்

பல வகையான எண் வரிசைகளைப் பார்த்திருக்கிறீர்களல்லவா;

எண்ணல் எண்கள்	1, 2, 3, ...
இரட்டை எண்கள்	2, 4, 6, ...
ஒற்றை எண்கள்	1, 3, 5, ...
எண்ணல் எண்களின் பாதி	$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, ...$
எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்கள்	1, 4, 9, ...

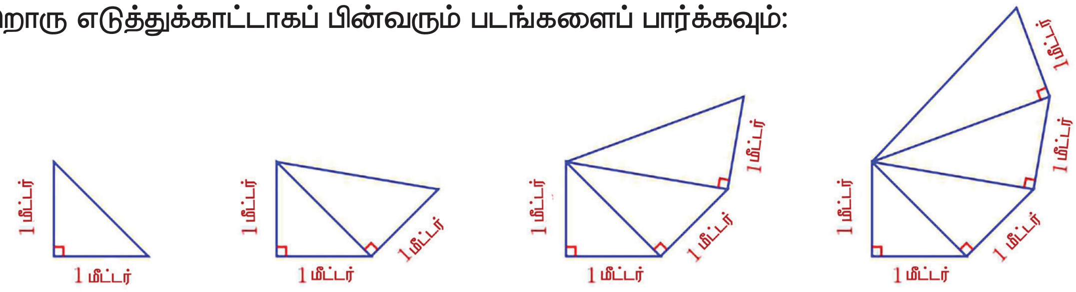
இதைப் போன்று ஏதேனும் ஒரு விதிமுறைக்கு ஏற்ப ஒன்றாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது என இவ்வாறு வரிசையாக எழுதுகின்ற ஓர் எண் தொகுப்பை, **எண் தொடர் (Number sequence)** எனக் கூறுவர்.

பல வகையான அளவுகளைக் கணக்கிடும்போது இவ்வாறான வரிசைகள் உருவாகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, முக்கோணம், நாற்கரம், ஐங்கோணம் எனப் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப பலகோணங்களை ஒழுங்குபடுத்தினால், அவற்றின் உட்கோணங்களின் தொகையாக,

$$180, 360, 540, ...$$

என்ற தொடர் கிடைக்கும்.

மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாகப் பின்வரும் படங்களைப் பார்க்கவும்:



ஒவ்வொரு படத்திலும் மிகப்பெரிய முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளத்தை மீட்டரில் எழுதினால்,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots$$

என இவ்வாறு 2 முதல் உள்ள எண்ணல் எண்களின் வர்க்க மூலங்களின் தொடர் கிடைக்கும்.

ஒரு தொடரையே பல முறைகளில் விவரிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 1 இல் முடிகின்ற எண்ணல் எண்களின் தொடர்

$$1, 11, 21, 31, \ldots$$

இதனை வேறொரு முறையில் கூறலாம்:
10 ஆல் வகுத்தால் மீதி ஒன்று கிடைக்கின்ற எண்ணல் எண்களின் தொடர்.

பலவகைத் தொடர்கள்

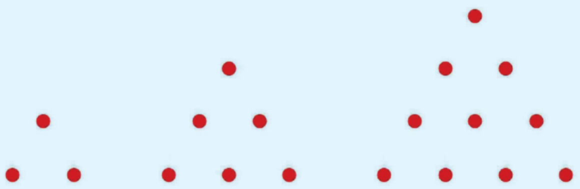
கூட்டம், வரிசை எனப் பொருள்படும் சொல்லே "தொடராகும்." கணிதத்தில் இந்தச் சொல்லைப் பயன்படுத்துவது ஒன்றாவது, இரண்டாவது எனச் சரியான இடங்களில் வரிசைப்படுத்தப்பட்டவைகளைக் குறிப்பிடு வதற்கு ஆகும். இவ்வாறு வரிசைப்படுத்துவது எண்கள் மட்டும் ஆக வேண்டும் என்பது இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, ஒழுங்கு பலகோணங்களின் ஒரு தொடர் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

பல்லுறுப்புகளின் ஒரு தொடர்:

$$1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, \ldots$$

ஒரு மொழியில் உள்ள சொற்களை எழுத்துக் களின் அகரவரிசையில் அடுக்குவதும் ஒரு தொடராகும்.

(1) பொட்டுகளை அடுக்கி முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம் :



ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் உள்ள பொட்டுகளின் எண்ணிக்கையை எழுதவும். தொடர்ந்து வரும் மூன்று முக்கோணங்களை உருவாக்குவதற்குத் தேவையான பொட்டுகளின் எண்ணிக் கையைக் கணக்கிடவும்.

(2) சமபக்க முக்கோணம், சதுரம், ஒழுங்கு ஐங்கோணம் என இவ்வாறு தொடர்கின்ற வடிவியல் வடிவங்களின் தொடரிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் தொடர்களை உருவாக்கவும்:

ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி, ஒரு குறிப்பிட்ட கோடு பக்கமான ஒழுங்கு பல கோணங்களின் தொடர் வரையலாம்.

A, B என இரு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்திய பின், Input Bar இல்

Sequence[Polygon[A,B,n],n,3,10]

என்ற கட்டளை கொடுத்தால்போதும். n என்ற எண்ணை, 3 முதல் 10 வரை மாற்றவும். அத்துடன் AB ஒரு பக்கமாக, n பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம் வரையவும் என்பது இந்தக் கட்டளையின் பொருள்.

பலகோணங்களை ஒவ்வொன்றாக வரைய m என்ற பெயரில் ஒரு Integer Slider ஐ உருவாக்கி வரைவதற்கு உரிய கட்டளையை இவ்வாறு மாற்றவும்.

Sequence[Polygon[A,B,n + 2],n,1,m]

Slider ஐ நீக்கி m என்ற எண்ணை 1, 2, 3, ... என இவ்வாறு மாற்றுவதற்கு ஏற்ப, 3, 4, 5, ... பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரையவும் என்பது இதன் பொருள்.

இதில் n + 2 க்குப் பதிலாக 2n என எழுதினால், எத்தகைய பலகோணங்கள் கிடைக்கும்?

2n + 1 ஆக்கினால்?

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 3, 4, 5, 6, ...

உட்கோணங்களின் தொகை.

வெளிக்கோணங்களின் தொகை.

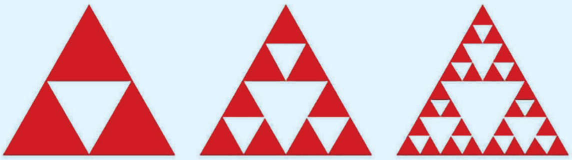
ஓர் உட்கோணத்தின் அளவு.

ஒரு வெளிக்கோணத்தின் அளவு.

(3) 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும் எண்ணல் எண்கள், மீதி 2 கிடைக்கும் எண்ணல் எண்கள் ஆகியவற்றின் தொடர்களை எழுதவும்.

(4) 1, 6 என்ற இலக்கங்களில் முடியும் எண்ணல் எண்களின் தொடரை ஏறுவரிசையில் எழுதவும். இந்தத் தொடரை வேறு இரு முறைகளில் விவரிக்கவும்.

(5) இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைத்த சிறிய முக்கோணத்தை வெட்டி மாற்றியதே முதல் படம். இதிலுள்ள மூன்று முக்கோணங்களில் இருந்தும் இதைப் போன்று நடுவிலுள்ள முக்கோணத்தை வெட்டி மாற்றியதே இரண்டாவது படம். இந்தச் செயலை மேலும் ஒரு முறை கூடச் செய்தால் மூன்றாவது படம் கிடைக்கும்.

(i) ஒவ்வொரு படத்திலும் எத்தனை சிவப்பு முக்கோணங்கள் உள்ளன?

(ii) ஒன்றையும் வெட்டி எடுக்காமல் முழு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 1 என எடுத்து, ஒவ்வொரு படத்திலும் உள்ள ஒரு சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(iii) ஒவ்வொரு படத்திலும் உள்ள சிவப்பு முக்கோணங்களின் மொத்த பரப்பளவு எவ்வளவு?

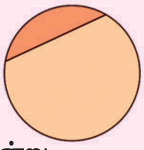
(iv) இவ்வாறு தொடர்ந்தால் கிடைக்கும் இந்த மூன்று தொடர்களின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதவும்.

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகளை ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கலாம். 1, 4, 9, ... என்றிவ்வாறு வர்க்க எண்களின் தொடரில் உள்ள முதல் பத்து உறுப்புகள் கிடைப்பதற்கு Sequence (n^2,n,1,10) என Input Bar இல் கொடுத்தால்போதும். *m* என்ற பெயரில் ஒரு Integer சிலைடர் உருவாக்கி Sequence (n^2, n,1,m) எனக் கொடுத்தால் m மாறுவதற்கு ஏற்ப தொடரிலுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கையும் மாறும்.

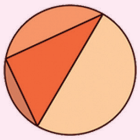
2, 4, 8, ... என்ற தொடரின் இயற்கணித வடிவம் 2^n ஆகுமல்லவா. இந்தத் தொடர் கிடைப்பதற்கு Sequence(2^n,n,1,m) எனக் கொடுத்தால் போதும்.

வட்டப்பங்கீடு

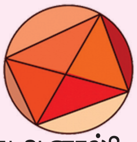
ஒரு வட்டத்தில் இரு புள்ளிகளை எடுத்து ஒரு கோட்டினால் இணைத்தால் அது வட்டத்தை இரு துண்டுகள் ஆக்குமல்லவா:



வட்டத்தில் மூன்று புள்ளிகளை எடுத்து இணைத்தால் நான்கு துண்டுகள் ஆகும்:



நான்கு புள்ளிகளை எடுத்து எல்லா ஜோடிகளையும் இணைத்தால்?



புள்ளிகள் ஐந்து ஆனால்?

ஆறு புள்ளிகளை இணைத்தால் எத்தனை துண்டுகள் ஆகும் என எதிர்பார்க்கிறீர்கள்? இது சரியா என வரைந்து பார்க்கவும்.

கூட்டுத்தொடர்கள்

இரட்டை எண்களின் தொடர்

$$2, 4, 6, \ldots$$

என்றல்லவா தொடர்கிறது.

இதன் அடுத்த எண் எது? அதற்கு அடுத்த எண்?

பொதுவாகக் கூறினால் இந்தத் தொடரில் ஓர் எண்ணில் இருந்து தொட்டடுத்த எண் கிடைப்பதற்கு 2 கூட்டினால் போதும்.

இனி ஒற்றை எண்களின் தொடரைப் பார்க்கலாம்:

$$1, 3, 5, \ldots$$

இங்கும் ஓர் எண்ணிலிருந்து தொட்டடுத்த எண் கிடைப்பதற்கு 2 கூட்டினால்போதும்.

தொடங்கும் எண்ணில் மட்டுமே இவை இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு: முதல் தொடர் 2 இல் தொடங்கி, 2 வீதம் அதிகரித்துத் தொடர்கிறது; இரண்டாவது தொடர் 1 இல் தொடங்கி, 2 வீதம் அதிகரித்துத் தொடர்கிறது.

இனி எண்ணல் எண்களுடைய பாதி எடுத்தால்?

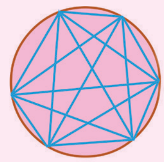
$$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$$

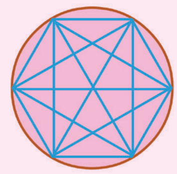
தொடங்குவது எந்த எண்ணில் இருந்து? எந்த எண் தொடர்ந்து கூட்டப்படுகிறது?

வேறு சில தொடர்களைப் பார்க்கலாம்:

முடிவுகளில் தவறு

வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் பாகங்களைக் குறித்து, வட்டப்பங்கீடு என்ற பகுதியில் பார்த்தோம் அல்லவா. புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 2, 3, 4, 5 என இவ்வாறு ஆகும்போது, பாகங்களின் எண்ணிக்கை 2, 4, 8, 16 எனக் கிடைக்கும். புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 6 எனில்? 32 என ஊகிக்கலாம். வரைந்து பார்ப்போமா?





புள்ளிகள் ஒரே தூரத்தில் இருந்தால் 30 பாகம் அல்லது 31 பாகம். எதுவாயினும். அதிகபட்டம் 31 பாகம் வரை வரையலாம், பொதுவாகக் கூறினால் வட்டத்தில் உள்ள n புள்ளிகளை ஒன்றுக்கொன்று இணைத்தால் கிடைக்கும் அதிகபட்சம் பாகங்களின் எண்ணிக்கை.

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

என நிறுவ முடியும்.

இந்த இயற்கணித சொற்றொடரிலும் 2^{n-1} என்ற சொற்றொடரிலும் $n = 2, 3, 4, 5$ என்ற எண்களைப் பயன்படுத்தும்போது கிடைப்பது 2, 4, 8, 16 என்ற எண்களாகும் என்பதே வேடிக்கை. $n = 6$ முதல், இரு சொற்றொடர்களிலும் கிடைக்கும் எண்கள் வெவ்வேறானவை ஆகும்.

(i) பலகோணங்களைப் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் எடுத்தால் வெளிக்கோணங்களின் தொகையாகக் கிடைக்கும் தொடர்.

$$360, 360, 360, \ldots$$

இங்கு 360 லிருந்து தொடங்குகிறது; மீண்டும் மீண்டும் 0 கூட்டப்படுகிறது எனக் கூறலாம்.

(ii) 100 லிட்டர் தண்ணீர் உள்ள ஒரு தொட்டியில் இருந்து, ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் 5 லிட்டர் தண்ணீர் வெளியேறுகிறது. ஒவ்வொரு மணி நேரம் முடியும்போது தொட்டியில் மீதம் உள்ள தண்ணீரை லிட்டரில் கணக்கிட்டால்

$$95, 90, 85, \ldots$$

என்ற தொடர் கிடைக்கும்.

இங்கு 95 இல் தொடங்கி 5 வீதம் கழித்துத் தொடரில் உள்ள எண்கள் கிடைக்கின்றன.

5 ஐக் கழிக்க வேண்டும் என்பதற்குப் பதிலாக –5 ஐக் கூட்ட வேண்டும் எனக் கூறலாம் அல்லவா.

இங்குப் பார்த்த தொடர்கள் உருவாக்கிய முறைகளைப் பார்க்கலாம்:

விதி	தொடர்
2 இல் தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் 2 ஐக் கூட்டவும்	2, 4, 6, ...
1இல் தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் 2 ஐக் கூட்டவும்	1, 3, 5, ...
$\frac{1}{2}$ இல் தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் $\frac{1}{2}$ ஐக் கூட்டவும்	$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$
360 இல் தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் 0 ஐக் கூட்டவும்	360, 360, 360, ...
95 இல் தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் −5 ஐக் கூட்டவும்	95, 90, 85, ...

இதைப் போன்ற தொடர்களுக்கு எல்லாம் பொதுவாக ஒரு பெயர் உள்ளது.

ஓர் எண்ணிலிருந்து தொடங்கி ஒரே எண்ணையே மீண்டும் மீண்டும் கூட்டிக் கிடைக்கும் தொடரைக் கூட்டுத்தொடர் (Arithmetic sequence) எனக் கூறுவர்.

ஒரு தொடரில் உள்ள எண்களைப் பொதுவாக அதன் **உறுப்புகள் (Terms)** எனக் கூறுவர். எடுத்துக்காட்டாக, எண்ணல் எண்களின் பாதியை வரிசையாக எடுத்தால் கிடைக்கும் தொடரில் உறுப்புகள் $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$ என்றிவ்வாறு ஆகும்; சற்று விளக்கமாகக் கூறினால் முதலாவது உறுப்பு $\frac{1}{2}$, இரண்டாவது உறுப்பு 1, மூன்றாவது உறுப்பு $1\frac{1}{2}, \ldots$

அப்போது கூட்டுத்தொடர்களைக் குறித்து இவ்வாறு கூறலாம்:

> கூட்டுத்தொடரில் எந்த உறுப்பில் இருந்தும் அதன் தொட்டடுத்த உறுப்பு கிடைக்க ஒரே எண்ணையே கூட்ட வேண்டும்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்:

> கூட்டுத் தொடரில் எந்த உறுப்பில் இருந்தும் அதன் தொட்டுப் பின்னால் உள்ள உறுப்பு கிடைப்பதற்கு ஒரே எண்ணையேக் கழிக்க வேண்டும்.

எந்த ஓர் உறுப்பில் இருந்தும் அதன் தொட்டுப் பின்னால் இருக்கும் உறுப்பைக் கழித்துக் கிடைக்கும் இந்த எண்ணைக் கூட்டுத் தொடரின் **பொதுவித்தியாசம் (Common difference)** எனக் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டாக, 10 இல் இருந்து தொடங்கி, 3 வீதம் கூட்டிக்கிடைக்கும் கூட்டுத்தொடர்

$$10, 13, 16, 19, 22, \ldots$$

இந்தத் தொடரின் பொதுவித்தியாசம் 3.

மேலும் 10 இல் இருந்து தொடங்கி, 3 வீதம் கழித்தால்?

$$10, 7, 4, 1, -2, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடர் கிடைக்கும்.

பொதுவித்தியாசம்

$$7 - 10 = 4 - 7 = 1 - 4 = -2 - 1 = \cdots = -3$$

பல சூழல்களிலும் கூட்டுத்தொடர் ஆகுமா என்பதைப் பரிசோதனை செய்வதற்கு, எந்த உறுப்பில் இருந்தும் தொட்டுப் பின்னால் இருக்கும் உறுப்பைக் கழித்தால் கிடைப்பது ஒரே எண்தானா என ஆராய்ந்தாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கும் எண்களின் தொடரைப் பார்ப்போம்;

$$1, 4, 7, \ldots$$

தொடர் விதி

3, 5, 7, ... என்ற தொடரில் அடுத்த உறுப்பு எது?

இங்குக் கூட்டுத்தொடர் எனக் கூறப்படவில்லை. அப்போது, அடுத்த உறுப்பு 9 ஆக வேண்டும் என்றில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, எதிர்பார்த்தது ஒற்றை எண்களான பகா எண்களின் தொடர் எனில், அடுத்த உறுப்பு 11 ஆகும்.

இது தரும் அறிவுரை என்ன?

பல எண்களை வரிசையாக எழுதியதிலிருந்து தொடரின் உள்ள தொடர்பிலுள்ள உறுப்புக்களைச் சரியாகக் கூற இயலாது. தொடர் உருவாக்கப் பயன்படுத்திய விதிமுறை அல்லது தொடர் உருவாகும் சூழலை தெளிவாகக் கூறினால் தான் தொடர்ந்துள்ள உறுப்புகள் எவையெனக் கூற இயலும்.

இந்த எண்களை இவ்வாறு விவரித்து எழுதலாம் அல்லவா.

$$(3 \times 0) + 1,\ (3 \times 1) + 1,\ (3 \times 2) + 1, \ldots$$

அப்போது இந்தத் தொடரில் ஓர் உறுப்பையும் அடுத்த உறுப்பையும் எடுத்தால், முதலாவது, 3 இன் மடங்குடன் 1 கூட்டியதும், அடுத்தது 3 இன் அடுத்த மடங்குடன் 1 கூட்டியதும் ஆகும்; இரண்டாவதில் இருந்து முதலாவதைக் கழித்தால் 3 கிடைக்கும் அல்லவா.

அதனால், இது ஒரு கூட்டுத்தொடராகும்; பொதுவித்தியாசம் 3.

இனி 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்காத எண்களின் தொடரை எடுத்தால்?

$$2, 3, 5, 6, \ldots$$

இதில்

$$3 - 2 = 1$$

$$5 - 3 = 2$$

இவை ஒரே எண் அல்ல; இது ஒரு கூட்டுத் தொடரும் அல்ல.

ஓர் எண்ணை 3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 1 அல்ல எனக் கூறினால் மீதி 0 ஆகலாம். (அதாவது எண் 3 இன் மடங்கு ஆகலாம்), இல்லையெனில் மீதி 2 ஆகலாம். மீதி 0 கிடைக்கும் எண்களின் தொடரையும் மீதி 2 கிடைக்கும் எண்களின் தொடரையும் வெவ்வேறாக எழுதிப்பார்க்கவும். இவை கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகுமா?

(1) கீழே கூறப்பட்டுள்ள தொடர்கள் ஒவ்வொன்றும் கூட்டு தொடரா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும். காரணம் எழுத வேண்டும். கூட்டுத்தொடர் எனில், பொதுவித்தியாசம் எழுதவும்.

(i) 4 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வரும் எண்கள்.

(ii) 4 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 அல்லது 2 வரும் எண்கள்.

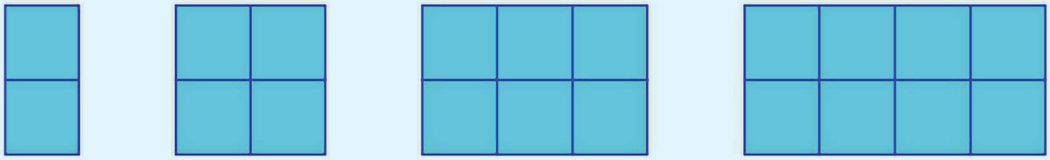
(iii) எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்கள்.

(iv) எண்ணல் எண்களின் தலைகீழிகள்.

(v) 2 இன் அடுக்குகள்.

(vi) ஒற்றை எண்களின் பாதி.

(2) கீழ்க்காணும் படங்களைப் பார்க்கவும்:



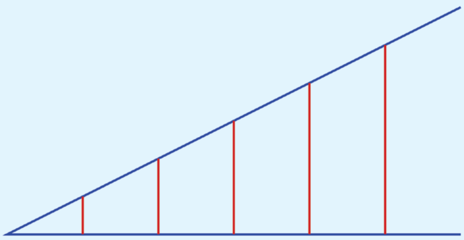
(i) ஒவ்வொரு செவ்வகத்திலும் எத்தனை சிறிய சதுரங்கள் உள்ளன?

(ii) பெரிய சதுரங்கள் எத்தனை?

(iii) மொத்தம் எத்தனை சதுரங்கள்?

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் கிடைக்கும் ஒவ்வொரு தொடரும் கூட்டுத்தொடராகுமா?

(3) படத்தில் கீழே உள்ள கோட்டிலிருந்து ஒரே இடைவெளியில் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



இவ்வாறு தொடரும் செங்குத்துக் கோடுகளின் உயரங்களின் தொடர் கூட்டுத்தொடர் ஆகும் என நிறுவுக.

(குறிப்பு : ஒவ்வொரு செங்குத்துக்கோட்டின் மேல் உச்சியில் இருந்தும் அடுத்தச் செங்குத்துக் கோட்டிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து பார்க்கவும்.)

இடமும் உறுப்பும்

1, 11 என்ற எண்கள் முதலாவது உறுப்பும் இரண்டாவது உறுப்புமான ஒரு கூட்டுத் தொடரை உருவாக்கலாமா?

எளிதல்லவா?

1 இல் இருந்து 11 கிடைக்க 10 ஐக் கூட்ட வேண்டும். தொடர்ந்தும் 10 கூட்டிக் கொண்டிருந்தால் கூட்டுத்தொடர் கிடைக்கும்;

$$1, 11, 21, 31, \ldots$$

அப்போது வேறொரு வினா: 1, 11 என்ற எண்கள் முதலாவதும் மூன்றாவதும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடரை உருவாக்கலாமா?

இத்தகைய ஒரு கூட்டுத் தொடரின் பொது வித்தியாசத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது?

1 உடன் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டியதே இரண்டாவது எண்; அந்த எண் நமக்குத் தெரியாது. மீண்டும் ஒருமுறை பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டினால் மூன்றாவது எண்ணான 11 கிடைக்க வேண்டும்.

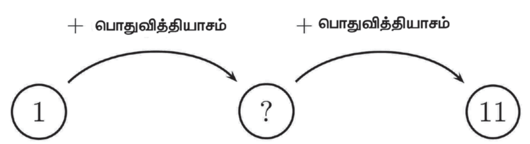
தொடரும் மீதியும்

இரட்டை எண்களான 2, 4, 6, ... ஒரு கூட்டுத் தொடராகும். ஒற்றை எண்களான 1, 3, 5, ... உம் கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இரு தொடர்களிலும் பொதுவித்தியாசம் 2 ஆகும்.

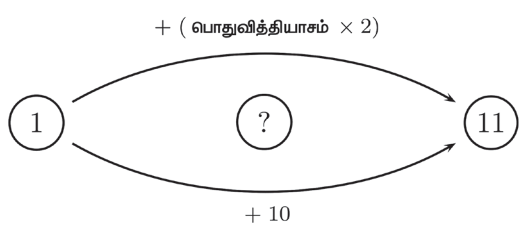
2 ஆல் முழுதையும் வகுக்க முடிகின்ற (அதாவது மீதி 0 ஆன) எண்ணல் எண்கள் அல்லவா இரட்டை எண்கள்; மீதி 1 வருபவை ஒற்றை எண்களும்.

இதைப்போன்று எண்ணல் எண்களை 3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 0, 1, 2 என வரும் மூன்று கூட்டுத்தொடர்களை உருவாக்கலாம். இவை அனைத்திற்கும் பொதுவித்தியாசம் என்ன? வகுப்பது 4 ஆல் எனில்?

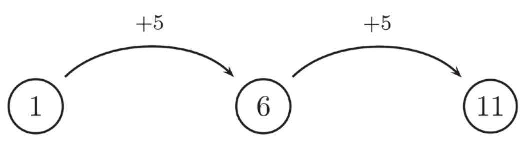
இனி திருப்பிச் சிந்திப்போம். உறுப்புகள் அனைத்தும் எண்ணல் எண்களாக உள்ள ஒரு தொடரை எடுத்தால், எந்த இரு உறுப்புகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசம் பொதுவித்தியாசத்தின் மடங்கு ஆகும். ஆகவே, இந்த உறுப்புகளைப் பொதுவித்தியாசத்தால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் ஆகும். (எதனால்?)



அதாவது, 1 உடன் பொதுவித்தியாசத்தின் இரு மடங்கைக் கூட்டும்போது 11 கிடைக்க வேண்டும்.



அப்போது, பொது வித்தியாசத்தில் இரண்டு மடங்கு 10; பொதுவித்தியாசம் 5



மேலும், தொடரை எழுதலாம் அல்லவா.

1, 6, 11, 16, 21, ...

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் சில எண்கள் எழுதப்படவில்லை. அவற்றின் இடம் ◯ என அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இந்த எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்:

(i) 24, 42, ◯, ◯, ... (ii) ◯, 24, 42, ◯, ...

(iii) ◯, ◯, 24, 42, ... (iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

(v) ◯, 24, ◯, 42, ... (vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

3 ஆவது உறுப்பு 37 உம், 7 ஆவது உறுப்பு 73உம் ஆன கூட்டுத்தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளைக் கணக்கிடுக.

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) 3 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 7 ஆவது உறுப்புக் கிடைக்கப் பொதுவித்தியாசம் $7 - 3 = 4$ முறை கூட்ட வேண்டும்.

(ii) கூட்டிய எண் $73 - 37 = 36$.

(iii) அப்போது, பொதுவித்தியாசத்தின் 4 மடங்கு 36.

(iv) பொதுவித்தியாசம் $36 \div 4 = 9$.

முதல் உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடுவது?

(i) 3 ஆவது உறுப்பில் இருந்து 1 ஆவது உறுப்புக் கிடைக்க, பொதுவித்தியாசம் $3 - 1 = 2$ முறை கழிக்க வேண்டும்.

(ii) 1 ஆவது உறுப்பு, $37 - (9 \times 2) = 19$.

மேலும் தொடரை முதலில் இருந்து எழுதலாம் அல்லவா.

19, 28, 37, 46, 55, ...

சில கூட்டுத்தொடர்களின் குறிப்பிட்ட இரு இடங்களிலுள்ள உறுப்புகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தொடரினுடையவும் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) 3 ஆவது உறுப்பு 34
6 ஆவது உறுப்பு 67

(ii) 3 ஆவது உறுப்பு 43
6 ஆவது உறுப்பு 76

(iii) 3 ஆவது உறுப்பு 2
5 ஆவது உறுப்பு 3

(iv) 5 ஆவது உறுப்பு 8
9 ஆவது உறுப்பு 10

(v) 5 ஆவது உறுப்பு 7
7 ஆவது உறுப்பு 5

இடமாற்றமும் உறுப்புமாற்றமும்

இந்தக் கூட்டுத்தொடரைப் பார்க்கவும்:

19, 28, 37, ...

இதில்

1 ஆவது உறுப்பு 19

2 ஆவது உறுப்பு 28

3 ஆவது உறுப்பு 37

....

என்றிவ்வாறு அல்லவா.

இந்தக் கருத்தைச் சற்று மாற்றி இவ்வாறு எழுதலாம்:

இடம்	1	2	3	...
உறுப்பு	19	28	37	...

இதில் இடமும் உறுப்பும் மாறுவதன் கணக்கு என்ன?

இடம் ஒன்று வீதம் கூடும்போது, உறுப்பு 9 வீதம் கூடுகிறது.

அப்போது இந்தத் தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

பல முறைகளில் சிந்திக்கலாம்.

மேலே கடைசியாக எழுதிய உறுப்பிலிருந்து தொடங்கலாம்:

(i) 3 ஆவது இடத்தில் இருந்து 10 ஆவது இடத்தை அடைவதற்கு, இடம் $10 - 3 = 7$ கூட வேண்டும்.

(ii) 3 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 10 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு 7 முறை 9 ஐக் கூட்ட வேண்டும்

(iii) 10 ஆவது உறுப்பு $37 + (9 \times 7) = 100$.

முதல் உறுப்பிலிருந்தும் தொடங்கலாம்:

(i) 1 ஆவது இடத்தில் இருந்து 10ஆவது இடத்தை அடைவதற்கு, இடம் $10 - 1 = 9$ கூட வேண்டும்.

(ii) 1 ஆவது இடத்தில் இருந்து 10 ஆவது இடத்தை அடைவதற்கு, 9 முறை 9 ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

(iii) 10 ஆவது உறுப்பு $19 + (9 \times 9) = 100$.

இதைப் போன்று 2 ஆவது உறுப்பில் இருந்து 10 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடலாமா?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

4 ஆவது உறுப்பு 45 உம், 5 ஆவது உறுப்பு 56 உம் ஆன கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு எது?

இதில், 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 5 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்குக் கூட்டியது $56 - 45 = 11$ அல்லவா. கூட்டுத்தொடர் ஆனதால், எந்த உறுப்பில் இருந்தும் அடுத்த உறுப்பை அடைவதற்கு 11 ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

இங்குக் கணக்கிட வேண்டியது ஒன்றாவது உறுப்பு அல்லவா.

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்;

(i) 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 1 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு, இடம் $4 - 1 = 3$ குறைய வேண்டும்.

(ii) 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 1 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு 3 முறை 11 ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

(iii) 1 ஆவது உறுப்பு $45 - (11 \times 3) = 12$

மேலும் இந்தத் தொடரை இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா.

$$12, 23, 34, \ldots$$

இந்த இரண்டு கணக்குகளிலும், உறுப்புகள் படிப்படியாகப் பெரிதாகின்றன.

உறுப்புகள் சிறியதாகும் தொடர் எனில்?

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தத் தொடரைப் பார்க்கவும்:

$$91, 82, 73, \ldots$$

இதன் 10 ஆவது உறுப்பை எவ்வாறெல்லாம் கணக்கிடலாம்?

இதில் இடம் அதிகரிக்கும்போது, உறுப்புக் குறைகிறது. எவ்வளவு குறைகிறது?

இடம் ஒவ்வொன்றும் கூடும்போது, உறுப்பு குறைவது $91 - 82 = 9$.

அப்போது 10 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு?

(i) 3 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 10 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு, இடம் $10 - 3 = 7$ கூட வேண்டும்.

(ii) 3 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 10 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு 7 முறை 9 ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

(iii) 10 ஆவது உறுப்பு $73 - (9 \times 7) = 10$.

இதைப் போன்ற தொடர்களில் ஓர் இடத்தில் உள்ள உறுப்பிலிருந்து அதன் பின்னால் ஓர் இடத்தில் உள்ள உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

4 ஆவது உறுப்பு 65 உம், 5 ஆவது உறுப்பு 54 உம் ஆன ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு எது?

இங்கு இடம் அதிகரிக்கும்போது உறுப்பு குறைகிறது அல்லவா.

இடம் ஒவ்வொன்று அதிகரிக்கும்போதும், உறுப்பு குறைவது $65 - 54 = 11$ ஆகும்.

மாறாக, இடம் ஒவ்வொன்றும் குறையும்போது?

உறுப்பு 11 வீதம் கூட வேண்டும் அல்லவா.

அப்போது, முதல் உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

(i) 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 1ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு, இடம் $4 - 1 = 3$ குறைய வேண்டும்

(ii) 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 1 ஆவது உறுப்பை அடைவதற்கு 3 முறை 11 ஐக் கூட்ட வேண்டும்

(iii) 1 ஆவது உறுப்பு $65 + (11 \times 3) = 98$.

(1) 1, 11, 21, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் 25 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(2) ஒரு தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பு 46 உம், 11ஆவது உறுப்பு 51 உம் ஆகும்.

(i) தொடரின் முதலாவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதவும்.

(3) 100, 95, 90, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் 21 ஆவது உறுப்பு எது?

(4) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பு 56 உம், 11 ஆவது உறுப்பு 51 உம் ஆகும்.

(i) தொடரில் முதலாவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதவும்.

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் இடங்கள் மாறுவதற்கும், உறுப்புகள் மாறுவதற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை மேலும் சற்று விளக்கமாகப் பரிசோதனை செய்யலாம்.

இந்தத் தொடரைப் பார்க்கவும்:

5, 15, 25, ...

இதை இடங்களும் உறுப்புகளுமாக இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா:

இடம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
உறுப்பு	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	...

இதில் இடங்கள் ஒவ்வொன்று அதிகரிக்கும்போது, உறுப்புகள் 10 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

இடங்கள் 2 வீதம் அதிகரித்தால்?

இடம்	1	3	5	7	9	...
உறுப்பு	5	25	45	65	85	...

இடங்கள் 3 வீதம் அதிகரித்தால்?

மாறாக, இடங்கள் குறையும்போது?

- இடங்கள் ஒவ்வொன்று குறையும்போது, உறுப்புகள் 10 வீதம் குறைகிறது.
- இடங்கள் 2 வீதம் குறையும்போது, உறுப்புகள் 20 வீதம் குறைகிறது.
- இடங்கள் 3 வீதம் குறையும்போது, உறுப்புகள் 30 வீதம் குறைகிறது.

மேலும் உறுப்புகள் சிறியதாகும் ஒரு கூட்டுத் தொடரை எடுத்தால்?

இடம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
உறுப்பு	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	...

இதில் இடமாற்றத்திற்கும் உறுப்புமாற்றத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

- இடங்கள் ஒவ்வொன்று அதிகரிக்கும்போது, உறுப்புகள் 5 வீதம் குறைகிறது.
- இடங்கள் 2 வீதம் அதிகரிக்கும்போது, உறுப்புகள் 10 வீதம் குறைகிறது.
- இடங்கள் 3 வீதம் அதிகரிக்கும்போது, உறுப்புகள் 15 வீதம் குறைகிறது.

இடங்கள் குறையும்போது?

- இடங்கள் ஒவ்வொன்று குறையும்போது உறுப்புகள் 5 வீதம் அதிகரிக்கிறது.
- இடங்கள் 2 வீதம் குறையும்போது உறுப்புகள் 10 வீதம் அதிகரிக்கிறது.
- இடங்கள் 3 வீதம் குறையும்போது உறுப்புகள் 15 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

வேறு கூட்டுத்தொடர்களிலும், எண்கள் மாறினாலும் இடமாற்றத்திற்கும் உறுப்பு மாற்றத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு இதைப் போன்று இருக்கும் அல்லவா.

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

எந்தக் கூட்டுத் தொடரிலும் உறுப்புகளின் மாற்றம் இடங்களின் மாற்றத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்குவதாகும்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் உள்ள **விகித சமம்** என்ற பாடத்தில் உள்ள கருத்தைப் பயன்படுத்தி இதை இவ்வாறு கூறலாம்:

எந்தக் கூட்டுத் தொடரிலும் உறுப்புகளின் மாற்றம், இடங்களின் மாற்றத்திற்கு விகித சமத்திலாகும்.

மேலும் இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 3 ஆவது உறுப்பு 12 உம், 7 ஆவது உறுப்பு 32 உம் ஆகும். இதன் 15 ஆவது உறுப்பு என்ன?

இதில் 3 ஆவது இடத்தில் இருந்து 7 ஆவது இடத்திற்குள்ள இடமாற்றத்தையும் உறுப்பு மாற்றத்தையும் எழுதி பார்க்கலாம்:

இடமாற்றம் $7 - 3 = 4$ அதிகரித்தது.

உறுப்பு மாற்றம் $32 - 12 = 20$ அதிகரித்தது.

இதிலிருந்து ஒவ்வொரு இடம் அதிகரிக்கும்போதும், உறுப்பு $20 \div 4 = 5$ அதிகரிக்கும் என்று கணக்கிடலாம்.

நமக்குத் தேவையானது 15 ஆவது உறுப்பு அல்லவா. அதற்கு 7 ஆவது இடத்தில் இருந்து $15 - 7 = 8$ இடம் முன்னால் செல்ல வேண்டும்: அப்போது உறுப்பு $5 \times 8 = 40$ அதிகரிக்கும்.

அதாவது, 15 ஆவது உறுப்பு $32 + 40 = 72$.

வேறொரு முறையிலும் இதனைக் கணக்கிடலாம்.

(i) இடம் 4 அதிகரித்தபோது, உறுப்பு 20 அதிகரித்தது

(ii) இடம் $8 = 4 \times 2$ அதிகரித்தால், உறுப்பு $20 \times 2 = 40$ அதிகரிக்கும்.

(iii) 15 ஆவது உறுப்பு $32 + 40 = 72$

இந்த முறையில் இந்தத் தொடரின் 5 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடலாமா?

(i) 3 ஆவது உறுப்பு 12.

(ii) 3 ஆவது இடத்தில் இருந்து 2 இடம் முன்னால் 5 ஆவது உறுப்பு உள்ளது.

(iii) இடம் 4 அதிகரிக்கும்போது உறுப்பு 20 அதிகரிக்கிறது.

(iv) இடம் $2 = 4 \times \frac{1}{2}$ அதிகரித்தால், உறுப்பு $20 \times \frac{1}{2} = 10$ அதிகரிக்கிறது.

(v) 5 ஆவது உறுப்பு $12 + 10 = 22$

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 4 ஆவது உறுப்பு 81 உம், 6 ஆவது உறுப்பு 71 உம் ஆகும். இதில் 20 ஆவது உறுப்பு என்ன?

முன்பு செய்ததைப் போல் முதலில் 4 ஆவது இடத்தில் இருந்து 6 ஆவது இடத்தில் உள்ள இடமாற்றத்தையும் உறுப்பு மாற்றத்தையும் எழுதிப்பார்க்கலாம்.:

இடமாற்றம் $6 - 4 = 2$ அதிகரித்தது.

உறுப்பு மாற்றம் $81 - 71 = 10$ குறைந்தது.

நமக்குத் தேவையானது 20 ஆவது உறுப்பு; அதாவது 6 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 20 – 6 = 14 இடம் முன்னால் உள்ள உறுப்பு; இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) இடம் 2 அதிகரித்தபோது உறுப்பு 10 குறைந்தது.

(ii) இடம் $14 = 2 \times 7$ கூடினால், உறுப்பு $10 \times 7 = 70$ குறைய வேண்டும்.

(iii) 20 ஆவது உறுப்பு 71 – 70 = 1.

(1) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 3 ஆவது உறுப்பு 15 உம், 8 ஆவது உறுப்பு 35 உம் ஆகும்

(i) தொடரின் 13 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் 23 வது உறுப்பு என்ன?

(2) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 5 ஆவது உறுப்பு 21 உம், 9 ஆவது உறுப்பு 41 உம் ஆகும்.

(i) தொடரின் முதல் உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் மூன்றாவது உறுப்பு என்ன?

(3) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 4 ஆவது உறுப்பு 61 உம், 7 ஆவது உறுப்பு 31 உம் ஆகும்

(i) தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் முதல் உறுப்பு என்ன?

(4) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 5 ஆவது உறுப்பு 10 உம், 10 ஆவது உறுப்பு 5 உம் ஆகும்.

(i) தொடரின் 15 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் 25 ஆவது உறுப்பு என்ன?

கூட்டுத் தொடரின் உறுப்புகளின் மாற்றம் இடமாற்றத்திற்கு விகித சமத்தில் ஆகும் என்ற கருத்து ஓர் எண் ஒரு கூட்டுத்தொடரின் உறுப்பாகுமா எனப் பரிசோதனை செய்யவும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக முதலில் எழுதிய ஒரு தொடரைப் பார்ப்போம்:

19, 28, 37, ...

இதில் 10 ஆவது உறுப்பு 100 ஆகும் எனக் கண்டோம் அல்லவா.

1000 இந்தத் தொடரில் உறுப்பாகுமா?

இந்தத் தொடரில் முதலாவது உறுப்பிலிருந்து இரண்டாவது உறுப்பிற்குச் செல்லும்போது உறுப்பு 28 – 19 = 9 அதிகரிக்கிறது அல்லவா. அப்போது இடமாற்றத்திற்கும் உறுப்பு மாற்றத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை இவ்வாறு எழுதலாம்:

இடமாற்றம்	1	2	3	...
உறுப்பு மாற்றம்	9	9×2	9×3	...

அதாவது, எந்த உறுப்பு மாற்றமும் 9 இன் மடங்காகும்.

அப்போது 1000 என்ற எண் இந்தத் தொடரின் உறுப்பாகும் என்பதை அறிவதற்கு ($1000 - 19 = 981$) என்ற எண் 9 இன் மடங்காகுமா எனப் பரிசோதனைச் செய்தால்போதும்.

$$981 \div 9 = 109$$

ஆனதால், இந்தத் தொடரின் 110 ஆவது உறுப்பு 1000 எனக் காணலாம்.

இதைப்போன்று 10000 என்ற எண் இந்தத் தொடரில் உள்ளதா எனவும், உள்ளது எனில் எத்தனையாவது உறுப்பாகும் எனவும், பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும்.

(1) 13, 24, 35, ... என இவ்வாறு தொடரும் கூட்டுத் தொடரில், 101 ஓர் உறுப்பு ஆகுமா? 1001 எனில்?

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் சில கூட்டுத்தொடர்களும் தொடர்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் நேராக இரு எண்களும் எழுதப்பட்டுள்ளன. எண்கள் ஒவ்வொன்றும் அந்தந்தத் தொடரில் உள்ளதா எனப் பரிசோதித்துப் பார்க்கவும்.:

தொடர்	எண்	ஆம்/இல்லை
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

(3) மேலே உள்ள அட்டவணையில் அந்தந்தத் தொடரில் வருகின்ற எண்கள் தொடரில் எத்தனையாவது உறுப்பாகும் எனக் கண்டுபிடிக்கவும்.

உறுப்புத் தொடர்புகள்

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் உள்ள இரண்டு இடங்களின் உறுப்புகள் தெரிந்தால், தொடரின் எல்லா உறுப்புகளையும் கணக்கிடலாம் எனத் தெரிந்து கொண்டோம் அல்லவா.

ஓர் உறுப்பும் அதன் இடமும் மட்டும் அறிந்தால், கூட்டுத்தொடரைப் பற்றி ஏதாவது கூற இயலுமா? எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 5 என்று மட்டும் கூறினால், தொடரைப் பற்றி வேறு ஏதாவது கூற இயலுமா?

பொதுவித்தியாசம் எதுவும் ஆகலாம் அல்லவா; அதற்கேற்ப தொடர் எவ்வாறாகவும் தொடரலாம்.

பதிலாக, ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 2 ஆவது உறுப்பு 5 எனக் கூறினால்?

அப்போதும் பொதுவித்தியாசமாகப் பல எண்களை எடுத்துப் பல கூட்டுத்தொடர்களை உருவாக்கலாம்.

பொதுவித்தியாசமாகச் சில எண்களை எடுத்து, 2 ஆவது உறுப்பாகிய 5 இன் முன்னும் பின்னும் உள்ள உறுப்புகளை (1 ஆவது உறுப்பும், 3 ஆவது உறுப்பும்) மட்டும் எழுதிப் பார்க்கலாம்:

பொதுவித்தியாசம் 1 : 4, 5, 6

பொதுவித்தியாசம் 2 : 3, 5, 7

பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{2}$: $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$

பொதுவித்தியாசம் $\sqrt{2}$: $5 - \sqrt{2}$, 5, $5 + \sqrt{2}$

பொதுவித்தியாசம் -1 : 6, 5, 4

இந்த எண்களுக்கிடையே ஏதாவது தொடர்பு காணப்படுகிறதா?

எல்லாவற்றிலும் முதல், கடைசி எண்களின் தொகை என்ன?

மூன்று எண்களுடையவும் தொகை?

எதனால்?

பொதுவித்தியாசம் எதுவானாலும், 5 இல் இருந்து அந்த எண்ணைக் கழித்தது அல்லவா முதல் எண்; 5 உடன் அதே எண்ணைக் கூட்டியதே கடைசி எண்.

அப்போது, முதல், கடைசி எண்களைக் கூட்டுவது என்பது, இரண்டு ஐந்துகளைக் கூட்டுவதற்குச் சமம் அல்லவா.

மேலும் மூன்று எண்களையும் கூட்டினால், நடுவிலுள்ள எண்ணாகிய 5 ஐக் கூடக் கூட்ட வேண்டும். அப்போது 5 இன் மூன்று மடங்கானது.

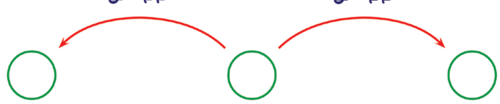
2 ஆவது உறுப்பாகிய 5 க்குப் பதிலாக வேறு ஏதாவது எண்ணை எடுத்தால்?

அப்போது மேலே கூறியதைப்போல் 1 ஆவது உறுப்பு 3 ஆவது உறுப்பின் தொகை, அந்த எண்ணின் இரண்டு மடங்கு ஆகும் அல்லவா?

முதல் மூன்று உறுப்புகளின் தொகை?

மேலும் இரண்டாம் இடத்திற்குப் பதிலாக, வேறு ஏதாவது இடத்தில் உள்ள ஓர் உறுப்பை எடுத்தால்?

அதன் தொட்டுப் பின்னால் உள்ள உறுப்பு, அதிலிருந்து பொதுவித்தியாசத்தைக் கழித்ததாகும்; தொட்டு முன்னால் உள்ள உறுப்பு அதனுடன் பொதுவித்தியாசத்தைக் கூட்டியதும் ஆகும்;



அப்போது அவற்றின் தொகை முதலில் எடுத்த (நடுவிலுள்ள) உறுப்பின் இரண்டு மடங்கு அல்லவா.

மூன்று உறுப்புகளின் தொகை?

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

(i) ஒரு கூட்டுத்தொடரில், ஓர் உறுப்பின் தொட்டு பின்பும் தொட்டு முன்பும் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை, முதலில் எடுத்த உறுப்பின் இரண்டு மடங்காகும்.

(ii) ஒரு கூட்டுத்தொடரில், ஓர் உறுப்பினுடையவும் அதன் தொட்டுப் பின்பும் தொட்டு முன்பும் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை, முதலில் எடுத்த உறுப்பின் மூன்று மடங்காகும்.

ஒரு கூட்டுத்தொடரில் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பும் அதன் தொட்டு பின்பும் தொட்டு முன்பும் உள்ள உறுப்புகளை எடுத்தால், தொடரின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் ஆகும் அல்லவா?

அப்போது மேலே கூறிய இரண்டாவது கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் தொகை, நடுவிலுள்ள உறுப்பின் மூன்று மடங்காகும்.

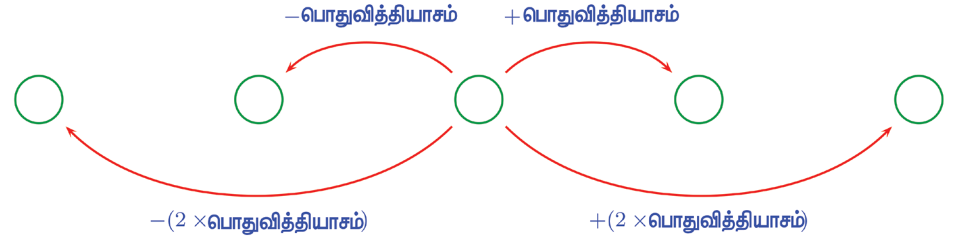
இதை மாறாகக் கூறினால்?

தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் தொகையின் மூன்றில் ஒன்றே நடுவிலுள்ள உறுப்பு.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கூட்டுத்தொடரின் $5, 6, 7$ இடங்களின் உறுப்புகளின் தொகை 30 எனில், 6 ஆவது உறுப்பு $30 \times \frac{1}{3} = 10$ ஆகும்.

மேலும் ஓர் உறுப்பின் தொட்டு பின்பும் முன்பும் உள்ள உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக அதிலிருந்து இரண்டு இடங்கள் பின்னால் உள்ள உறுப்பையும் இரண்டு இடங்கள் முன்னால் உள்ள உறுப்பையும் எடுத்தால்?

இரண்டு இடங்கள் பின்னால் செல்லும்போது, உறுப்பிலிருந்து பொதுவித்தியாசத்தின் இரண்டு மடங்கு குறையும்; இரண்டு இடங்கள் முன்னால் செல்லும்போது, உறுப்பிலிருந்து பொதுவித்தியாசத்தின் இரண்டு மடங்கு அதிகரிக்கும்.



தொட்டு பின்பும் முன்பும் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை, முதலில் எடுத்த உறுப்பின் இரண்டு மடங்காகும் என முன்னர் கண்டோம் அல்லவா.

இரண்டு இடங்கள் பின்பும், இரண்டு இடங்கள் முன்பும் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை?

அவற்றில் ஒன்று, முதலில் எடுத்த உறுப்பிலிருந்து பொதுவித்தியாசத்தின் இரண்டு மடங்கைக் கழித்தும் மற்றொன்று, முதலில் எடுத்த உறுப்புடன் பொது வித்தியாசத்தில் இரண்டு மடங்கைக் கூட்டியதும் அல்லவா. அப்போது அவற்றைக் கூட்டினாலும், முதலில் எடுத்த உறுப்பின் இரண்டு மடங்கு அல்லவா?

இந்த ஐந்து உறுப்புகளையும் கூட்டினால்?

இவற்றில் முதல் எண்ணையும் கடைசி எண்ணையும் கூட்டினாலும், இரண்டாவது எண்ணையும், நான்காவது எண்ணையும் கூட்டினாலும் நடுவிலுள்ள (மூன்றாவது) எண்களின் இரண்டு மடங்காகும். அப்பொழுது ஐந்து உறுப்புகளையும் கூட்டினால், மூன்றாவது எண்ணின் $2 + 2 + 1 = 5$ மடங்காகும்.

மேலும் ஓர் உறுப்பின் இரண்டு பக்கங்களிலும் ஓர் இடத்தின் இடைவெளியிலும், இரண்டு இடங்களின் இடைவெளியிலும் மூன்று இடங்களின் இடைவெளியிலுமாக ஏழு உறுப்புகளை எடுத்தால்?

பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

(i) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் ஓர் உறுப்பின் முன்பும் பின்பும் ஒரே இடைவெளியில் உள்ள இரண்டு உறுப்புகளின் தொகை, நடுவில் உள்ள உறுப்பின் இரண்டு மடங்காகும்.

(ii) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் ஓர் உறுப்பினுடையவும், அதன் முன்பும் பின்பும் உள்ள தொடர்ச்சியான ஒரே எண்ணிக்கையில் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை, நடுவில் உள்ள உறுப்பு, மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கூட்டு தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பு 25 எனில், மேலே கூறிய கருத்தின்படி எந்தெந்த தொகைகளை எல்லாம் கணக்கிடலாம்?

- 9 ஆவது உறுப்பு, 11 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை $25 \times 2 = 50$.
- 8 ஆவது உறுப்பு, 12 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை $25 \times 2 = 50$.

வேறு எந்தெந்த தொகைகள் 50 ஆகும் எனக் கணக்கிடலாம்?

மேலே கூறிய இரண்டாவது கருத்தைப் பயன்படுத்தி எந்தெந்த தொகைகளைக் கணக்கிடலாம்?

- 9, 10, 11 இடங்களின் தொகை $25 \times 3 = 75$.
- 8, 9, 10, 11, 12 இடங்களின் தொகை $25 \times 5 = 125$.

வேறு எந்தெந்த தொகைகளைக் கணக்கிடலாம்?

இதில் வேறொரு கருத்தைக் கவனித்தீர்களா? ஓர் உறுப்பும் அதன் முன்பும் பின்பும் தொடர்ச்சியான சம எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளும் எடுத்தால், கிடைக்கும் மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்ணாகும் அல்லவா; தொடங்கியது அவற்றிற்கு நடுவில் உள்ள உறுப்பும் ஆகும். அப்போது மேலே கூறிய இரண்டாவது கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை ஒற்றை எண்களாக எடுத்தால், அவற்றின் தொகை, நடுவிலுள்ள உறுப்பு, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

(1) ஒரு கூட்டு தொடரின் 4 ஆவது உறுப்பு 8 ஆகும்.

(i) கீழே தரப்பட்டுள்ள 2 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடுக.

(a) 3 ஆவது உறுப்பும் 5 ஆவது உறுப்பும்.

(b) 2 ஆவது உறுப்பும் 6 ஆவது உறுப்பும்.

(c) 1 ஆவது உறுப்பும் 7 ஆவது உறுப்பும்.

(ii) 3 ஆவது உறுப்பு, 4 ஆவது உறுப்பு, 5 ஆவது உறுப்பு என்ற 3 உறுப்புகளின் தொகை என்ன?

(iii) 2 ஆவது உறுப்பு முதல் 6 ஆவது உறுப்பு வரையுள்ள 5 உறுப்புகளின் தொகை என்ன?

(iv) 1 ஆவது உறுப்பு முதல் 7 ஆவது உறுப்பு வரையுள்ள 7 உறுப்புகளின் தொகை என்ன?

(2) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் பொதுவித்தியாசம் 2 உம், 9 ஆவது உறுப்பு, 10 ஆவது உறுப்பு, 11 ஆவது உறுப்பு இவற்றின் தொகை 90 உம் ஆகும். தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் கணக்கிடுக.

மேலும் இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு 10 உம், முதல் 5 உறுப்புகளின் தொகை 250 உம் ஆகும். தொடரைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

முதல் 5 உறுப்புகளின் தொகை 250 ஆனதால், 3 ஆவது உறுப்பு (நடுவில் உள்ள உறுப்பு) 50 எனக் கணக்கிடலாம் அல்லவா (எவ்வாறு?). 1 ஆவது உறுப்பு 10 உம், 3 ஆவது உறுப்பு 50 உம் ஆனதால், பொதுவித்தியாசம் 20 எனவும் கணக்கிடலாம். அப்போது தொடர் 10, 30, 50, ...

(1) முதல் 7 உறுப்புகளின் தொகை 70 ஆகின்ற மூன்று கூட்டுத் தொடர்களை எழுதவும்.

(2) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் 3 உறுப்புகளின் தொகை 30 உம், முதல் 7 உறுப்புகளின் தொகை 140 உம் ஆகும்.

(i) தொடரின் 2 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(ii) தொடரின் 4 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(iii) தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் எவை?

(3) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளின் தொகை 150 உம், முதல் பத்து உறுப்புகளின் தொகை 550 உம் ஆகும்.

(i) தொடரின் மூன்றாவது உறுப்பு என்ன?

(ii) எட்டாவது உறுப்பு என்ன?

(iii) தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் எவை?

(4) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 11 ஆவது உறுப்பு, 21 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 80 எனில் 16 ஆவது உறுப்பு என்ன?

(5) ஓர் ஐங்கோணத்தின் கோணங்கள் கூட்டுத் தொடரில் ஆகும்.

(i) கோணங்களை அளவுகளின் ஏறுவரிசையில் எழுதினால், மூன்றாவது கோணம் என்ன?

(ii) மிகச் சிறிய கோணம் $40°$ எனில் பிற கோணங்கள் எவையெல்லாம்?

(iii) மிகச்சிறிய கோணம் $36°$ ஆகுமா?

கூட்டுத் தொடரின் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள உறுப்பு மட்டும் தெரிந்தாலும், அதன் பல உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடலாம் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா?

வேறொரு முறையிலான கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 2 ஆவது உறுப்பு, 5 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 35 எனக் கூறினால், தொடரைப் பற்றி வேறு ஏதாவது கூற இயலுமா?

இதன் 2 ஆவது உறுப்பாக எந்த எண்ணையும் எடுக்கலாம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, 2 ஆவது உறுப்பு 10 என எடுத்தால்?

5 ஆவது உறுப்பு $35 - 10 = 25$

மேலும் பொதுவித்தியாசம் $(25 - 10) \div 3 = 5$ எனக் கணக்கிடலாம். தொடர்ந்து தொடரின் முதலில் உள்ள சில உறுப்புகளைக் கணக்கிடலாம்;

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

இதில் ஒரு கருத்தைக் கவனித்தீர்களா?

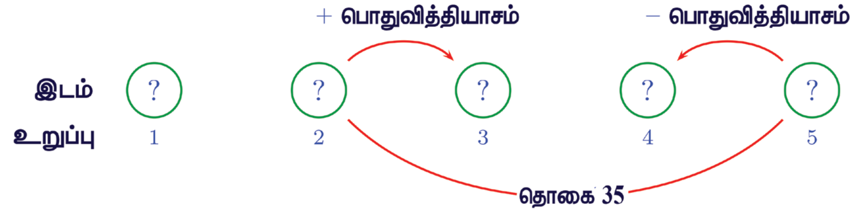
3 ஆவது உறுப்பு, 4 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை $= 15 + 20 = 35$

1 ஆவது உறுப்பு, 6 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை $= 5 + 30 = 35$

2 ஆவது உறுப்பாக வேறு ஏதாவது எண்ணை எடுத்து, இந்தத் தொகைகளைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

எதனால் இந்தத் தொகைகள் எல்லாம் 35 ஆகக் கிடைக்கிறது?

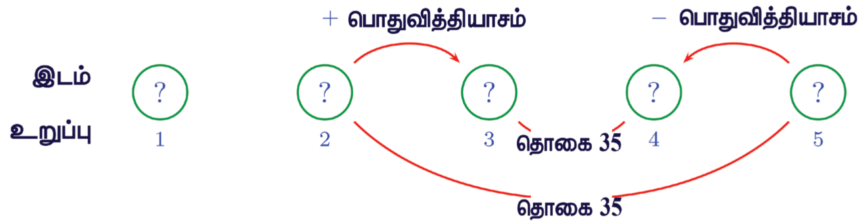
கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள கருத்தை ஒரு படமாக்கிப் பார்க்கலாம்:



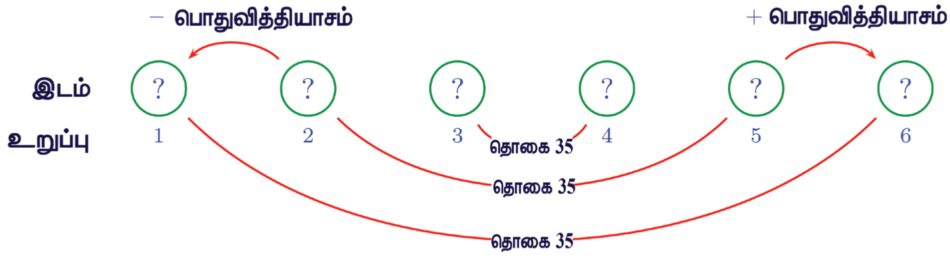
2 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 3 ஆவது உறுப்பிற்கு மாறுவதற்குப் பொதுவித்தியாசத்தை ஒரு முறை கூட்ட வேண்டும்.

5 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 4 ஆவது உறுப்பிற்கு மாறுவதற்குப் பொதுவித்தியாசத்தை ஒரு முறை கழிக்க வேண்டும்..

அப்போது 3 ஆவது உறுப்பு 4 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகையும் 35 ஆகுமல்லவா?



இதைப்போன்று 1 ஆவது உறுப்பையும் 6 ஆவது உறுப்பையும் கூட்டினால்?



இதைப் போன்று 4 ஆவது உறுப்பு, 8 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 45 எனக் கூறினால், வேறு எந்தெந்த தொகைகளைக் கணக்கிடலாம்?

- 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து ஓர் இடம் முன்பும் 8 ஆவது உறுப்பிலிருந்து ஓர் இடம் பின்பும் நகர்ந்து, 5 ஆவது உறுப்பு 7 ஆவது உறுப்பு, ஆகியவற்றைக் கூட்டினால் 45 கிடைக்கும்.

- 4 ஆவது உறுப்பிலிருந்து ஓர் இடம் பின்னாலும் 8 ஆவது உறுப்பிலிருந்து ஓர் இடம் முன்னாலும் நகர்ந்து, 3 ஆவது உறுப்பு, 9 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றைக் கூட்டினால் 45 கிடைக்கும்.

மேலும் எந்தெந்த இடங்களின் தொகை 45 ஆகுமா?

இடங்கள்	4, 8	5, 7	3, 9	...	...
உறுப்புகளின் தொகை	45	45	45	...	...

இதைப்போன்று 2 ஆம் இடத்தினுடையவும் 6 ஆம் இடத்தினுடையவும் உறுப்புகளின் தொகை 30 எனக் கூறினால் வேறு எந்தெந்த இடங்களின் தொகை 30 ஆகும் எனக் கூறலாம்?

இந்தக் கணக்குகளைக் குறித்துப் பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் ஓர் இடத்தைக் கூட்டவும், வேறொரு இடத்தை அதே அளவு கழிக்கவும் செய்தால் இந்த இடங்களின் உறுப்புகளின் தொகை மாறுவதில்லை.

ஓர் எண்ணைக் கூட்டவும், அதே எண்ணைக் கழிக்கவும் செய்தால், தொகை மாறவில்லை அல்லவா; மாறாக ஒரு ஜோடி எண்களின் தொகை வேறொரு ஜோடி எண்களின் தொகைக்குச் சமம் எனில், ஓர் எண் கூடவும் மற்றொறு எண் அதே அளவு குறையவும் செய்துள்ளது.

அப்போது மேலே கூறிய கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் ஏதாவது இரண்டு இடங்களின் தொகை, வேறு இரண்டு இடங்களின் தொகைகளுக்குச் சமமெனில், இந்த ஜோடி இடங்களின் உறுப்புகளின் தொகையும் சமமாகும்.

அப்போது ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் 4 உறுப்புகளின் தொகை 100 எனக் கூறினால், தொடரைக் குறித்து வேறு ஏதாவது கூற இயலுமா?

முதல் 4 உறுப்புகளை ஒரே தொகை கிடைக்கும் இரண்டு ஜோடிகளாக்கலாம் அல்லவா.

- 1 ஆவது உறுப்பும் 4 ஆவது உறுப்பும்.
- 2 ஆவது உறுப்பும் 3 ஆவது உறுப்பும்.

இந்த நான்கு உறுப்புகளின் தொகை 100 ஆனதால் இந்த ஒவ்வொரு ஜோடியினுடையவும் தொகை 50 ஆக வேண்டும்; அதாவது,

- 1 ஆவது உறுப்பு, 4 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 50.
- 2 ஆவது உறுப்பு, 3 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 50.

இந்தக் கணக்கில் 1 ஆவது உறுப்பு 10 எனவும் கூறினால்?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

- 4 ஆவது உறுப்பு $50 - 10 = 40$.
- 1 ஆவது உறுப்பு 10 உம், 4 ஆவது உறுப்பு 40 உம் ஆனதால், பொதுவித்தியாசத்தின் 3 மடங்கு $40 - 10 = 30$.
- பொதுவித்தியாசம் $30 \div 3 = 10$.
- தொடரின் முதல் நான்கு உறுப்புக்கள் 10, 20, 30, 40.

(1) முதல் 4 உறுப்புகளின் தொகை 100 ஆன நான்கு கூட்டுத் தொடர்களை எழுதவும்.

(2) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 1 ஆவது உறுப்பு 5 உம்; முதல் 6 உறுப்புகளின் தொகை 105 உம் ஆகும் எனில்; தொடரின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் கணக்கிடவும்

(3) ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 7 ஆவது உறுப்பு, 8 ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றின் தொகை 50 எனில் முதல் 14 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடவும்.

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டுத் தொடரினுடையவும் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதவும்.

(i) முதல் உறுப்பு 30; முதல் மூன்று உறுப்புகளின் தொகை 300.

(ii) முதல் உறுப்பு 30; முதல் நான்கு உறுப்புகளின் தொகை 300.

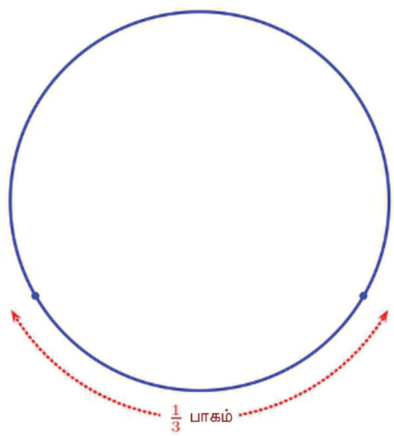
(iii) முதல் உறுப்பு 30; முதல் ஐந்து உறுப்புகளின் தொகை 300.

(iv) முதல் உறுப்பு 30; முதல் ஆறு உறுப்புகளின் தொகை 300.

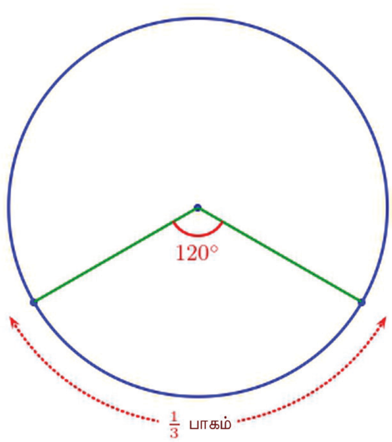
2 வட்டங்களும் கோணங்களும்

வட்டப்பகுதிகள்

ஒரு வளையத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகத்தை வெட்டி எடுப்பது எவ்வாறு ?

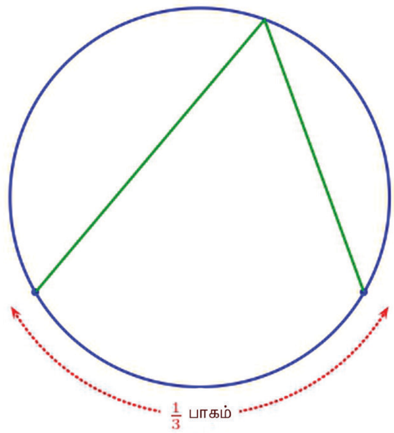


ஒன்பதாம் வகுப்பில் **வட்டப்பகுதிகள்** என்ற பாடத்தில் **நீளமும் கோணமும்** என்ற பகுதியில் பார்த்ததைப்போல, இத்தகைய ஒரு வில்லின் மையக்கோணம் $360° \times \frac{1}{3} = 120°$ ஆக இருக்க வேண்டுமல்லவா.

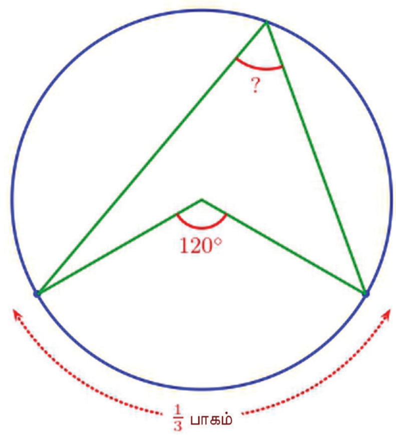


அப்போது முதலில், எட்டாம் வகுப்பில் **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் **நாண்கள்** என்ற பகுதியில் கற்ற ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தி, வட்டத்தின் மையம் அடையாளப்படுத்தவும்; மையத்தில் $120°$ கோணம் வரைந்து, $\frac{1}{3}$ பாகம் நீளமுள்ள வில்லை அடையாளப்படுத்தவும்.

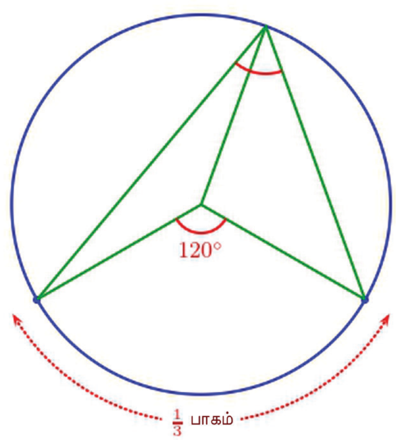
மையத்தை அடையாளப்படுத்தாமல், நேரடியாக இந்த வில்லை அடையாளப்படுத்த முடியுமா? அதாவது, வட்டத்திலேயே ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு கோடுகள் வரைந்து, இந்த வில்லை அடையாளப்படுத்த ஏதேனும் வழி உள்ளதா?



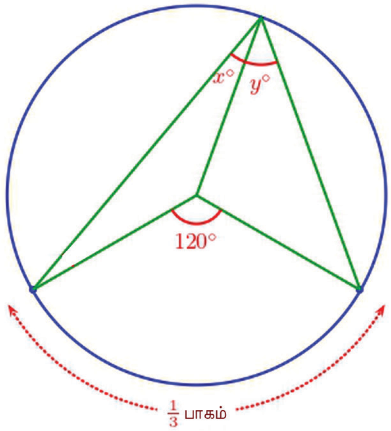
வினாவைச் சற்றுகூட தெளிவாக்கலாம். மேலே காணப்படும் படத்தில் கோணம் எவ்வளவாக எடுத்தால், மையக்கோணம் $120°$ ஆகும் ?

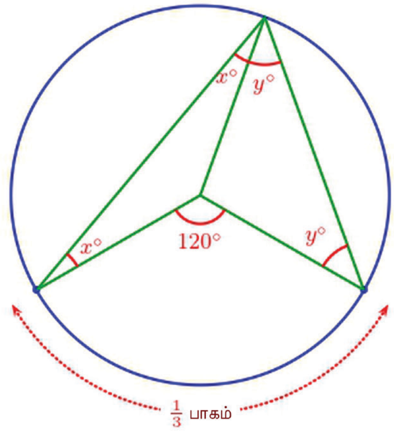


இதனைக் கணக்கிடுவதற்கு, இந்தக் கோணத்தின் உச்சியையும் வட்ட மையத்தையும் இணைத்து, இந்தக் கோணத்தை இரண்டு பாகங்கள் ஆக்கலாம்:

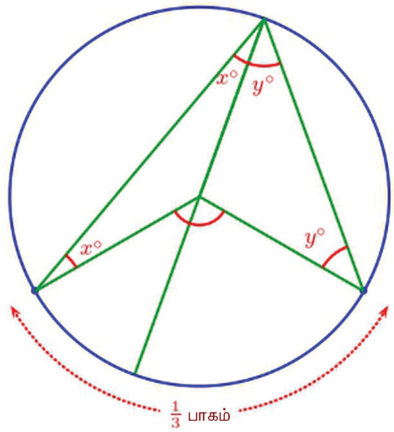


இப்போது, படத்தில் இரண்டு முக்கோணங்கள் உள்ளதல்லவா. இரண்டிலும் ஒரு ஜோடி பக்கங்கள், வட்டத்தின் ஆரங்கள் ஆனதால் அவற்றிற்கு ஒரே நீளமாகும்; அதாவது இவை இரண்டும் இருசமபக்க முக்கோணங்களாகும். அப்போது மேலேயுள்ள கோணத்தின் பாகங்கள் $x°$, $y°$ என எடுத்தால், முக்கோணங்களின் கீழேயுள்ள கோணங்களும் இவையே.

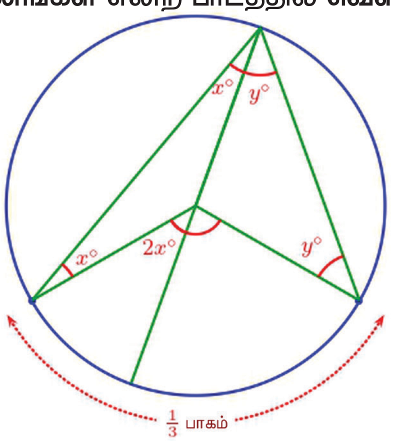


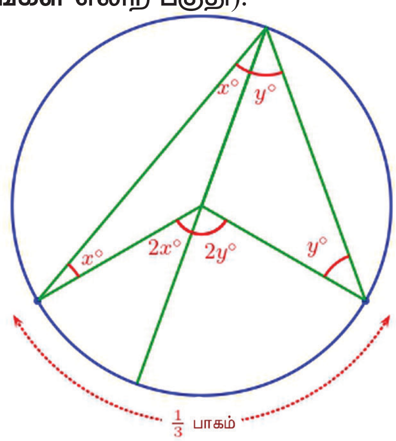


இனி முக்கோணங்களின் பொதுவான பக்கத்தை நீட்டி வரைந்தால், மையக்கோணமும் இரண்டு பாகங்களாகும்:



மையக்கோணத்தின் இந்தப் பாகங்கள், இடது மற்றும் வலது பக்கங்களில் உள்ள இருசமபக்க முக்கோணங்களின் மூன்றாவது உச்சியின் வெளிக்கோணங்களாகும்; எனவே, இவை மற்ற இரண்டு உச்சிகளின் உட்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை ஆகும். (எட்டாம் வகுப்பில் **பலகோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **வெளிக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி).





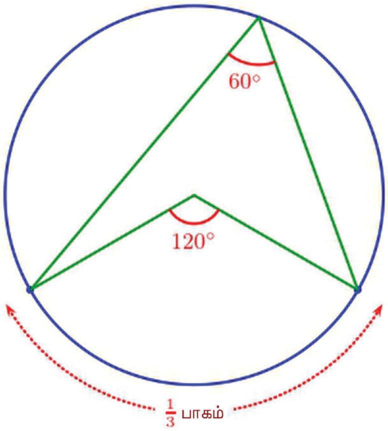
மையக்கோணம் 120° ஆனதால்

$$2x + 2y = 120$$

எனவும், இதிலிருந்து

$$x + y = 60$$

எனவும் காணலாமல்லவா. அதாவது, வில்லின் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியில் உருவாக்கும் கோணம் 60°.



a என்ற ஒரு Angle Slider ஐ உருவாக்கவும். A என்ற ஒரு புள்ளியை மையமாகக்கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Angle With Given Size tool ஐப் பயன்படுத்தி B லும் அதைத் தொடர்ந்து வட்ட மையத்திலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கின்ற சாளரத்தில் கோண அளவாக 'a' எனக் அளிக்கவும். வட்டத்தில் ஒரு புதிய புள்ளி B′ கிடைக்கும். BA, AB′ என்ற கோடுகள் வரைந்து மையக் கோணத்தை அடையாளப்படுத்தவும். மையக்கோணம் 180° ஐவிடக் குறைவா கும்விதம் ஒழுங்குப்படுத்தவும். வட்டத்திலுள்ள பெரிய வில்லில் C என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி BC, B′C என்ற கோடுகள் வரைந்து ∠C யை அடையாளப்படுத்தவும். ∠A, ∠C இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? C இன் இடத்தை மாற்றிப்பார்க்கவும். சிலைடர் பயன்படுத்தி ∠A மாற்றிப் பார்க்கவும்.

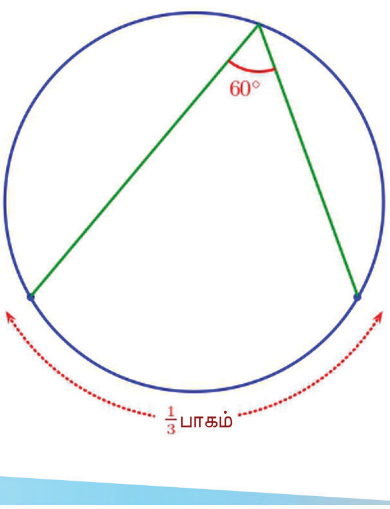
இங்கே பார்த்தது என்ன ?

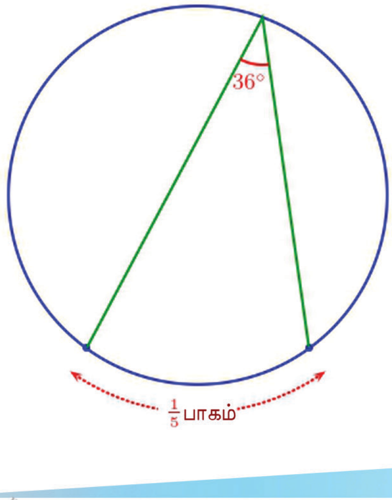
வட்டத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகத்தை அடையாளப்படுத்த, மையத்தில் 120° அடையாளப்படுத்து வதற்குப் பதிலாக, வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் 60°அடையாளப்படுத்தினால் போதும்.

இதேபோல், ஒரு வட்டத்தின் $\frac{1}{5}$ பாகம் அடையாளப்படுத்த, வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் வரைய வேண்டிய கோணத்தின் அளவு எவ்வளவு எனக் கணக்கிடவும்.

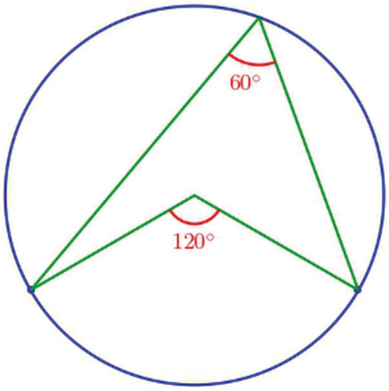
வில்லும் கோணமும்

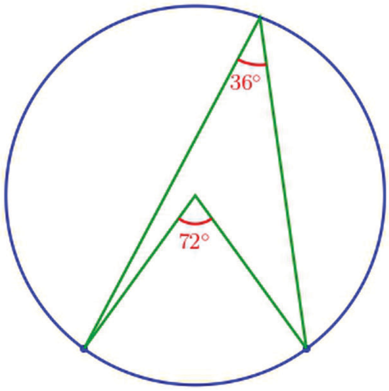
வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் 60° ஐ அடையாளப்படுத்தினால் வட்டத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகமான வில் கிடைக்கும் எனவும், 36° ஐ அடையாளப்படுத்தினால் வட்டத்தின் $\frac{1}{5}$ பாகமான வில் கிடைக்கும் எனவும் பார்த்தோமல்லவா.





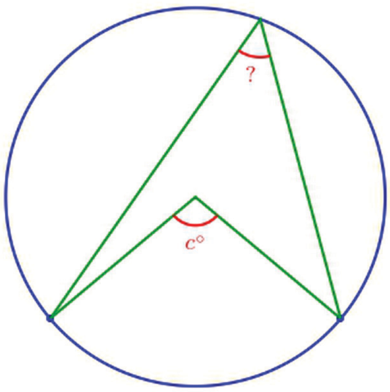
இந்தக் கருத்துகளை, வட்டத்தின் பாகங்களுக்குப் பதிலாக, விற்களின் மையக் கோணங்களைப் பயன்படுத்தியும் கூறலாம்..





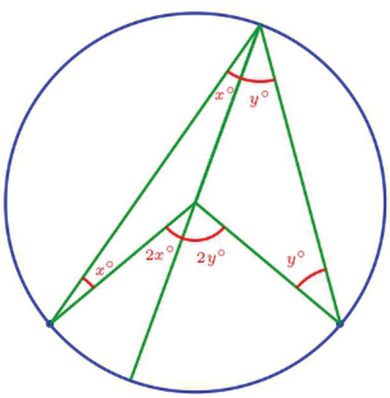
அப்போது ஒரு வினா: வட்டத்தில் ஏதேனும் வில்லின் முனைகளை, வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால், மையக்கோணத்தின் பாதி கிடைக்குமா?

வில்லின் மையக்கோணம் $c°$ என எடுக்கலாம்.



முன்னர் பார்த்ததுபோல, மையப்புள்ளியையும் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியையும் இணைக்கின்ற கோடு மேலேயுள்ள கோணத்தை வெட்டி கிடைக்கும் பாகங்களை $x°$, $y°$ என எடுக்கலாம்.

இந்தக் கோட்டை நீட்டி வரைந்து கோணங்களை இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாமல்லவா?



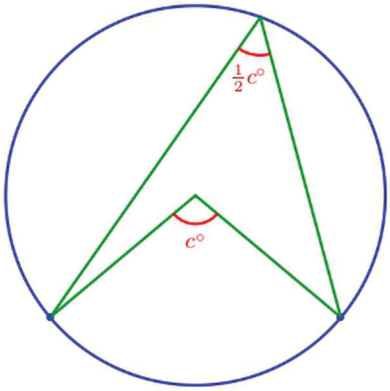
மையக்கோணம் $c°$ என்றல்லவா எடுக்கப்பட்டது. அப்போது,

$$2x + 2y = c$$

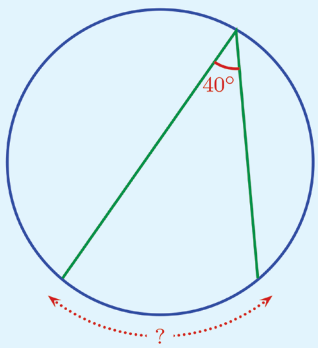
என்றும் இதிலிருந்து

$$x + y = \frac{1}{2}c$$

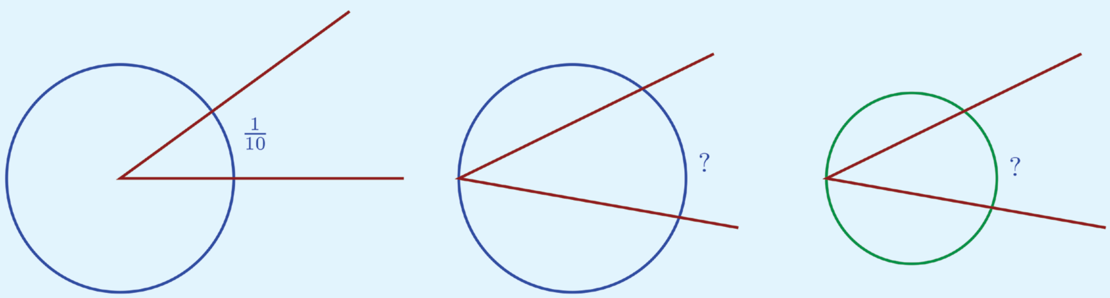
என்றும் காணலாம்.



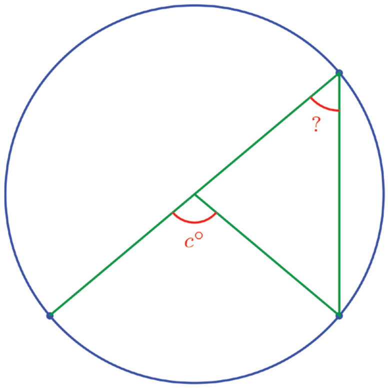
(1) படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள வில் வட்டத்தின் எத்தனை பாகமாகும் ?



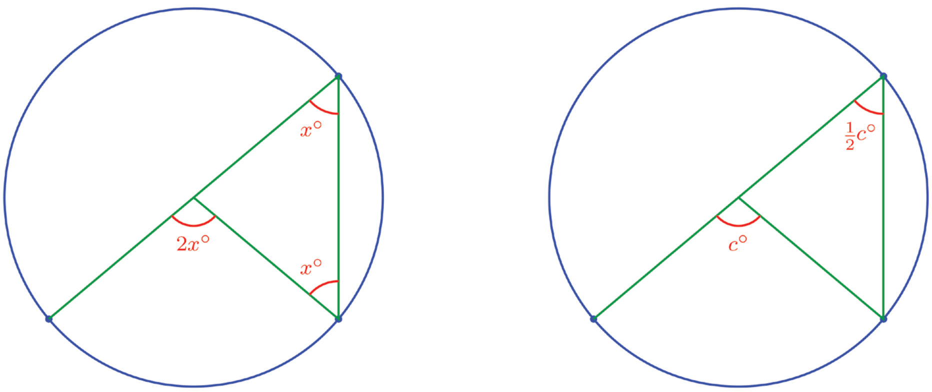
(2) ஒரு கம்பியை இரண்டாக மடக்கி, அதன் உச்சியை ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் வைத்தபோது, வட்டத்தின் $\frac{1}{10}$ பாகம் அதனுள் காணப்பட்டது. இதே கம்பியின் உச்சியை, வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சேர்த்து வைத்தால் வட்டத்தின் எத்தனை பாகம் அதனுள் காணப்படும் ? வேறு ஏதேனும் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் சேர்த்து வைத்தால்?



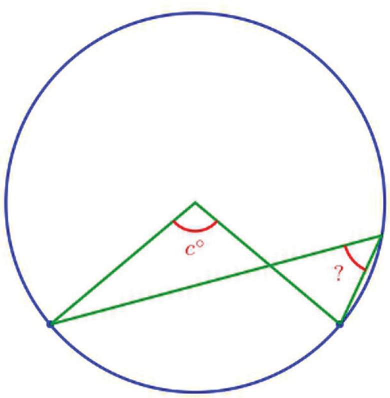
அப்போது வேறொரு வினா: வில்லின் முனைப் புள்ளிகள் வட்டத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியுடன் இணைத்தாலும் பாதிக்கோணம் கிடைக்குமா? படம் பின்வருமாறு ஆனால்?



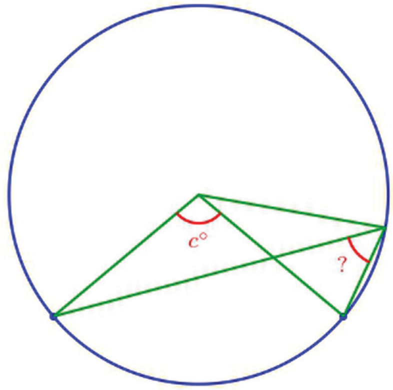
இதில் வட்டத்திலுள்ள புள்ளி, வில்லின் ஒரு முனைப்புள்ளி வழியாக வரைகின்ற விட்டம் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி ஆகும். அப்போது இந்தப் புள்ளியில் வில் உருவாக்கும் கோணம் $x°$ என்றெடுத்தால், பிற கோணங்களை இவ்வாறு கணக்கிடலாமல்லவா.



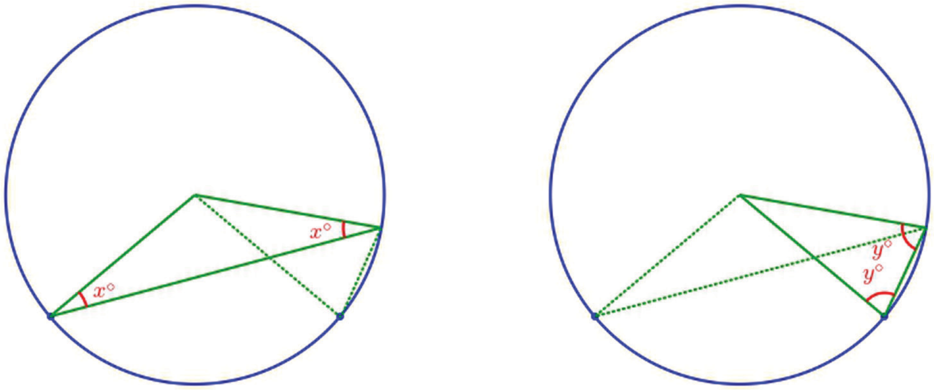
இனி வட்டத்திலுள்ள புள்ளியை மீண்டும் கீழாகப் பின்வருமாறு எடுத்தால் ?



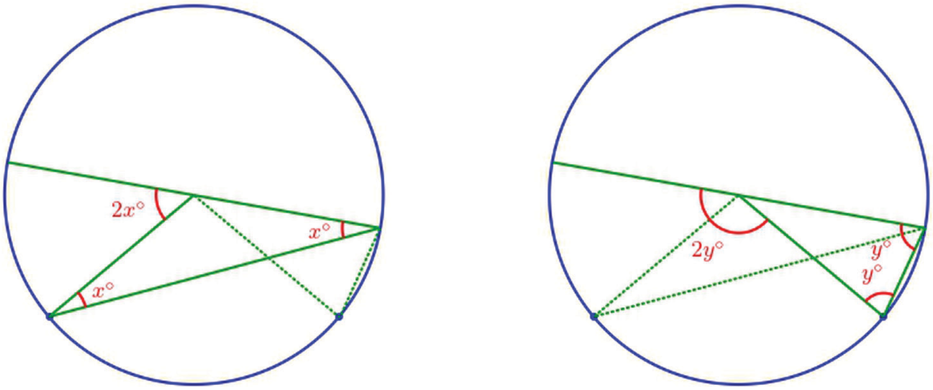
மீண்டும் இந்தப் புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைத்து வரையலாம்.



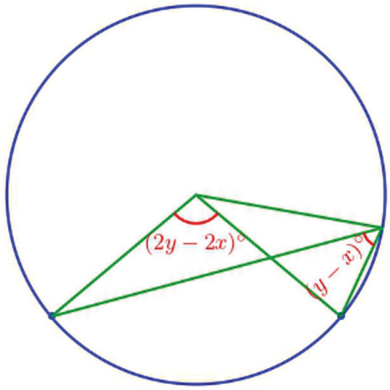
இவ்வாறு கிடைக்கும் இருசமபக்க முக்கோணங்களில் சமமான கோணங்களை $x°$, $y°$ என எடுக்கலாம்:

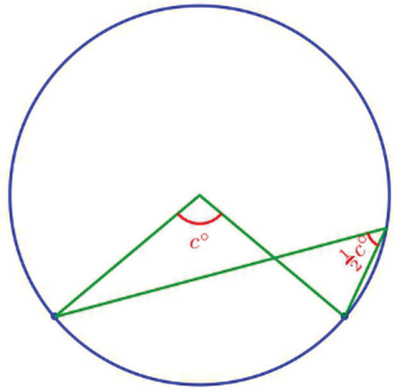


இனி முக்கோணங்களின் பொதுவான பக்கத்தை நீட்டி வரைந்து, வெளிக்கோணங்களை அடையாளப்படுத்தலாம்:

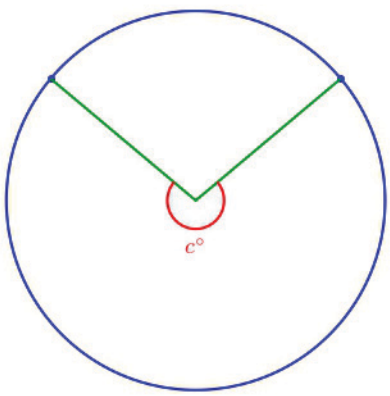


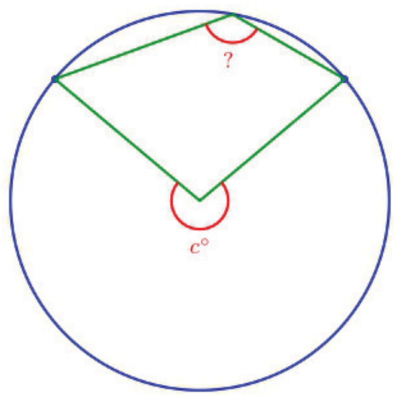
இதிலிருந்து, வில்லின் மையக்கோணத்தையும் அதன் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியில் உருவாக்குகின்ற கோணத்தையும் கணக்கிடலாமல்லவா.



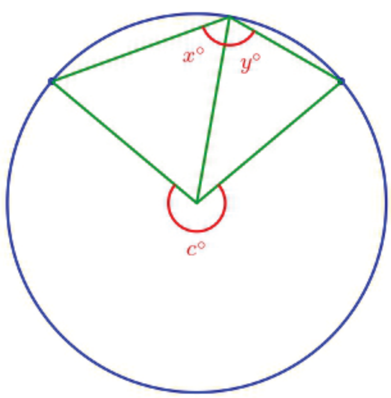


இதுவரை பயன்படுத்தியதெல்லாம், மையக்கோணம் $180°$ ஐவிடக் குறைவான விற்களாகும். மையக்கோணம் $180°$ ஐவிடக் கூடுதல் ஆனால் ?

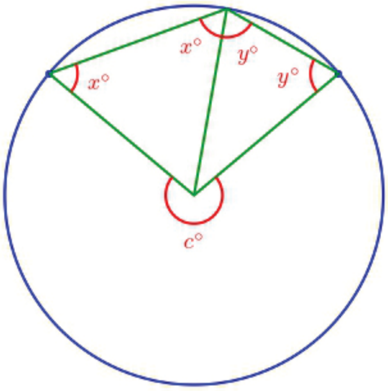




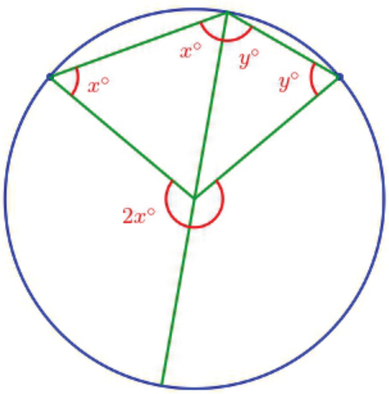
முன்பு செய்ததுபோல, மையக்கோணத்தையும் வில்லில் அல்லாத வட்டத்திலுள்ள புள்ளியையும் இணைக்கின்ற கோடு, இந்தப் புள்ளியிலுள்ள கோணத்தை வெட்டிக் கிடைக்கும் பாகங்களை $x°$, $y°$ என எடுக்கலாம்.

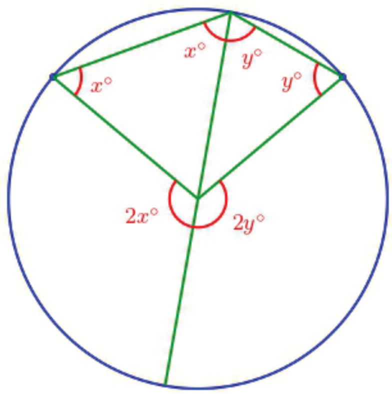


வட்டத்திலுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களும் இருசமபக்க முக்கோணங்கள் ஆனதால், இடது வலது கோணங்கள் $x°$, $y°$ ஆகும்.

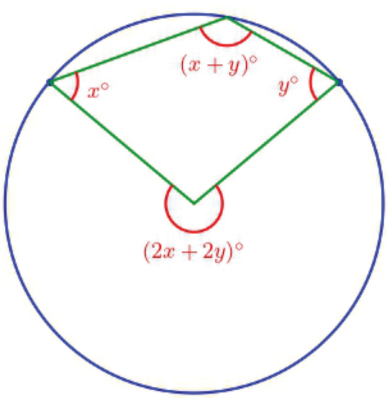


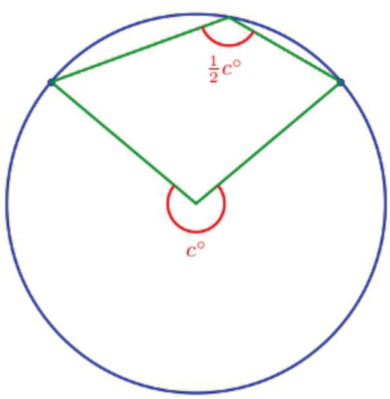
இனி நாம் முன்பு செய்ததுபோல், இந்தக் கோட்டை நீட்டி வரைந்து, மையக்கோணத்தை முக்கோணங்களின் வெளிக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.



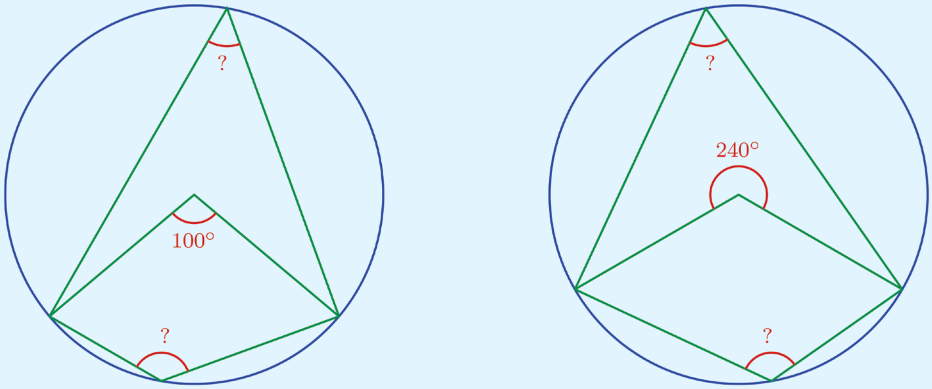


இதிலிருந்து, வில்லின் மையக்கோணத்தையும் அதன் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியில் உருவாக்குகின்ற கோணத்தையும் கணக்கிடலாமல்லவா.



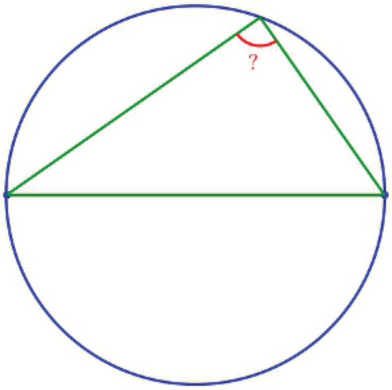


கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களில், வட்டத்திலுள்ள ஒரு வில்லின் மையக்கோணம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

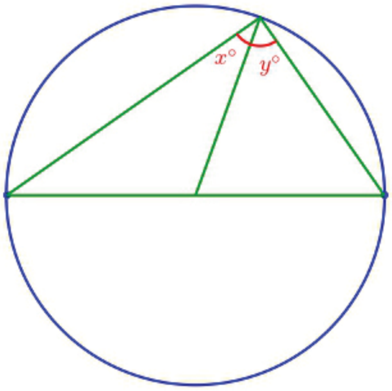


ஒவ்வொரு படத்திலும் வில், வட்டத்தின் வேறு இரண்டு புள்ளிகளில் உருவாக்குகின்ற கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

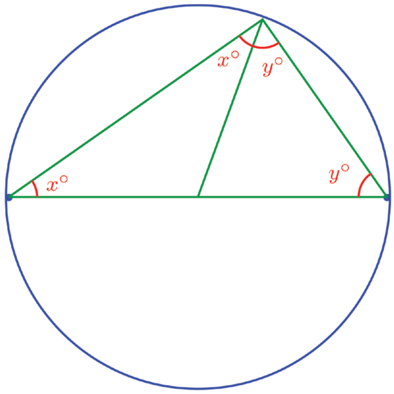
இனி வில்லின் மையக்கோணம் $180°$ ஆனால்? அதாவது, வில் அரைவட்டம் ஆனால் ?

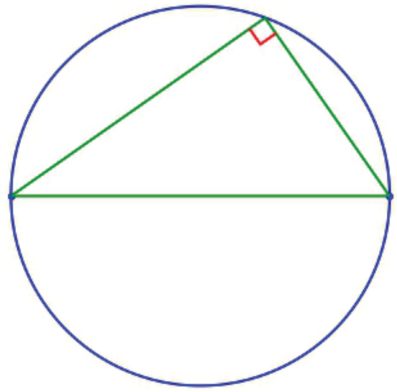


வட்டமையமும் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியும் இணைக்கின்ற கோடு, அந்தப் புள்ளியிலுள்ள கோணத்தை $x°$, $y°$ என்ற பாகங்களாக்குகின்றன என எடுக்கலாம்.



இருசமபக்க முக்கோணங்களில் கீழேயுள்ள கோணங்களும் $x°$, $y°$ இவையே ஆகும்.





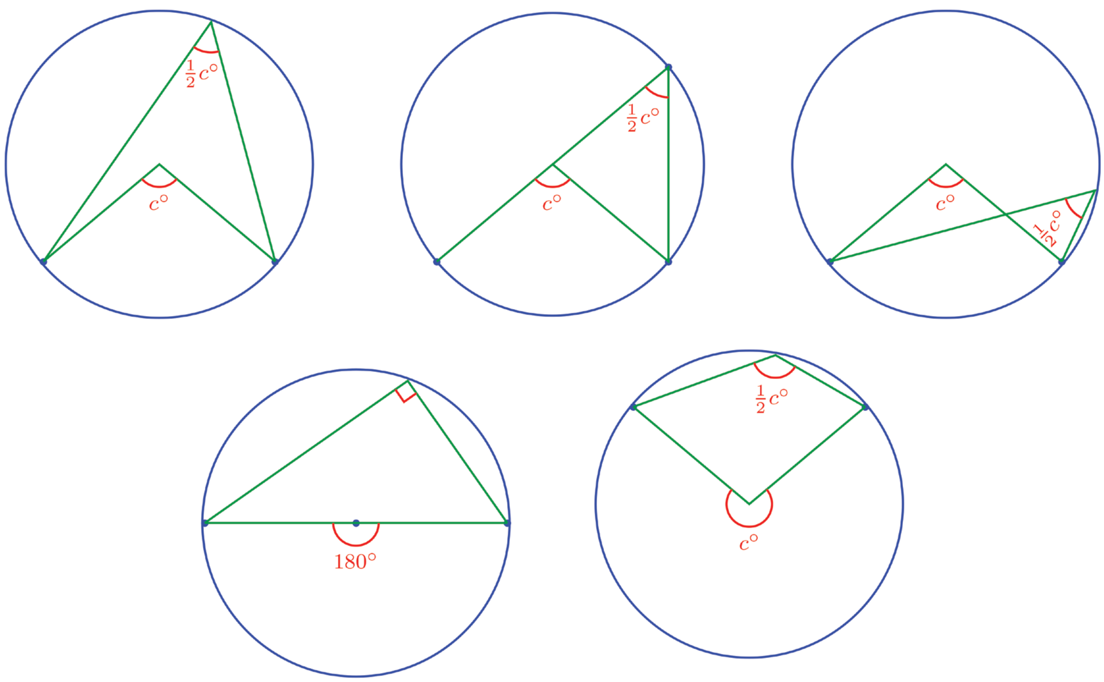
வட்டத்திற்குள்ளே பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங் களின் தொகை $180°$ ஆனதால்

$$(x + y) + x + y = 180$$

என்றும் இதிலிருந்து $x + y = 90$ என்றும் காணலாம் அல்லவா.

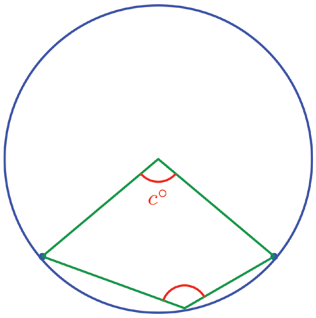
இந்தக் கணக்குகளிலெல்லாம் செய்தது என்ன?

வட்டத்தில் ஒரு வில்லின் மையக்கோணத்திற்கும், வில்லின் முனைகள் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்துக் கிடைக்கும் கோணத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கணக்கிட்டோம்:



இவற்றிலெல்லாம் வில்லின் முனைகள் இணைக்கின்ற வட்டத்திலுள்ள புள்ளி, வில்லின் வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி எனக் கவனிக்கவும்.

வில்லில் உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோணம், மையக்கோணத்தின் பாதி அல்ல என எளிதாகக் காணலாமல்லவா:



இதுவரை பார்த்ததை எல்லாம் சேர்த்துப் பொதுக் கருத்தாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

வட்டத்தில் ஒரு வில்லின் முனைகள், வட்டத்தில் அந்த வில்லில் அல்லாத, ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோணம், வில்லின் மைக்கோணத்தின் பாதியாகும்

இதில் அரைவட்டத்தின் கருத்தை குறிப்பிட்டுக் கூற வேண்டும்.

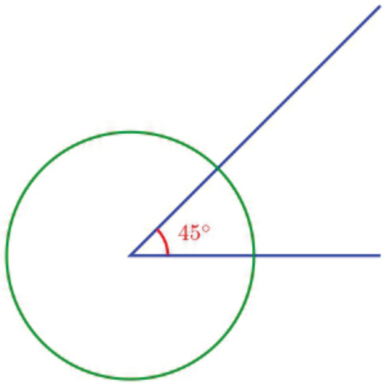
அரைவட்டத்தின் முனைகளை வட்டத்தில் வேறேதேனும் புள்ளியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோணம் செங்கோணமாகும்

இதைச் சற்று சுருக்கி, பின்வருமாறு கூறலாம்:

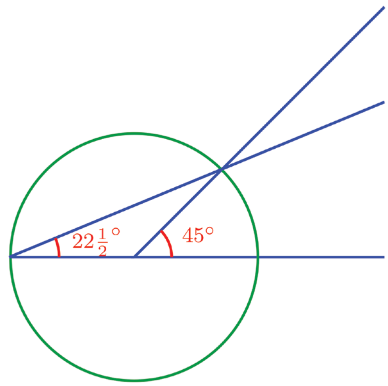
அரைவட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணமாகும்

இந்தக் கருத்துகளின் சில பயன்பாடுகளைப் பார்ப்போம்.

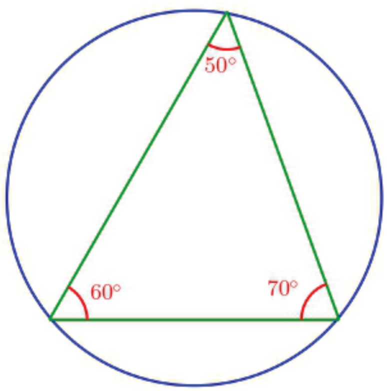
கோணங்களைப் பாதியாக்க முதலில் கூறிய கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம். பின்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்:



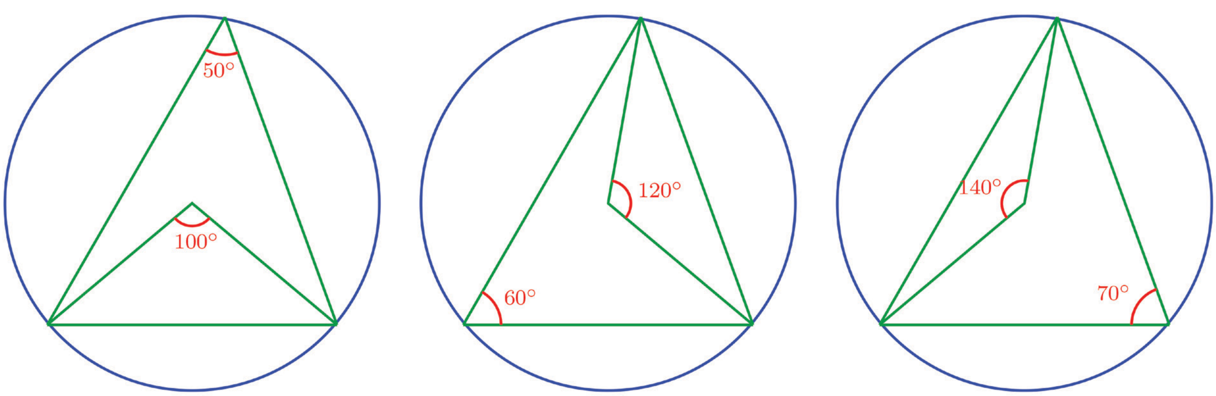
கோணத்தின் உச்சியை மையமாகக்கொண்டு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. இனி கோணத்தின் கீழே உள்ள கோட்டை நீட்டி வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியையும் கோணத்தின் மேலே உள்ள கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியையும் இணைத்தால் பாதிக் கோணம் கிடைக்கும்.



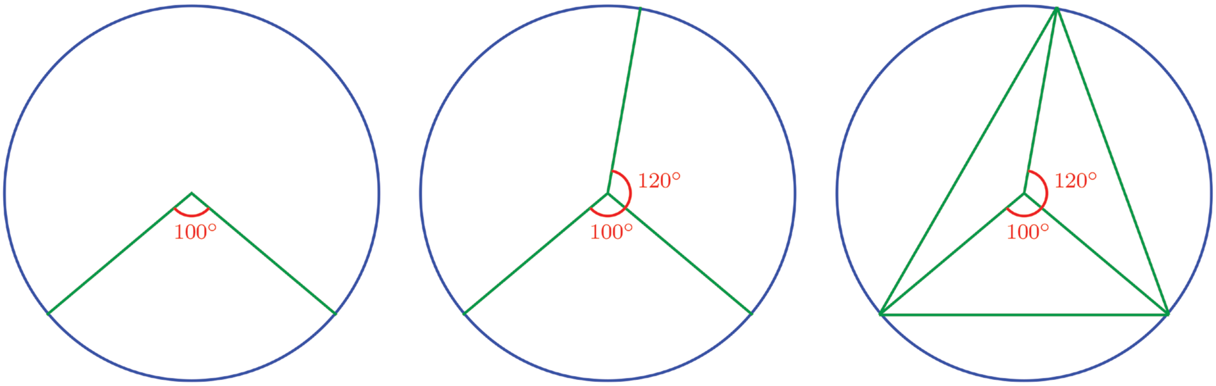
ஒரு வட்டத்திற்கு உள்ளே குறிப்பிட்ட கோணங்களுள்ள முக்கோணம் வரையவும், இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக உச்சிகள் எல்லாம் வட்டத்திலும், கோணங்கள் 50°, 60°, 70° யுமான முக்கோணத்தை எவ்வாறு வரையலாம் எனப் பார்க்கலாம்.



முக்கோணத்தின் உச்சிகள், வட்டத்தை மூன்று விற்களாகப் பிரிக்கின்றன அல்லவா. அவற்றின் மையக்கோணங்கள் எவை?

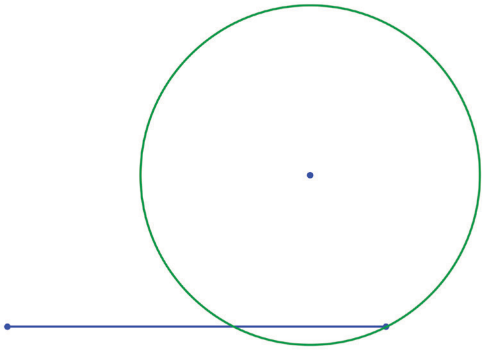


அப்போது, முக்கோணம் வரைவதற்கு, மையத்தில் இந்தக் கோணங்களில் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்கள் வரைந்தால்போதும் அல்லவா.

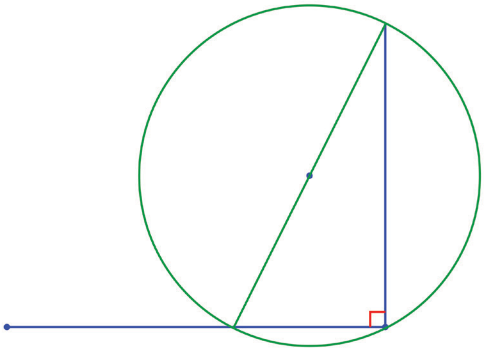


இனி அரைவட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம் என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தி, ஒரு கோட்டிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம். படத்திலுள்ள கோட்டின் வலது முனை வழியாகக் கோட்டிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும்.

அதற்கு முதலில், இந்தப் புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லுகின்றதும், கோட்டை வேறொரு புள்ளியில் வெட்டிச் செல்கின்றதுமான ஒரு வட்டம் வரைய வேண்டும்:



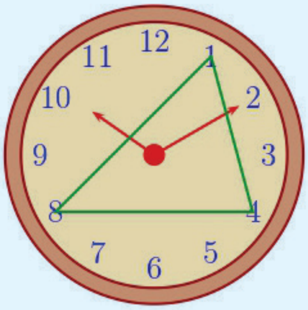
இனி இந்தப் புள்ளி வழியாக விட்டம் வரைந்து, விட்டத்தின் மறு முனையை முதலில் வரைந்த கோட்டின் முனையுடன் இணைக்கவும்:



அரைவட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம் ஆனதால், இந்தக் கோடு முதல் கோட்டிற்குச் செங்குத்து ஆகும்..

அளவுகோலும், கவராயமும் பயன்படுத்திச் செங்குத்துக்கோடுகள் வரையக் கூடிய வேறொரு முறையை எட்டாம் வகுப்பில் படித்தது நினைவிருக்கிறதா. (**இருசம வெட்டிகள்** என்ற பாடத்தில் **கோடுகளின் இருசமவெட்டிகள்** என்ற பகுதி).

(1) ஒரு கடிகாரத்தில் 1, 4, 8 என்ற எண்களை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.



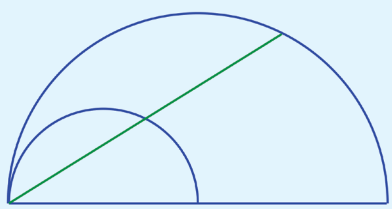
(i) இந்த முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

(ii) கடிகாரத்தின் எண்களை இணைத்து எத்தனை சமபக்க முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம் ?

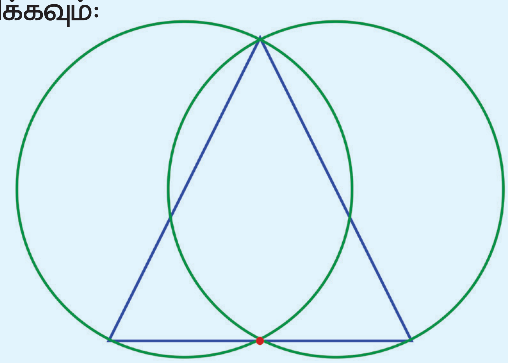
(2) சுற்றுவட்ட ஆரம் 3.5 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக.

(3) சுற்றுவட்ட ஆரம் 3 சென்டிமீட்டரும், இரண்டு கோணங்கள் $32\frac{1}{2}^{\circ}$ உம் $37\frac{1}{2}^{\circ}$ உம் உள்ள முக்கோணம் வரைக.

(4) படத்தில் ஒரு கோடு விட்டமாகப் பெரிய அரைவட்டமும், கோட்டின் பாதி விட்டமாகச் சிறிய அரைவட்டமும் வரையப்பட்டுள்ளது. இவை இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளியும் பெரிய அரைவட்டத்தில் ஏதேனும் புள்ளியும் இணைக்கும் கோட்டை, சிறிய அரை வட்டம் சமபாகம் செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

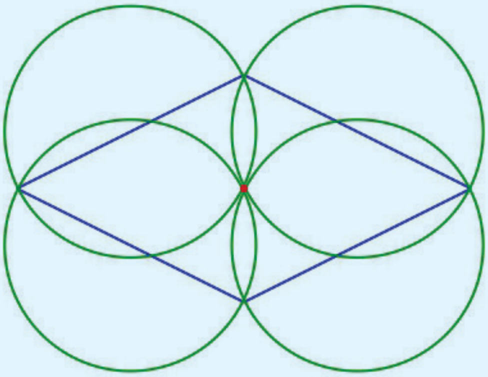


(5) ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்களை விட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டங்கள், மூன்றாவது பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் என நிரூபிக்கவும்:

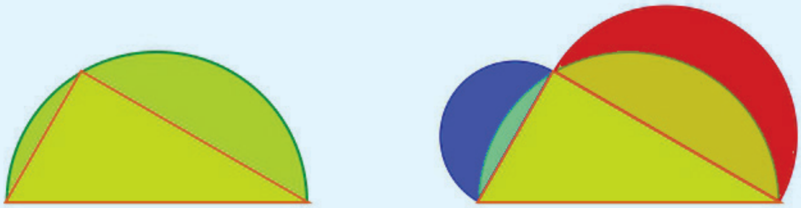


(*குறிப்பு : ஒவ்வொரு வட்டமாகப் பரிசோதிக்கவும்*).

(6) ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களும் விட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டங்களெல்லாம் பொதுவான ஒரு புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் என நிரூபிக்கவும்.



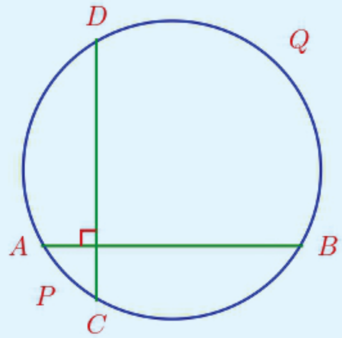
(7) ஓர் அரைவட்டத்தில் ஒரு புள்ளியும், விட்டத்தின் இரண்டு முனைகளும் சேர்த்து ஒரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. தொடர்ந்து, முக்கோணத்தின் மற்ற இரு பக்கங்களை விட்டமாகக் கொண்டு அரைவட்டங்களும் வரையப்பட்டுள்ளது.



இரண்டாவது படத்தில் நீலமும் சிவப்புமான பிறை வடிவங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கிடைக்கும் என நிருபிக்கவும்.

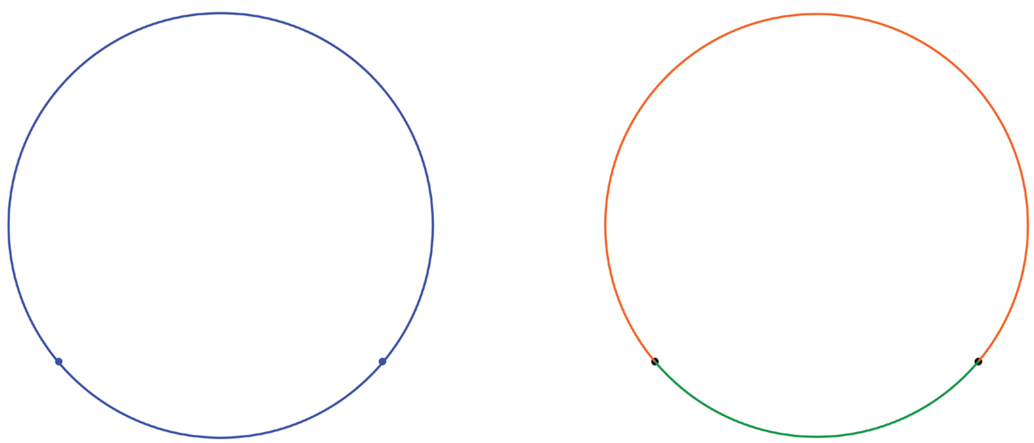
(குறிப்பு : ஒன்பதாம் வகுப்பிலுள்ள **வட்டப்பகுதிகள்** என்ற பாடத்தில் இறுதி வினாவை நினைவுகூரவும்).

(8) படத்திலுள்ள வட்டத்தில், *AB, CD* என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நாண்கள். *APC, BQD* என்ற விற்களைச் சேர்த்து வைத்தால், வட்டத்தின் பாதியாகும் என நிரூபிக்கவும்.



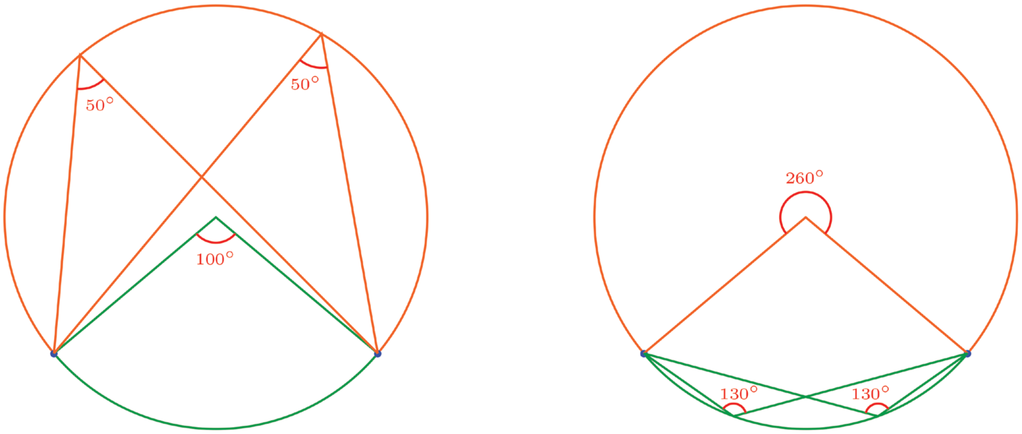
வட்டத்துண்டுகள்

வட்டத்தின் எந்த இரு புள்ளிகளும் வட்டத்தை இரண்டு விற்களாகப் பிரிக்கும் அல்லவா.



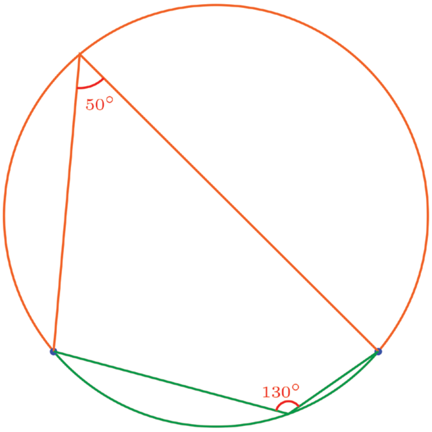
இவற்றில் ஒவ்வொரு வில்லையும் மற்ற வில்லின் **எதிர்வில் (Alternate arc)** எனக் கூறலாம். வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி, இவற்றில் ஒரு வில்லில் அல்லது அதன் எதிர்வில்லில் ஆகும். எனவே, ஒரு வில்லின் மையக்கோணத்திற்கும், அதன் முனைகளை வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை இவ்வாறு கூறலாம்:

வட்டத்தில் ஒரு வில்லின் முனைகள், அதன் எதிர்வில்லின் எந்தப் புள்ளியுடனும் இணைத்தால் கிடைக்கும் கோணம், வில்லின் மையக்கோணத்தின் பாதியாகும்.

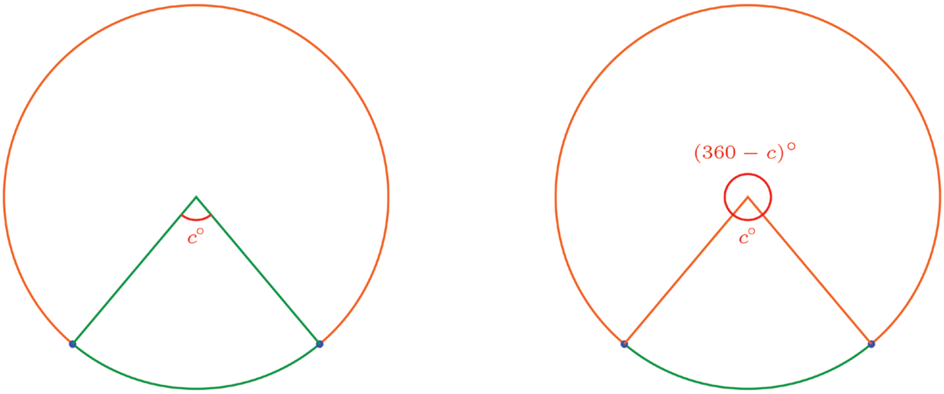


அதாவது, வட்டத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் வட்டத்தை இரண்டு விற்களாகப் பிரிக்கிறது; இந்தப் புள்ளிகளை, இந்த விற்களில் ஒரு வில்லின் புள்ளிகளுடன் இணைத்தால் உருவாகும் கோணங்களெல்லாம் சமமாகும்.

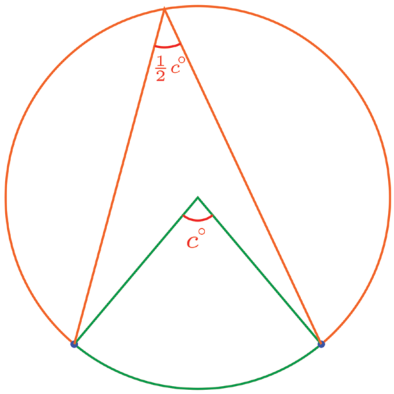
ஒரு வில்லிலும் அதன் எதிர்வில்லிலும் உள்ள புள்ளிகளுடன் இணைத்து உருவாக்கும் கோணங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

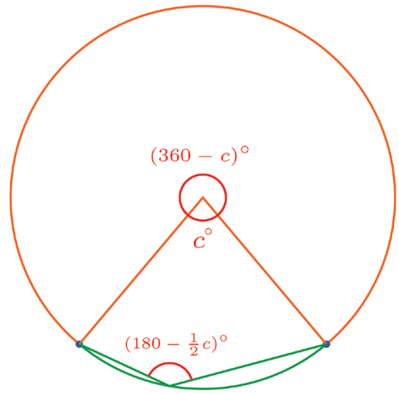


வட்டத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் உருவாக்கும் ஒரு வில் அதன் எதிர்வில் இவற்றின் மையக்கோணங்களின் தொகை $360°$ அல்லவா.



ஒரு வில்லிலும் அதன் எதிர்வில்லிலும் உள்ள புள்ளிகளில் உருவாக்கும் கோணங்கள் இவற்றின் பாதி ஆகும்.

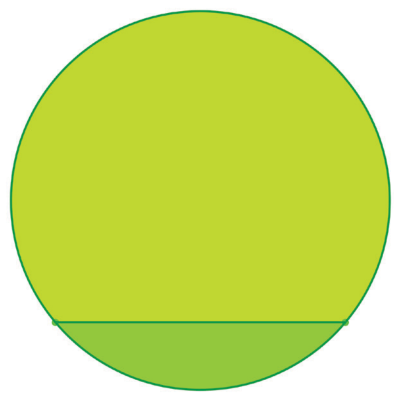




அப்போது என்ன கூறலாம் ?

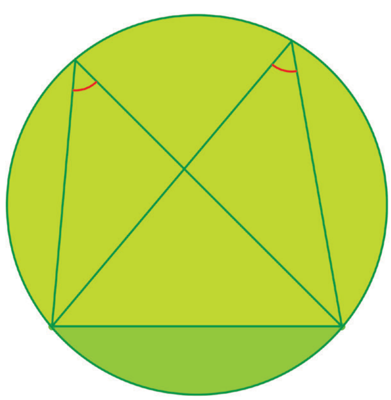
> வட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள், அவை உருவாக்குகின்ற வில்லிலும், எதிர்வில்லிலும் உருவாகும் கோணங்களின் தொகை 180° ஆகும்.

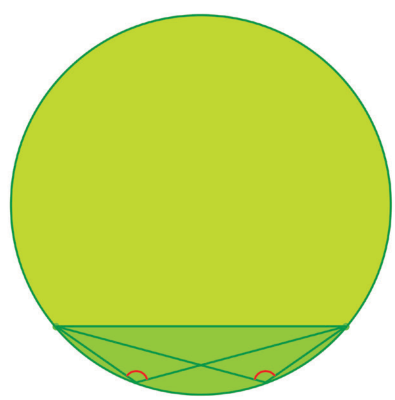
இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். வட்டத்தில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கின்ற ஒரு நாண் வட்டப்பரப்பினை இரண்டு பாகங்களாக்குமல்லவா.



இவ்வாறான வட்ட பாகங்களை **வட்டத்துண்டுகள் (Circular segment)** எனக் கூறலாம். ஒரு நாண் வெட்டிக் கிடைக்கும் இரண்டு வட்டத்துண்டுகளில் ஒன்றை மற்றொன்றின் **எதிர் துண்டு (Alternate segment)** எனவும் கூறலாம்.

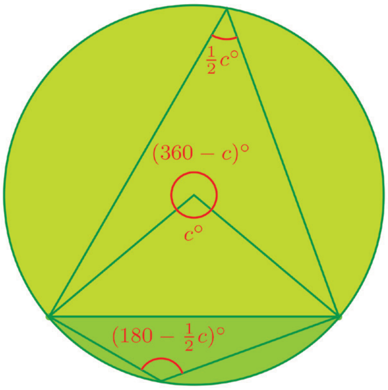
அவ்வாறு வட்டத்தின் கோணங்களைப்பற்றி விற்கள் பயன்படுத்திக் கூறியதை, வட்டத்துண்டுகள் பயன்படுத்தியும் கூறலாம்.



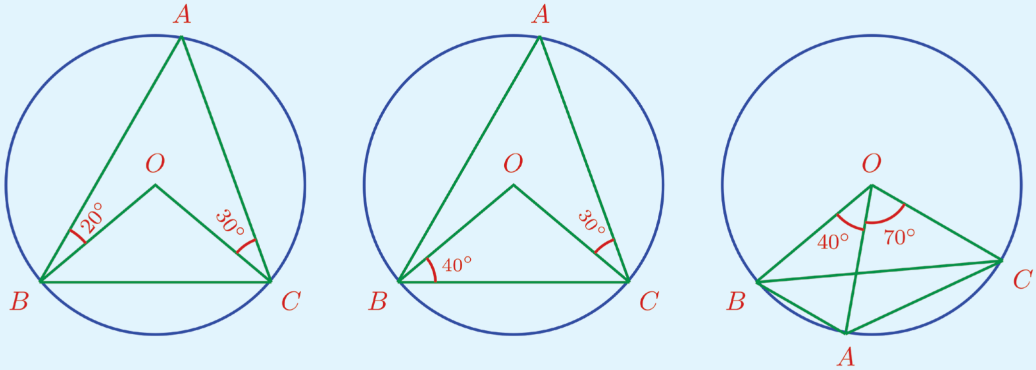


ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமமாகும். ஒரு வட்டத்துண்டிலும் அதன் எதிர் துண்டிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆகும்

வட்டத்தில் இரு புள்ளிகள் வட்டத்தைப் பிரிக்கின்ற விற்களின் மையக்கோணங்களுக்கும்; இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் நாண் வட்டப்பரப்பினைப் பிரிக்கின்ற வட்டத்துண்டுகளின் கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புகள் இவ்வாறாகும்:



(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று படங்களிலும் O வட்டமையமும் A, B, C வட்டத்தின் புள்ளிகளுமாகும். ஒவ்வொன்றிலும் ABC, OBC என்ற முக்கோணங்களின் கோணங்களையெல்லாம் கணக்கிடவும்.



(2) கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கணக்கிலும் ஒரு வட்டமும் அதில் ஒரு நாணும் வரைந்து வட்டத்தை இரு பகுதிகளாக்கவும். பகுதிகள் கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ளதுபோல் இருக்க வேண்டும்:

(i) ஒரு பகுதியிலுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் $80°$

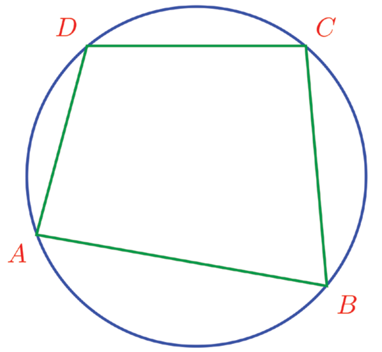
(ii) ஒரு பகுதியிலுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் $110°$

(iii) ஒரு பகுதியிலுள்ள கோணங்களெல்லாம், மறுபகுதியிலுள்ள கோணங்களின் பாதி

(iv) ஒரு பகுதியிலுள்ள கோணங்களெல்லாம் மறுபகுதியிலுள்ள கோணங்களின் ஒன்றரை மடங்கு.

வட்டமும் நாற்கரமும்

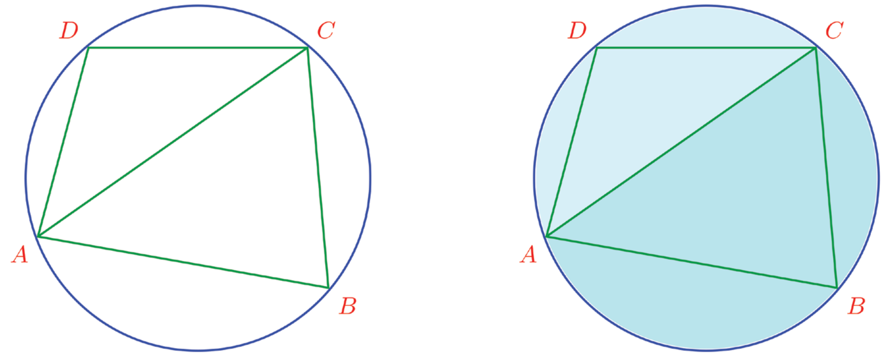
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு வட்டம் வரைக. Polygon tool ஐ பயன்படுத்தி உச்சிகள் வட்டத்தில் வரும்விதம் ஒரு நாற்கரம் வரைக. இதன் கோணங்களெல்லாம் அடையாளப்படுத்தவும் (Angle tool) ஐ பயன்படுத்தி நாற்கரத்திற்கு உள்ளே கிளிக் செய்தால்போதும்). எதிர் கோணங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன என்பதைச் சரிபார்க்கவும். நாற்கரத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப்பார்க்கவும்.

வட்டத்தின் நான்கு புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது. இந்த நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களுக்கிடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா?

கிடைக்காவிடில் AC ஐ இணைத்துப் பாருங்கள்:



இப்போது B லும் D லும் உள்ள கோணங்கள், AC என்ற நாண் வட்டத்தைப் பிரித்து உருவாக்குகின்ற இரண்டு வட்டத்துண்டுகளின் கோணங்களாகும். ஆதலால் அவற்றின் தொகை $180°$ ஆகும்.

இதுபோல, BD வரைந்தால் A யிலும் C யிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை $180°$ எனக் கிடைக்கும்.

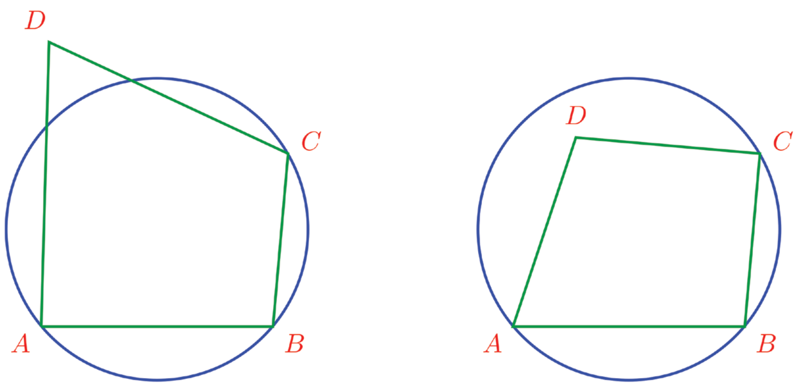
அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

ஒரு நாற்கரத்தின் அனைத்து உச்சிகளும் வட்டத்தில் எனில், அவற்றின் எதிர்கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆகும்

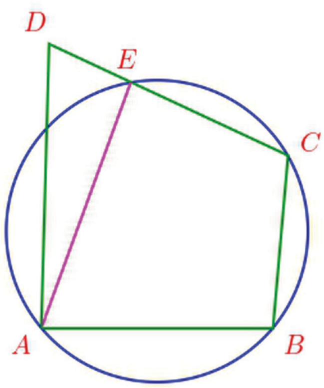
மாறாகக் கூறினால் சரியாகுமா? அதாவது ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் தொகை $180°$ எனில், அதன் நான்கு உச்சிகளின் வழியாகக் கடந்துச் செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா ?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்? எந்த நாற்கரத்தினுடையவும் மூன்று உச்சிகள் வழியாக ஒரு வட்டம் வரையலாமல்லவா? (எட்டாம் வகுப்பில் **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் **கோடுகளும் வட்டங்களும்** என்ற பகுதி).

இனி நான்காவது உச்சி சிலவேளை வட்டத்தில் ஆகலாம் அல்லது வட்டத்திற்கு உள்ளேயோ வெளியேயோ ஆகலாம். வட்டத்தில் ஆனால் அந்த உச்சியிலும் எதிர் உச்சியிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆகுமெனக் கண்டோமல்லவா.



முதல் படத்தைப் பார்க்கலாம். வட்டம் CD யை வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளியையும் A யையும் இணைத்தால் நான்கு உச்சிகளும் வட்டத்திலான ஒரு நாற்கரம் கிடைக்கும்.



இப்போது, A, B, C, E இவையெல்லாம் ஒரு வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளானதால்,

$$\angle B + \angle AEC = 180° \qquad (1)$$

இதில் $\angle AEC$ என்பது, AED என்ற முக்கோணத்தில், E இன் வெளிக்கோணமாகும். அப்போது

$$\angle AEC = \angle D + \angle EAD$$

இதிலிருந்து

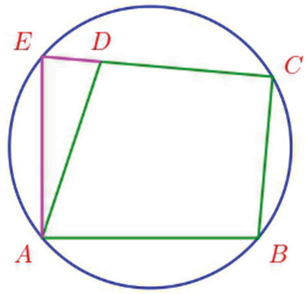
$$\angle D < \angle AEC \qquad (2)$$

என்று காணலாமல்லவா. இங்கு (1), (2) என அடையாளப்படுத்திய இயற்கணித வாக்கியங்களின் பொருளைச் சிந்தித்தால்,

$\angle B + \angle D < 180°$ எனக் காண்பது கடினமல்ல.

அப்போது நான்காவது உச்சி வட்டத்திற்கு வெளியே எனில் அந்த உச்சியிலும் எதிர் உச்சியிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை 180° ஐவிடக் குறைவாக இருக்கும்.

இனி இரண்டாவது படத்தில் CD ஐ நீட்டி, அது வட்டத்தில் வெட்டுகின்ற புள்ளியையும் A யையும் இணைக்கலாம்:



இதில்

$$\angle B + \angle E = 180^\circ \qquad (3)$$

எனக் காணலாம். மற்றும் AED என்ற முக்கோணத்திலிருந்து

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

எனக் காணலாம். அப்போது

$$\angle ADC > \angle E \qquad (4)$$

(3), (4) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\angle B + \angle ADC > 180^\circ$$

எனப் பார்க்கலாமல்லவா.

Polygon மூலம் பயன்படுத்தி ஒரு நாற்கரம் ABCD வரைக. Circle through 3 points மூலம் பயன்படுத்தி A, B, C என்ற புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்துச் செல்லும் வட்டம் வரைக. நாற்கரத்தின் கோணங்களை அடையாளப்படுத்தவும். ∠D, ∠B என்பனவற்றைக் கவனிக்கவும். D என்ற புள்ளியை மாற்றிப் பார்க்கவும். D என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்போது இந்த கோண அளவுகளுக்கு இடையேயான தொடர்பு என்ன? வட்டத்திற்கு உள்ளே இருந்தால்? வட்டத்தில் இருந்தால் ?

எனவே நான்காவது உச்சி வட்டத்திற்கு உள்ளே எனில் அந்த உச்சியிலும் எதிர் உச்சியிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை 180° ஐவிடக் கூடுதல்.

ஒரு நாற்கரத்தின் மூன்று உச்சிகளின் வழியாக வரையப்படுகின்ற வட்டத்திற்கு வெளியே நான்காவது உச்சி எனில் அந்த உச்சி, அதன் எதிர் உச்சி இவற்றின் கோணங்களின் தொகை 180° ஐ விடக் குறைவு; உள்ளே எனில், தொகை 180° ஐவிடக் கூடுதல் ஆகும்.

இனி $ABCD$ என்ற ஒரு நாற்கரத்தில் $\angle B + \angle D = 180^\circ$ எனில், A, B, C என்ற புள்ளிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைக.

D வட்டத்திற்கு வெளியே ஆகுமா ? வெளியே எனில், $\angle B, \angle D$ இவற்றின் தொகை 180° ஐ விடக்குறைவாக வேண்டுமல்லவா. அப்படியெனில் வட்டத்திற்கு வெளியே அல்ல.

D உள்ளேயா ? உள்ளே எனில், $\angle B, \angle D$ இவற்றின் தொகை 180° ஐ விடக் கூடுதலாகுமல்லவா. அப்படியெனில் வட்டத்திற்கு உள்ளேயுமல்ல.

வெளியேயும் உள்ளேயுமல்லாததினால், D வட்டத்தில்தான் உள்ளது.

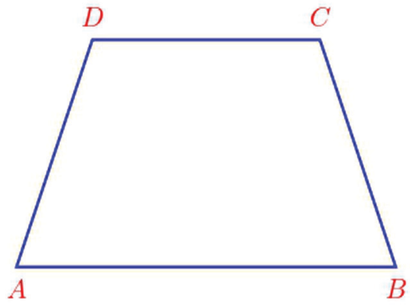
அதாவது,

ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்களின் தொகை 180° எனில், நான்கு மூலைகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையலாம்.

நான்கு உச்சிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைய இயலும் நாற்கரம் என்பதைச் சுருக்கி **வட்ட நாற்கரம் (Cyclic quadrilateral)** எனக் கூறலாம். இப்போது பார்த்ததின்படி, எதிர்கோணங்களின் தொகை $180°$ உள்ள நாற்கரங்களை வட்ட நாற்கரம் எனக் கூறலாம்.

செவ்வகங்கள் எல்லாம் வட்ட நாற்கரங்களல்லவா.

இருசமபக்க சரிவகங்கள் வட்ட நாற்கரங்கள் ஆகும் என நிரூபிக்கலாம். இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



$ABCD$ ஒரு இருசமபக்க சரிவகம். அப்போது

$$\angle A = \angle B$$

மட்டுமல்ல, AB யும் CD யும் இணையானதால்

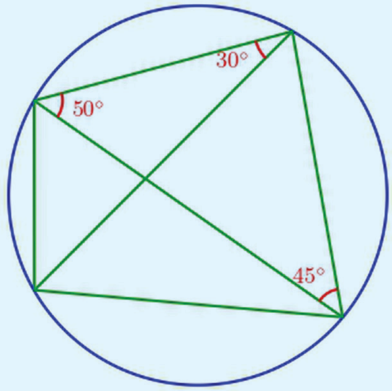
$$\angle A + \angle D = 180°$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்தும்

$$\angle B + \angle D = 180°$$

எனப் பார்க்கலாமல்லவா. அதாவது, $ABCD$ வட்ட நாற்கரமாகும்.

(1) படத்தில் நாற்கரத்தின் கோணங்களையும் மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களையும் கணக்கிடுக:

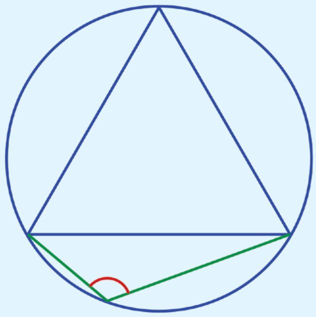


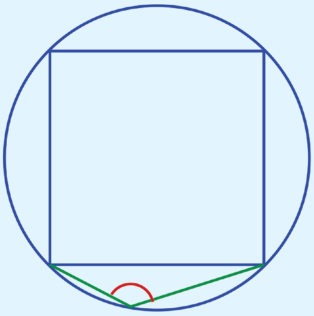
(2) ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் எந்த உச்சியிலும் உள்ள வெளிக்கோணம், எதிர் உச்சியிலுள்ள உட்கோணத்திற்குச் சமம் எனத் நிரூபிக்கவும்.

(3) செவ்வகமல்லாத இணைகரங்கள் வட்ட நாற்கரங்கள் அல்ல என நிரூபிக்கவும்.

(4) இருசமபக்க சரிவகங்கள் அல்லாத சரிவகங்கள் வட்ட நாற்கரங்கள் அல்ல என நிரூபிக்கவும்.

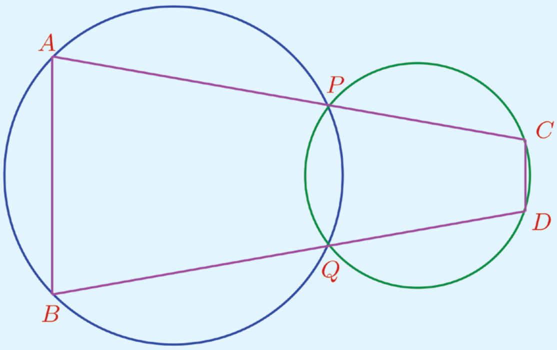
(5) கீழேயுள்ள முதல் படத்தில், உச்சிகளெல்லாம் ஒரு வட்டத்தில் ஆன சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் இரண்டு உச்சிகள் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது படத்தில் உச்சிகளெல்லாம் ஒரு வட்டத்தில் ஆன சதுரம் வரைந்து, அதன் இரு உச்சிகள் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



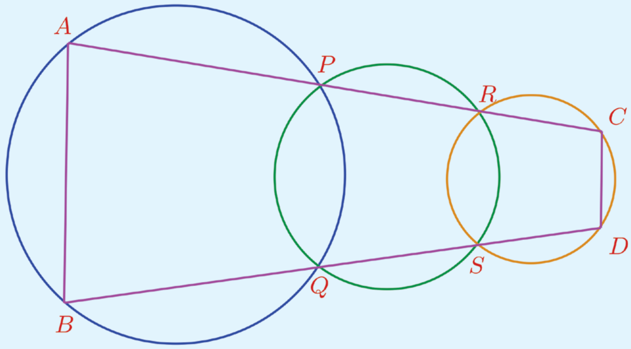


இரண்டிலும் அடையாளப்படுத்தப்பட்ட கோணத்தைக் கணக்கீடு செய்யவும்.

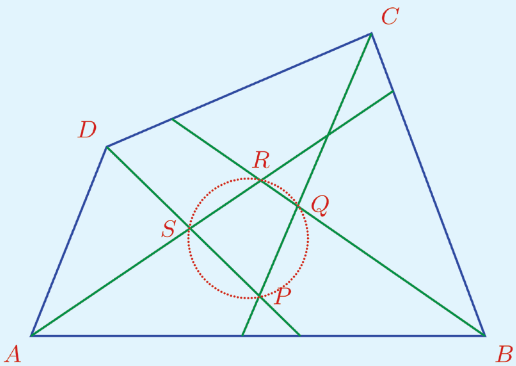
(6) (i) படத்தில் வட்டங்கள் P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்கின்றது. இந்தப் புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள இரண்டு கோடுகள் வட்டங்களுடன் A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AC, BD என்ற கோடுகள் இணையானது அல்ல. இந்தக் கோடுகள் ஒரே நீளமுடையவை எனில், $ABDC$ வட்ட நாற்கரம் என நிரூபிக்கவும்.



(ii) படத்தில் இடதுபக்க வலதுபக்க வட்டங்கள் நடுவிலுள்ள வட்டத்தை வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளிகள் *P, Q, R, S;* இவை இணைக்கின்ற கோடுகள்; இடதுபக்க வலதுபக்க வட்டங்களுடன் *A, B, C, D* என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்கிறது. *ABDC* ஒரு வட்ட நாற்கரம் என நிரூபிக்கவும்.



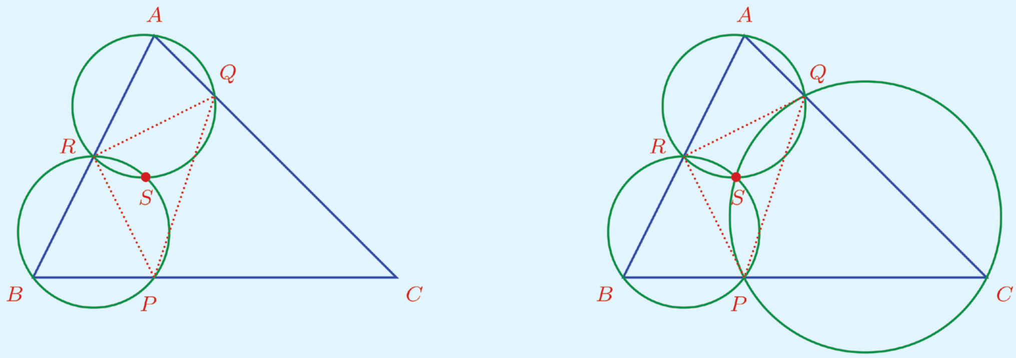
(7) படத்தில் *ABCD* என்ற நாற்கரத்தின் கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளிகள் *P, Q, R, S*



PQRS வட்ட நாற்கரம் ஆகும் என நிரூபிக்கவும்.

(குறிப்பு : *PCD* என்ற முக்கோணத்தின், *RAB* என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகையைப் பார்க்கவும்).

(8) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் படத்தில் ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் P, Q, R என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி, AQR, BRP என்ற முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன; அவை முக்கோணத்தினுள் S என்ற புள்ளியின் வழியாக வெட்டிச் செல்கின்றது.



இரண்டாவது படத்தைப்போல், CPQ என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமும் S இன் வழியாக கடந்து செல்கிறது என நிரூபிக்கவும்.

(குறிப்பு: முதல் படத்தில் PS, QS, RS இணைத்து, S இல் உருவாகும் மூன்று கோணங்களுக்கு $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ இவற்றுடன் உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்).

3 கூட்டுத்தொடரும் இயற்கணிதமும்

இயற்கணித வடிவம்

ஒரு குறிப்பிட்ட விதிமுறைக்கு ஏற்ப, எண்களை ஒன்றாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது என இவ்வாறு வரிசைப்படுத்துவதையே ஓர் எண் தொடர் எனக் கூறுகிறோம் அல்லவா; ஒரு தொடர் உருவாகுவதன் விதியைக் கூறுவது எவ்வாறு ?

எடுத்துக்காட்டாக 2, 4, 6, ... என்றிவ்வாறான இரட்டை எண்களின் தொடரை எவ்வாறு கூறலாம்? ஒவ்வொரு இடத்தையும் குறிப்பிடும் எண்ணின் இரண்டு மடங்கே அந்த இடத்தின் உறுப்பு.

இடம்	1	2	3	...
உறுப்பு	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	...

1, 3, 5, ... என்றிவ்வாறான ஒற்றை எண்களின் தொடர் ஆனால் ?

ஒவ்வொரு இடத்தையும் குறிப்பிடும் எண்ணின் இரண்டு மடங்கிலிருந்து ஒன்று கழித்ததே அந்த இடத்தின் உறுப்பு:

இடம்	1	2	3	...
உறுப்பு	$(1 \times 2) - 1 = 1$	$(2 \times 2) - 1 = 3$	$(3 \times 2) - 1 = 5$	...

இதையெல்லாம் சுருக்கிக் கூறுவதற்கு இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம் அல்லவா.

அப்போது முதல் தொடரை இவ்வாறு கூறலாம்:

n ஆவது இடத்திலுள்ள எண் $2n$

இரண்டாவது தொடர் ?

n ஆவது இடத்திலுள்ள எண் $2n - 1$

பொதுவாக ஒரு தொடரின் உறுப்புகளை எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி எழுதும்போது, உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் வித்தியாசமான எழுத்துக்களால் குறிப்பிட இயலாது அல்லவா. அதனால், ஓர் எழுத்துடன் உறுப்பின் இடத்தைக் குறிப்பிடும் எண்ணையும் சேர்த்து எழுதுவதே

வழக்கம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒன்றாவது உறுப்பு x_1, இரண்டாவது உறுப்பு x_2, மூன்றாவது உறுப்பு x_3 என்றிவ்வாறு தொடரலாம். x க்குப் பதிலாக வேறு எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தலாம். இதற்கு ஏற்ப, மேற்குறிப்பிட்டத் தொடர்களை மேலும் சுருக்கி எழுதலாம்:

2, 4, 6, ... என்றிவ்வாறான இரட்டை எண்களின் தொடர் : $x_n = 2n$

1, 3, 5, ... என்றிவ்வாறான ஒற்றை எண்களின் தொடர் : $y_n = 2n - 1$

இவ்வாறு ஒரு தொடரின் இடத்திற்கும் உறுப்பிற்கும் இடையேயான தொடர்பை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறுவதைத் தொடரின் இயற்கணித வடிவம் எனக் கூறலாம்.

மேலும் எந்தக் கூட்டுத்தொடர்களினுடையவும் இயற்கணித வடிவத்தினை எழுதுவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கூட்டுத்தொடரைப் பார்க்கவும்:

12, 23, 34, ...

இதன் அடுத்த உறுப்பு என்ன ? அதற்கு அடுத்த உறுப்பு ? இவ்வாறு ஒவ்வொன்றாகப் பார்க்காமல் எந்த இடத்திலுள்ள உறுப்பையும் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

இதன் 10 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு ?

(i) தொடரின் 1 ஆவது உறுப்பு 12

(ii) பொதுவித்தியாசம் 11

(iii) 1 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 10 ஆவது உறுப்பு வரையுள்ள இடவித்தியாசம் $10 - 1 = 9$

(iv) 10 ஆவது உறுப்பு $12 + (11 \times 9) = 111$

இவ்வாறு எந்த இடத்திலுள்ள உறுப்பையும் கணக்கிடலாம் அல்லவா ?

பொதுவாக n ஆவது இடத்திலுள்ள உறுப்பை எவ்வாறு எழுதலாம் ?

> **பொது வடிவங்கள்**
>
> 1, 3, 5, ... என்ற ஒற்றை எண்களின் இயற்கணித வடிவம் $x_n = 2n - 1$ என்று கூறலாமல்லவா. இதில் n என்பது ஒவ்வொரு உறுப்பினுடையவும் இடத்தைக் குறிப்பிடுகிறது. அப்போது $n = 1, 2, 3, ...$ என எடுத்தால் ஒன்றாவது உறுப்பு 1, இராண்டாவது உறுப்பு 3, என எல்லா ஒற்றை எண்களும் கிடைக்கும்.
>
> ஏழாம் வகுப்பில் இயற்கணிதம் என்ற பாடத்தில் ஒற்றை எண்களின் பொது வடிவம் $2n + 1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. இங்கு n என்பது, ஒற்றை எண்ணை 2 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் வகுத்தற்பலன் ஆகும்.
>
> அப்போது $n = 0, 1, 2, ...$ என்றிவ்வாறு எடுத்தால், 2 ஆல் வகுக்கும்போது
>
> வகுத்தற்பலன் 0 உம் மீதி 1 உம் ஆன 1, வகுத்தற்பலன் 1 உம் மீதி 1 உம் ஆன 3, என்றிவ்வாறு எல்லா ஒற்றை எண்களும் கிடைக்கும்.

(i) 1 ஆவது உறுப்பிலிருந்து n ஆவது உறுப்புவரையுள்ள இடவித்தியாசம் $n - 1$

(ii) n ஆவது உறுப்பு $12 + 11(n - 1)$

இதிலுள்ள $11(n - 1)$ என்பதனைச் சற்று மாற்றி எழுதலாம்:

$$11(n - 1) = 11n - 11$$

அப்போது,

$$12 + 11(n - 1) = 12 + (11n - 11) = 11n + 1$$

அதாவது, இந்தத் தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 11n + 1$$

இதில் n ஆக 1, 2, 3, ... என்ற எண்களை எடுத்தால் $x_1, x_2, x_3, ...$ ஆக அந்தந்த இடங்களிலுள்ள உறுப்புகள் கிடைக்கும்:

$$x_1 = (11 \times 1) + 1 = 12$$

$$x_2 = (11 \times 2) + 1 = 23$$

$$x_3 = (11 \times 3) + 1 = 34$$

....

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம். $\frac{1}{4}$ இல் தொடங்கி, $\frac{1}{2}$ வீதம் கூடுகின்ற கூட்டுத்தொடர்

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, \ldots$$

இதன் n ஆவது உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ?

(i) 1 ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{4}$

(ii) பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{2}$

(iii) 1 ஆவது உறுப்பிலிருந்து n ஆவது உறுப்பு வரையுள்ள இடவித்தியாசம் $n - 1$

(iv) n ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

முதல் எடுத்துக்காட்டில் n ஆவது உறுப்பு, n ஐ 11 ஆல் பெருக்கி 1 கூட்டியதாகும்;
இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் n ஆவது உறுப்பு, n ஐ $\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்கி $\frac{1}{4}$ கழித்ததாகும்; அதாவது $-\frac{1}{4}$ கூட்டியதாகும்.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் n ஆவது உறுப்பு, n ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டியதல்லவா?

பொதுவாக ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதலாவது உறுப்பு f எனவும், பொதுவித்தியாசம் d எனவும் எடுக்கலாம். n ஆவது உறுப்பு, முதலாவது உறுப்பான f உடன் $n - 1$ தடவை பொதுவித்தியாசமாகிய d கூட்டியதல்லவா;

அதாவது n ஆவது உறுப்பு

$$f + d(n-1) = dn + (f - d)$$

அதாவது n ஐ d ஆல் பெருக்கி, $f - d$ கூட்டியதே n ஆவது உறுப்பு

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும், இடமதிப்பை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டினால் அந்த இடத்தின் உறுப்பு கிடைக்கும். அதாவது, எந்தக் கூட்டுத்தொடரினுடையவும் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = an + b$$

எந்தக் கூட்டுத்தொடரினுடையவும் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = an + b$$

என்பதாகும்; இதில் a, b இவை குறிப்பிட்ட எண்களாகும்

இதில் n ஆக 1, 2, 3, ... என்றிவ்வாறு எண்ணல் எண்களை எடுத்தால் தொடரின் உறுப்புகள்

$$a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots$$

எனக் கிடைக்கும் அல்லவா: இதை வேறொரு விதமாகக் கூறலாம்.

1, 2, 3, ... என்ற எண்ணல் எண்களின் தொடரிலுள்ள உறுப்புகளையெல்லாம் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டிக் கிடைப்பதே எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் உள்ள உறுப்புகள்.

இவ்வாறு கிடைக்கும் கூட்டுத்தொடரில், எண்ணல் எண்களையெல்லாம் பெருக்குகின்ற குறிப்பிட்ட எண்ணே பொதுவித்தியாசம்.

இதைப் பயன்படுத்தி, ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவத்தினை எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{2}$ இல் தொடங்கி, தொடர்ச்சியாக $\frac{1}{3}$ ஐக் கூட்டிக் கிடைக்கும் கூட்டுத்தொடரைப் பார்க்கலாம்:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{3}$ ஆனதால், எண்ணல் எண்களையெல்லாம் $\frac{1}{3}$ ஆல் பெருக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டியதே இந்தத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகள்.

கூட்டப்பட்ட எண் எது ?

$\frac{1}{3}$ உடன் இந்த எண்ணைக் கூட்டியது அல்லவா முதல் உறுப்பு

முதல் உறுப்பாகிய $\frac{1}{2}$ கிடைப்பதற்கு, $\frac{1}{3}$ உடன் எந்த எண்ணைக் கூட்ட வேண்டும் ?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

அப்போது எண்ணல் எண்களையெல்லாம் $\frac{1}{3}$ ஆல் பெருக்கி, $\frac{1}{6}$ கூட்டியதே இந்தத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகள்;

அதாவது

$$x_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவத்தில் இருந்து தொடரைக் குறித்துப் பல தகவல்களைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மேலே கூறப்பட்டுள்ள தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2n + 1}{6}$$

என்று எழுதலாம் அல்லவா.

n எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும் $2n + 1$ ஒற்றை எண் ஆகும்; பகுதி ஓர் இரட்டை எண்ணும்; அதனால் $\frac{2n + 1}{6}$ என்ற பின்ன எண்கள் ஒன்றிலும், தொகுதி பகுதியின் மடங்கு அல்ல. அதாவது, இந்தத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் ஒன்றும் எண்ணல் எண்களல்ல.

விதிமுறைகளின் மொழி

ஒரு தொடரின் உறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமெனில், அத்தொடரின் விதி முறைகள் தெளிவாக இருக்கவேண்டும் எனப் பார்த்தோம். இந்த விதிமுறையை இயற்கணிதத்தில் குறிப்பிடுவதற்கு உரிய எடுத்துக்காட்டுகளையும் பார்த்தோம். ஆனால், சில தொடர்களின் விதிமுறைகளை இயற்கணித வடிவில் எழுத இயலாது.

எடுத்துக்காட்டாக 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... எனத் தொடர்கின்ற பகா எண்களின் தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள உறுப்பைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான இயற்கணித சொற்றொடர் இதுவரை கண்டுபிடிக்கவில்லை.

அதைப்போன்று, π இன் தசம வடிவத்தில் இருக்கும் 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... என்ற தொடரிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள உறுப்பைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய இயற்கணிதச் சொற்றொடர் எதுவுமில்லை. இத்தகைய சூழல்களில், தொடரின் விதிமுறையை எளிய மொழியில் கூறத்தான் இயலும்.

மேலும் $\frac{1}{2}$ இல் தொடங்கி $\frac{1}{4}$ வீதம் கூட்டுகின்ற கூட்டுத்தொடர் ஆனால்?

இதன் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4}$$

எனக் காணலாம் அல்லவா: இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x_n = \frac{n+1}{4}$$

இதில் n ஆக, 3, 7, 11, ... என்றெல்லாம் எடுத்தால்

$$x_3 = 1$$

$$x_7 = 2$$

$$x_{11} = 3$$

....

என்றெல்லாம் கிடைக்கும். அதாவது, எல்லா எண்ணல் எண்களும் இந்தத் தொடரின் உறுப்புகள் ஆகும்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள கூட்டுத்தொடர்களின் இயற்கணித வடிவத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) 1, 6, 11, 16, ... (ii) 2, 7, 12, 17, ... (iii) 21, 32, 43, 54, ...

(iv) 19, 28, 37, ... (v) 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, ... (vi) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

(2) சில கூட்டுத்தொடர்களின் இரண்டு இடங்களிலுள்ள உறுப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றினுடையவும் இயற்கணித வடிவத்தை எழுதவும்.

(i) 1 ஆவது உறுப்பு 5
10 ஆவது உறுப்பு 23

(ii) 1 ஆவது உறுப்பு 5
7 ஆவது உறுப்பு 23

(iii) 5 ஆவது உறுப்பு 10
10 ஆவது உறுப்பு 5

(iv) 8 ஆவது உறுப்பு 2
12 ஆவது உறுப்பு 8

(3) முதல் உறுப்பு $\frac{1}{3}$ உம், பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{6}$ உம் ஆன கூட்டுத்தொடரில் அனைத்து எண்ணல் எண்களும் உள்ளன எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(4) முதல் உறுப்பு $\frac{1}{3}$ உம், பொதுவித்தியாசம் $\frac{2}{3}$ உம் ஆன கூட்டுத்தொடரில் எல்லா ஒற்றை எண்களும் உள்ளன என்றும், இரட்டை எண் ஒன்றுகூட இல்லை எனவும் தெளிவுபடுத்தவும்.

(5) 4, 7, 10, ... என்ற கூட்டுத்தொடரில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் வர்க்கங்களும் இத்தொடரிலேயே உள்ளன எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(6) 5, 8, 11, ... என்ற கூட்டுத்தொடரில் முழுவர்க்கங்கள் ஒன்றும் இல்லை எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

இரட்டை எண்களின் தொடரிலுள்ள உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள் எல்லாம் அந்தத் தொடரிலியே இருக்கும் அல்லவா (ஏன் ?).

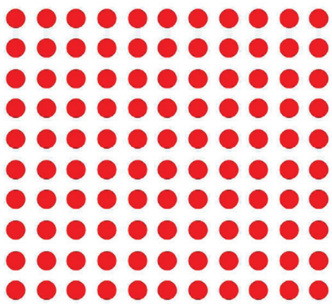
மற்ற அடுக்குகள் ?

ஒற்றை எண்களின் தொடர் ஆனால் ?

வேறு ஏதேனும் தொடரிலுள்ள, உறுப்புகளின் எல்லா அடுக்குகளும் அந்தத் தொடரின் உறுப்புகள் ஆகுமா ?

தொகைகள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

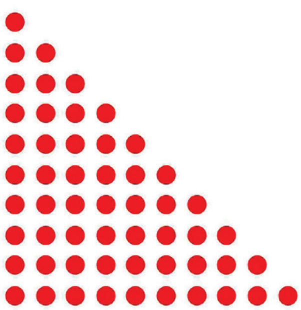


செவ்வகத்தில் மொத்தம் எத்தனை பொட்டுகள் உள்ளன ?

ஒவ்வொன்றாக எண்ண வேண்டிய தேவையில்லை அல்லவா. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 11, அவ்வாறு

$$11 \times 10 = 110$$

இந்த முக்கோணத்தில் எத்தனை பொட்டுகள் உள்ளன ?



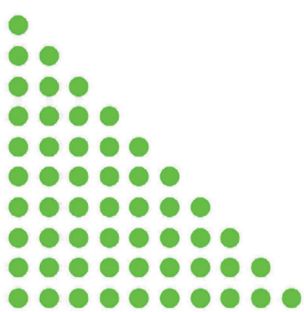
ஒவ்வொன்றாக எண்ணி எடுக்கலாம்:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

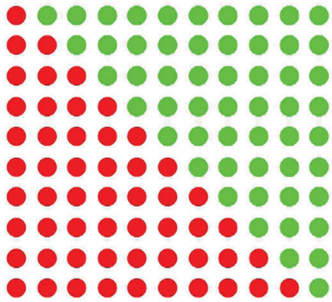
இதற்கும் ஏதேனும் எளிய வழிமுறை உள்ளதா ?

இதனைச் செவ்வகமாக்கினால் ?

அதற்கு இதைப்போன்ற வேறொரு முக்கோணம் உருவாக்கவும்:



இதைத் தலைகீழாக, முதல் முக்கோணத்துடன் இவ்வாறு சேர்த்துவைக்கவும்:



இந்தச் செவ்வகத்தில், முன்னர் பார்த்ததைப்போன்று, $11 \times 10 = 110$ பொட்டுகள் உள்ளன.

ஒரு முக்கோணத்தில் ?

110 இன் பாதி 55

படத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்ததை எண்கள் மட்டும் பயன்படுத்தியும் எழுதலாம்:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

என எடுக்கலாம். இதைத் திருப்பி எழுதினால்

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ஒரே இடத்திலுள்ள எண்களைக் கூட்டினால் ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 110$$

அப்போது

$$s = 110 \div 2 = 55$$

இதைப் போன்று 1 முதல் 100 வரையுள்ள எண்ணல் எண்களைக் கூட்டலாம் அல்லவா.

ஒரு கணிதக் கதை

கௌஸ் என்ற கணித மேதையைக் குறித்துக் கேட்டிருக்கிறோம் அல்லவா? சிறுவனாக இருக்கும்போதே கணிதத்தில் அசாதாரணத் திறனை வெளிப்படுத்தியவர். அதனைக் குறித்து ஒரு கதை உள்ளது.

கௌஸிற்கு பத்து வயது. வகுப்பில் ஆசிரியர், மாணவர்களைக் கட்டுப் படுத்துவதற்கு ஒன்று முதல் நூறு வரையுள்ள எண்களையெல்லாம் கூட்டி அதன் தொகையைக் கண்டுபிடிக்குமாறு கூறினார். சிறுவனான கௌஸ் மிக வேகமாக விடையைக் கூறினார்: 5050. இவ்வாறு விளக்கமளிக்கவும் செய்தார்: 1 உம் 100 உம் 101; அதைப்போன்று 2 உம் 99 உம் 101; இவ்வாறு 50 ஜோடிகள்

மொத்தத் தொகை

$$101 \times 50 = 5050$$

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

ஒரே இடத்திலுள்ள எண்களைக் கூட்டினால்,

$$2s = \overbrace{101 + 101 + \cdots + 101 + 101}^{100 \text{ எண்ணிக்கை}}$$

$$= 101 \times 100$$

இதிலிருந்து

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 க்குப் பதிலாக வேறு எந்த எண்ணாக இருந்தாலும், இதே முறையில் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அதாவது

ஒன்று முதல் தொடர்ச்சியான சில எண்ணல் எண்களின் தொகை கடைசி எண்ணுக்கும் அதன் அடுத்த எண்ணுக்கும் உரிய பெருக்கற்பலனின் பாதி ஆகும்.

இயற்கணித மொழியில் கூறினால்

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

இதைப் பயன்படுத்திப் பிற கூட்டுத்தொடர்களில் உள்ள உறுப்புகளின் தொகையையும் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக 2, 4, 6, ..., 100 என்றிவ்வாறுள்ள இரட்டை எண்களின் தொகையைப் பார்ப்போம்.

இந்தத் தொகையை இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots +50)$$

முன்னர் கண்டதைப்போல,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

எனக் கண்டோம் அல்லவா, அப்போது

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால், முதல் n இரட்டை எண்கள்

$$2, 4, 6, ..., 2n$$

இவற்றின் தொகை

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \times \frac{1}{2} \times n(n + 1) = n(n + 1)$$

2 இன் மடங்குகளான 2, 4, 6, ... என்ற தொடருக்குப் பதிலாக, 3 இன் மடங்குகளான 3, 6, 9, ... என்ற தொடர் ஆனால் ?

இந்தத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகள்

$$3, 6, 9, ..., 3n$$

இவற்றின் தொகை

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{3}{2}n(n + 1)$$

இதைப்போன்று 4 இன் மடங்குகள் மற்றும் 5 இன் மடங்குகளின் தொகைகளையெல்லாம் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா. செய்து பார்க்கவும்:

முதல் n ஒற்றை எண்களின் தொகையைப் பார்ப்போம்.

முதலில் ஒற்றை எண்களின் தொடரை இயற்கணித வடிவில் எழுதலாம்.

இது 1 இல் இருந்து தொடங்கி, 2 வீதம் கூட்டிக் கிடைக்கும் கூட்டுத்தொடர் அல்லவா.

அப்போது n ஆவது ஒற்றை எண்ணை x_n என எழுதினால்

$$x_n = 1 + (2 \times (n-1)) = 2n - 1$$

இதில் $n = 1, 2, 3, \ldots$ என இவ்வாறு வரிசைப்படுத்தினால், ஒற்றை எண்களின் தொடர் கிடைக்கும்.

அப்போது இந்தத் தொடரை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\begin{aligned} x_1 &= (2 \times 1) - 1 \\ x_2 &= (2 \times 2) - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (2 \times n) - 1 \end{aligned}$$

இவற்றையெல்லாம் மேலிருந்து கீழாகக் கூட்டினால்?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}^{n \text{ எண்ணிக்கை}} \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

இதில் $1 + 2 + \ldots + n$ ஐ முதலில் கணக்கிட்டோம் அல்லவா.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2}\, n(n+1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= \left(2 \times \frac{1}{2} n(n+1)\right) - n \\ &= n(n+1) - n \\ &= n^2 + n - n = n^2 \end{aligned}$$

எனக் காணலாம்.

அதாவது, 1 முதல் தொடர்ச்சியான ஒற்றை எண்களின் தொகை, எண்களின் எண்ணிக்கையின் வர்க்கம் ஆகும்.

இதைப்போன்று எந்தக் கூட்டுத்தொடரினுடையவும் தொகையைக் கணக்கிடலாம்.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரும்

$$x_n = an + b$$

என்ற வடிவத்தில் அல்லவா. இதில் முதல் n உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட, $n = 1, 2, 3, \ldots$ என எழுதி கூட்டலாம்.

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= 2a + b \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= na + b \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \cdots + b)}^{n \text{ எண்ணிக்கை}}$$

$$= a(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= \frac{1}{2}an(n+1) + nb$$

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = an + b$$

எனில், அதன் முதல் n உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}an(n+1) + nb$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$1, 4, 7, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 3n - 2$$

அப்போது 100 உறுப்புகளின் தொகை

$$3 \times \frac{1}{2} \times 100 \times 101 - (2 \times 100) = 14950$$

பொதுவாகக் கூறினால், இத்தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$3 \times \frac{1}{2}n(n+1) - 2n = 3 \times \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

கூட்டுத்தொடரின் தொகையை வேறொரு முறையிலும் கணக்கிடலாம். அதற்குத் தொகையின் இயற்கணித வடிவத்தைச் சற்று மாற்றி எழுதலாம்:

$$\frac{1}{2}an(n+1) + bn = \frac{1}{2}n(a(n+1) + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n(an + a + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n((an + b) + (a + b))$$

இதில் $an + b$ என்பது, தொடரின் n ஆவது உறுப்பான x_n உம், $a + b$ என்பது தொடரின் 1 ஆவது உறுப்பான x_1 உம் அல்லவா.

ஒரு தொடரின் உறுப்புகளின் தொகையைக் காண்பதற்கு sum என்ற கட்டளையைப் பயன்படுத்தலாம்.

L=Sequence(n^2,n,1,10) என input கட்டளை கொடுத்தால் L என்ற பெயரில் முதல் பத்து எண்களின் வர்க்கங்களின் தொடர் கிடைக்கும். sum(L) என்ற கட்டளையைக் கொடுத்தால் இந்த எண்களின் தொகை கிடைக்கும். sum(n^2,n,1,10) என்ற கட்டளையை நேரடியாகக் கொடுத்தாலும் போதுமானதாகும்.

5, 8, 11, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் தொகை கிடைப்பதற்கு sum(3n + 2,n,1,20) எனக் கொடுத்தால் போதுமானதாகும். இந்தத் தொடரின் 10 முதல் 20 வரையுள்ள எண்களின் தொகை வேண்டுமெனில் sum(3n + 2,n,10,20) எனக் கொடுக்க வேண்டும்.

அப்போது

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}n(x_1 + x_n)$$

எளிய மொழியில் கூறினால்,

ஒரு கூட்டுத்தொடரில் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளின் தொகை, முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகளின் தொகையை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கியதன் பாதி ஆகும்.

இவற்றிற்கு ஏற்ப, 1, 4, 7, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட முதலில் 100 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடவும்.

$$1 + (3 \times 99) = 298$$

இனி முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகை

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (1 + 298) = 14950$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் முதல் n உறுப்புகளின் தொகைக்குப் பொதுவான ஓர் இயற்கணித வடிவம் உள்ளது. இதைக் காண்பதற்குத் தொகையை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{1}{2}an(n + 1) + bn = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

இதில் $\frac{1}{2}a$ உம் $\frac{1}{2}a + b$ உம் தொடருடன் தொடர்புள்ள குறிப்பிட்ட எண்கள் அல்லவா. அப்போது தொகை, n^2 ஐயும் n ஐயும் குறிப்பிட்ட எண்களால் பெருக்கிக் கூட்டியது ஆகும்.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் முதல் n உறுப்புகளின் தொகையின் இயற்கணித வடிவம்

$$pn^2 + qn$$

என்பதாகும்; இதில் p, q குறிப்பிட்ட எண்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$3, 10, 17, \ldots$$

என்றக் கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$7n - 4$$

எனக் காண்பது கடினம் அல்ல. இதன் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை ?

$$\frac{1}{2} \times 7 \times n(n + 1) - 4n = \frac{1}{2}(7n^2 + 7n - 8n) = \frac{1}{2}(7n^2 - n)$$

விளக்கமாகக் கூறினால், $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$ என்ற இயற்கணித வாக்கியத்தில், $n = 1$ என எடுத்தால், நமது கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பான 3 கிடைக்கும்;

$n = 2$ என எடுத்தால், இந்தத் தொடரின் முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் தொகையான 13 உம்,

$n = 3$ என எடுத்தால் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் தொகையான 30 உம் கிடைக்கும்.

அப்போது, மாறாக ஒரு வினா:

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$3n^2 + n$$

ஆகும். தொடரைக் கண்டுபிடிக்கலாமா ?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) தொகையின் இயற்கணித வடிவத்தில் $n = 1$ என எடுத்தால் முதல் உறுப்பு கிடைக்கும்.

(ii) $(3 \times 1^2) + 1 = 4$

(iii) தொகையின் இயற்கணித வடிவத்தில் $n = 2$ என எடுத்தால் முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் தொகை கிடைக்கும்.

(iv) முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் தொகை $(3 \times 2^2) + 2 = 14$

(v) இதிலிருந்து முதல் உறுப்பைக் கழித்தால் இரண்டாவது உறுப்பு கிடைக்கும்.

(vi) இரண்டாவது உறுப்பு $14 - 4 = 10$

(vii) தொடர் 4, 10, 16, ...

(viii) இதன் இயற்கணித வடிவம் $x_n = 6n - 2$

ஒரு தொடரின் இயற்கணித வடிவம் தெரிந்தால், அதன் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடுவதற்கு பைத்தான் மொழியில் sum பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக முதல் நூறு முழுவர்க்கங்களின் தொகையைக் கணக்கிடுவதற்கு

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

என எழுதினால் போதும்

வர்க்கங்களின் தொகை

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ என்ற முற்றொருமையைப் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. இதைப்போன்று

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

என்பதும் ஒரு முற்றொருமையாகும். இதிலிருந்து, x எந்த எண்ணாயினும்

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

எனக் காணலாம். இதில், $x = 1, 2, 3, ..., n$ என எடுத்தால்

$x = 1,\quad 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$x = 2,\quad 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

....

$x = n - 1, n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

$x = n,\quad (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

இவைகளைக் கூட்டினால்

$$2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + ... + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

அதாவது, $n^3 + 3n^2 + 3n$

$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

அப்போது

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right)$$

இச்சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தைச் சுருக்கி,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

இவ்வாறு ஆக்கலாம்.

இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்.

$$4, 10, 16, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 6n - 2$$

இதில் முதல் உறுப்பு, முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் தொகை, முதல் மூன்று உறுப்புகளின் தொகை எனக் கணக்கிட்டால்,

$$4, 14, 30, \ldots$$

என்ற வேறொரு தொடர் கிடைக்குமல்லவா. அதன் இயற்கணித வடிவம்

$$y_n = 3n^2 + n$$

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள கூட்டுத் தொடர்களின் தொகைகளை மனக்கணக்காகக் கணக்கிடவும்:

(i) $51 + 52 + 53 + \cdots + 70$

(ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \cdots + 12\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \cdots + 12\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{101} + \frac{3}{101} + \frac{5}{101} + \cdots + \frac{201}{101}$

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் முதல் 25 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடவும்:

(i) 11, 22, 33, ... (ii) 12, 23, 34, ... (iii) 21, 32, 43, ... (iv) 19, 28, 37, ...

(3) ஒன்பதின் மடங்குகளான எல்லா மூன்றிலக்க எண்களின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(4) சில கூட்டுத்தொடர்களின் n ஆவது உறுப்பு கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றினுடையவும் n உறுப்புகளின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $2n + 3$ (ii) $3n + 2$ (iii) $2n - 3$ (iv) $3n - 2$

(5) சில கூட்டுத்தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தொடரினுடையவும் n ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

(i) $n^2 + 2n$ (ii) $2n^2 + n$ (iii) $n^2 - 2n$ (iv) $2n^2 - n$ (v) $n^2 - n$

(6) (i) 1 முதல் 20 வரையுள்ள எண்ணல் எண்களின் தொகையைக் கணக்கிடவும்.

(ii) எண்ணல் எண்களை 5 ஆல் பெருக்கி 1 கூட்டியத் தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடவும். முதல் n உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடவும்.

(7) 7, 13, 19, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 25 உறுப்புகளின் தொகையைவிட 15, 21, 27, ... என்றக் கூட்டுத்தொடரின் முதல் 25 உறுப்புகளின் தொகை எவ்வளவு அதிகம் ?

(8) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 10 ஆவது உறுப்பு 50 உம், 21 ஆவது உறுப்பு 75 உம் ஆகும். தொடரின் முதல் 30 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிடவும்.

1 முதல் தொடர்ச்சியான எத்தனை ஒற்றை எண்களைக் கூட்டினாலும் ஒரு முழு வர்க்கம் கிடைக்கும் எனத் தெரியும் அல்லவா.

4, 12, 20, ... என்றக் கூட்டுத்தொடரின் முதலாவது உறுப்பு முதல் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளைக் கூட்டிப்பார்க்கவும்.

முதலாவது உறுப்பு முதல் தொடர்ச்சியான எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினாலும் முழு வர்க்கம் கிடைக்கின்ற வேறு கூட்டுத்தொடர்கள் உள்ளதா ?

4 வாய்ப்புகளின் கணிதம்

வாய்ப்புகளும் எண்களும்

ஒரு குடத்தில் பத்து முத்துக்கள் உள்ளன, ஒன்பது முத்துக்கள் கருப்பும், ஒன்று மட்டும் வெள்ளையும், இதிலிருந்து (பார்க்காமல்) ஒரு முத்தை எடுத்தால்...

பெரும்பாலும், கருப்பாகுமல்லவா ? வெள்ளை ஆகாது எனக் கூறவும் இயலாது.

வேறொரு குடத்தில் எட்டு கருப்பு முத்துக்களும், இரண்டு வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. இதிலிருந்து பார்க்காமல் ஒரு முத்தை எடுத்தால் ?

அப்போது எடுக்கின்ற முத்து பெரும்பாலும் கருப்பு ஆகலாம்.மூன்றாவது ஒரு குடத்தில் ஐந்து கருப்பு, ஐந்து வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. இதிலிருந்து ஒரு முத்தை எடுத்தால்? கருப்பாகவோ, வெள்ளையாகவோ இருக்கலாம் என்பதைத் தவிர வேறு ஒன்றும் கூறுவதற்கில்லை ?

இதையெல்லாம் வேறு விதத்திலும் கூறலாம்; முதல் குடத்தில் இருந்தும், இரண்டாவது குடத்தில் இருந்தும் கருப்பு முத்து கிடைப்பதற்கு அதிக வாய்ப்பு; மூன்றாவது குடத்தில் இருந்து எனில், கருப்பு ஆவதற்கும் வெள்ளை ஆவதற்கும் ஒரே வாய்ப்பு உள்ளது.

குடமும் முத்தும் வைத்து ஒரு விளையாட்டு; ஒரு குடத்தில் ஐந்து கருப்பு முத்துக்களும், ஐந்து வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன; வேறொன்றில் ஆறு கருப்பு முத்துக்களும் நான்கு வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. ஏதாவது ஒரு குடத்திலிருந்து ஒரு முத்தை எடுக்க வேண்டும். கருப்பு எனில் வெற்றி பெறுவோம். எந்தக் குடத்தில் இருந்து எடுப்பது நல்லது ?

இரண்டாவது குடத்தில் கருப்பு முத்துக்கள் அதிகம் உள்ளன. எனவே, அதில் அல்லவா கருப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு அதிகம்.

இரண்டாவது குடத்தில் இருந்து ஒரு கருப்பு முத்தை எடுத்து முதல் குடத்தில் போட்டால்? குடத்தில் உள்ள முத்துக்கள் இவ்வாறாகும்.

முதல் குடம்	:	6 கருப்பு 5 வெள்ளை
இரண்டாவது குடம்	:	5 கருப்பு 4 வெள்ளை

இனி விளையாட்டில் வெற்றிபெற எந்தக் குடத்தில் இருந்து எடுப்பது நல்லது ?

இப்போது முதல் குடத்தில்தான் கருப்பு முத்துக்கள் அதிகம்.

கருப்பு கிடைப்பதற்குக் கூடுதல் வாய்ப்பும் இதில் அல்லவா ?

மொத்தமாகச் சிந்தித்துப் பார்க்கலாம்; முதல் குடத்தில் மொத்தம் 11 முத்துக்கள், அதில் 6 கருப்பு. அதாவது, மொத்த முத்துக்களில் $\frac{6}{11}$ பாகம் கருப்பு.

இரண்டாவது குடத்தில்? மொத்த முத்துக்களில் $\frac{5}{9}$ பாகம் கருப்பு.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ இவற்றில் எது பெரியது?

$\frac{5}{9}$ அல்லவா?

(ஆறாம் வகுப்பில் **பாகக் கணக்குகள்** என்ற படத்தில் **பெரியதும் சிறியதும்** என்ற பகுதி).

அதாவது, இரண்டாவது குடத்தில்தான் கூடுதல் பாகம் கருப்பு உள்ளது. அப்படியானால் இப்போது இரண்டாவது குடத்தில் இருந்து எடுப்பதுதானே நல்லது ?

வேறொரு முறையில் கூறினால், இரண்டாவது குடத்தில் இருந்துதான் கருப்பு முத்து கிடைக்க வாய்ப்பு அதிகம். மேலும் ஆழ்ந்து சிந்தித்தால், முதல் குடத்திலிருந்து கருப்பு முத்து கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{6}{11}$, இரண்டாவது குடத்தில் இருந்து கருப்பு முத்து கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{5}{9}$ என்றெல்லாம் கூறலாம்.

வெள்ளை முத்து கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு ?

முதல் குடத்திலிருந்து $\frac{5}{11}$, இரண்டாவது குடத்திலிருந்து $\frac{4}{9}$; இதில் எது பெரியது ?

அப்போது வெள்ளை முத்து கிடைத்தால்தான் வெற்றி எனில், எந்தக் குடத்திலிருந்து எடுப்பது நல்லது ?

இந்தக் கணக்கில் உள்ள வாய்ப்புகளை எல்லாம் இவ்வாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்:

		முதல் குடம்		இரண்டாம் குடம்	
		கருப்பு	வெள்ளை	கருப்பு	வெள்ளை
முன்னர்	எண்ணிக்கை	5	5	6	4
	வாய்ப்பு	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
பின்னர்	எண்ணிக்கை	6	5	5	4
	வாய்ப்பு	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ஒரு வினா.

தொடக்கத்திலும், முத்துக்களை மாற்றிப்போட்ட பின்னரும் இரண்டாவது குடத்திலிருந்து தான் கருப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு அதிகம் எனக் கண்டோம். இந்த வாய்ப்பு முன்னரா, பின்னரா கூடுதல் ?

(1) ஒரு பெட்டியில் 6 கருப்பு பந்துகளும், 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. இதிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது கருப்புப் பந்தாகக் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ? வெள்ளை கிடைப்பதற்கு ?

(2) ஒரு பையில் 3 சிவப்பு பந்துகளும், 7 பச்சை பந்துகளும் உள்ளன . வேறொரு பையில் 8 சிவப்பு பந்துகளும், 7 பச்சை பந்துகளும் உள்ளன.

(i) முதல் பையில் இருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது சிவப்பு ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(ii) இரண்டாவது பையில் இருந்து எடுத்தால் ?

(iii) இரண்டு பைகளில் உள்ள பந்துகளையும் ஒரு பையில் போட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது சிவப்பு ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(3) ஒரு பையில் 3 சிவப்பு முத்துக்களும், 7 பச்சை முத்துக்களும் உள்ளன. வேறொரு பையில் சிவப்பு முத்துக்களும் பச்சை முத்துக்களும் ஒன்று வீதம் அதிகமாக உள்ளன. எந்தப் பையில் இருந்து எடுத்தால் சிவப்பு முத்து கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு அதிகம்?

எண்களின் வாய்ப்பு

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

1 முதல் 25 வரை உள்ள எண்ணல் எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒவ்வொரு காகிதத் துண்டில் எழுதி, ஒரு பெட்டியில் போடப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து ஒரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால், காகிதத்துண்டில் உள்ள எண் இரட்டை எண்ணாகக் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

மொத்தமுள்ள 25 எண்களில், 13 எண்கள் ஒற்றை எண்களும், 12 எண்கள் இரட்டை எண்களும் அல்லவா. அப்போது, இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{12}{25}$.

ஒற்றை எண் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு? இந்தப் பெட்டியில் இருந்து மூன்றின் மடங்குகள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? ஆறின் மடங்கு?

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

1, 2, 3, ..., 1000 என்ற எண்ணல் எண்களில் இருந்து ஓர் எண்ணை எடுத்தால், அது 1000 இன் காரணிகள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

இதைக் கண்டுபிடிக்க, முதலில் 1, 2, 3, ..., 1000 என்ற எண்களில் 1000 ற்கு எத்தனை காரணிகள் உள்ளன எனக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

1000 இன் எல்லாக் காரணிகளும் இதில் இருக்கும் அல்லவா; அப்போது 1000 ற்கு மொத்தம் எத்தனை காரணிகள் உள்ளன எனக் கணக்கிட வேண்டும்.

இவ்வாறான கணக்குகளை ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறீர்கள் அல்லவா? (**எண் தொடர்புகள்** என்ற பாடத்தில் **காரணிகள்** என்ற பகுதி).

1000 ஐ வித்தியாசமான பகா எண்களின் அடுக்குகளாகப் பிரித்து எழுதினால்

$$1000 = 2^3 \times 5^3$$

அப்போது காரணிகளின் எண்ணிக்கை

$$(3 + 1) \times (3 + 1) = 4 \times 4 = 16$$

அதாவது, 1, 2, 3, ..., 1000 என்ற எண்ணல் எண்களில், 16 எண்கள் 1000 இன் காரணிகள்.

அப்போது 1, 2, 3, ..., 1000 என்ற எண்ணல் எண்களில் இருந்து ஓர் எண்ணை எடுத்தால் அது 1000 இன் காரணி ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு

$$\frac{16}{1000}=\frac{2\times 8}{125\times 8}=\frac{2}{125}$$

வாய்ப்புகளைச் சில வேளைகளில் தசம வடிவத்திலும், சதவீதத்திலும் கூறலாம்.

அதன்படி இந்தக் கணக்கின் வாய்ப்பையும் தசம வடிவத்தில் கூறலாம்:

$$\frac{16}{1000}=0.016$$

அதனால்,

வாய்ப்பு $= 0.016$

அல்லது, இந்தப் பின்ன எண்ணை சதவீதமாக்கலாம்:

$$\frac{16}{1000}\times 100=\frac{16}{10}=1.6$$

அதாவது,

வாய்ப்பு $= 1.6\%$

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எல்லாக் கணக்குகளிலும் வாய்ப்பை பின்ன எண்களாகக் கணக்கிட்டு, தசம வடிவத்திலும், சதவீதத்திலும் எழுதுக.

(i) 1, 2, 3, ..., 10 என்ற எண்களில் இருந்து ஓர் எண் எடுத்தால், அது பகா எண்ணாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(ii) 1, 2, 3, ..., 100 என்ற எண்களிலிருந்து ஓர் எண்ணை எடுத்தால், அது இரண்டிலக்க எண்ணாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(iii) எல்லா மூன்றிலக்க எண்களையும் காகித துண்டுகளில் எழுதி, ஒரு பெட்டியில் போட வேண்டும். இதிலிருந்து ஒரு காகித துண்டை எடுத்தால், அது இருவழியொக்கும் (Palindrome) எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? (ஐந்தாம் வகுப்பில் **எண் உலகம்** என்ற பாடத்தில் **பெருகும் எண்கள்** என்ற பகுதியில் கடைசியில் உள்ள கணக்குகளில் வினா எண் (4) ஐப் பார்க்கவும்).

(2) ஒரு நபரிடம் ஓர் இரண்டிலக்க எண்ணைக் கூறுமாறு கேட்க வேண்டும். கூறுகின்ற எண் முழு வர்க்கம் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(3) ஒரு நபரிடம் ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணைக் கூறுமாறு கேட்க வேண்டும்.

(i) கூறுகின்ற எண்ணின் மூன்றிலக்கங்களும் சமமான எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(ii) எண்களில் ஒன்றாம் இடத்தில் உள்ள இலக்கம் பூஜ்ஜியம் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(iii) எண் 3 இன் பெருக்கற்பலன் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(4) 1, 2, 3, 4 என்ற எண்கள் எழுதிய நான்கு அட்டைகளைப் பல முறைகளில் சேர்த்து வைத்து நான்கு இலக்க எண்கள் உருவாக்கப்படுகின்றன.

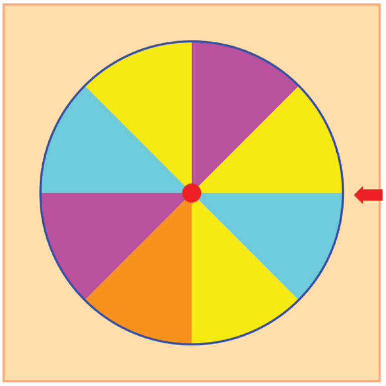
(i) எண் நான்காயிரத்தைவிட அதிகமாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

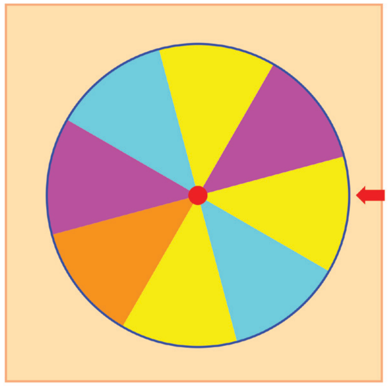
(ii) எண் நான்காயிரத்தைவிடக் குறைவாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

வடிவியல் வாய்ப்பு

ஒரு பலகையில் பல நிறங்களில் உள்ள ஒரு வட்டம் சுழல்வதற்கு ஏற்றவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

வட்டம் சுழன்று நிற்கும்போது, பலகையில் உள்ள அம்புக்குறி மஞ்சள் நிறத்திற்கு நேராக வருவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?



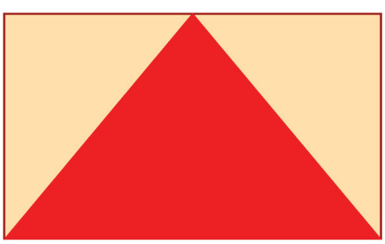


வட்டம் சுழன்று நிற்கும்போது, அம்புக்குறிக்கு நேராக வட்டத்தின் எட்டுப் பாகங்களில் ஏதேனும் ஒன்று வரலாம். அதில் மூன்று பாகங்கள் மஞ்சளாகும். அப்போது மஞ்சள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{3}{8}$.

இதைப்போன்று பிற நிறங்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்: கட்டிக் காகிதத்தில் ஒரு செவ்வகத்தை வெட்டி எடுத்து, அதன் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும், எதிர் பக்கத்தின் உச்சிகளையும் இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.

இந்தச் செவ்வகத்தில் கண்களை மூடிக்கொண்டு ஒரு புள்ளியை வைத்தால் அது சிவப்பு முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?



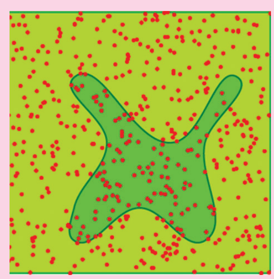
முக்கோணத்திற்கும் செவ்வகத்திற்கும் ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் அல்லவா ? அப்போது முக்கோணம் செவ்வகத்தின் பாதியாகும்.

ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.

இவை உச்சிகளாக வரும் ஒரு முக்கோணம் வரையவும் (Polygon Tool ஐ பயன்படுத்த வேண்டும்). கண்களை மூடிக்கொண்டு வட்டத்தின் உள்ளே தொட்டால் அது முக்கோணத்தில் அமைவதற்கான வாய்ப்பு என்ன? (முக்கோணத்தின் பெயர் t1 எனவும் வட்டத்தின் பெயர் c எனவும் எடுத்தால் வாய்ப்புக் கணக்கிடுவதற்கு Input Bar இல் Area(t1)/Area(c) எனக் கொடுத்தால் போதுமானது). முக்கோணத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப் பார்க்கவும். தொடுவது முக்கோணத்தின் உள்ளே ஆவதற்கான வாய்ப்பு மிகவும் அதிகமாகவது எப்போது? மிகவும் குறைவானதோ? (வாய்ப்பு, கூடுதல் தசம இடங்களுக்கு மிகத்துல்லியமாகக் காண்பதற்கு Options → Rounding என்பதில் தசம இடங்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்தால் போதுமானது).

பரப்பளவும் வாய்ப்பும்

சிக்கலான, வடிவங்களின் பரப்பளவைத் தோராயமாகக் கணக்கிட வாய்ப்புகளின் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட சதுரத்திற்குள் இந்த வடிவத்தை வரைய வேண்டும். பின்னர், படத்தில் ஒரு திட்டமிட்ட வரிசையோ முறையோ இல்லாமல் புள்ளிகள் வைக்கவும்.

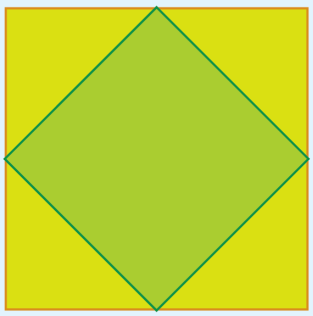


நமக்குத் தேவையான வடிவத்திற்கு உள்ளே வீழ்ந்த புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை மொத்த புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கின்ற எண், இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவைச் சதுரத்தின் பரப்பளவால் வகுத்துக் கிடைக்கின்ற எண்ணுடன் தோரயமாக சமமாகும். புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப இது மிகவும் துல்லியமாகும். இந்த வடிவியல் செயலையும் எண்களின் செயலையும், கணினியைப் பயன்படுத்தி வேகமாகச் செய்யலாம். அதன் பெயர் **மான்டே கார்லோ முறை (Monte Carlo method)** ஆகும்.

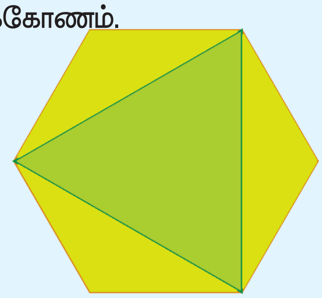
அதாவது, முக்கோணத்தின் பரப்பளவு என்பது செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{2}$ பாகமாகும். புள்ளி முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைவதற்கு உரிய வாய்ப்பும் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் பச்சை நிறத்தில் உள்ள பகுதியின் விளக்கம் கூறப்பட்டுள்ளது. படத்தில் கண்களை மூடிக்கொண்டு ஒரு புள்ளி வைத்தால், அது பச்சை நிறப் பகுதியில் அமைவதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிடவும்.

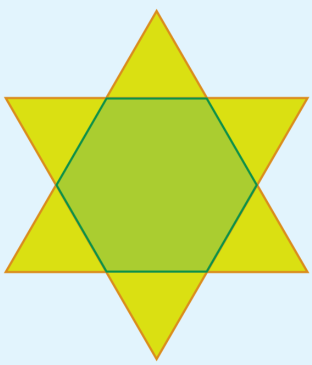
(1) ஒரு சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைத்து கிடைக்கும் சதுரம்.



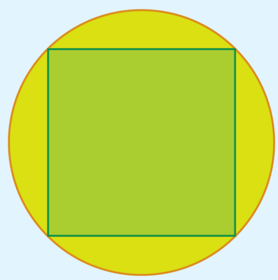
(2) ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் ஒன்று விட்ட உச்சிகளைச் சேர்த்து வரைந்த முக்கோணம்.



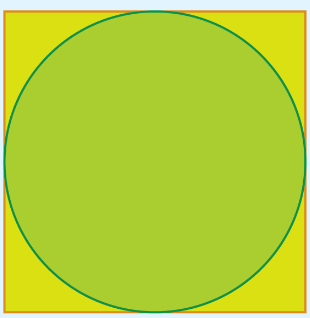
(3) இரண்டு சமபக்க முக்கோணங்களுக்கு இடையில் உருவாகும் ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம்.



(4) உச்சிகளெல்லாம் வட்டத்தில் அமைந்த ஒரு சதுரம்.



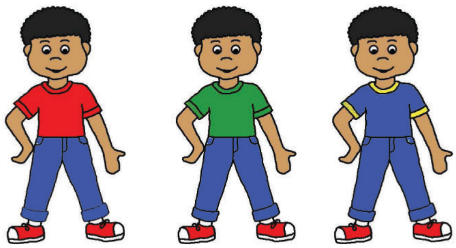
(5) ஒரு சதுரத்தின் உள்ளே சரியாகப் பொருந்தும் வட்டம்.



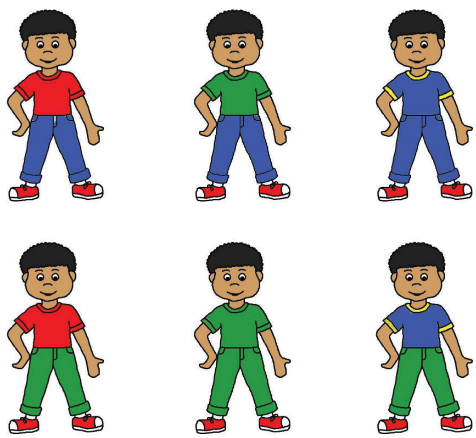
ஒரு வட்டம் வரையவும். n என்ற பெயரில் ஒரு Integer Slider–ஐ உருவாக்கி, உச்சிகள் எல்லாம் வட்டத்தில் வருமாறு n பக்கங்கள் உள்ள ஓர் ஒழுங்கு பலகோணம் வரையவும். (A வட்ட மையமும் B வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியும் எனில், Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி B யிலும் A யிலும் முறையே கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவு $(360/n)^\circ$ எனக் கொடுக்கவும். புதிய புள்ளி B' கிடைக்கும். BB' ஒரு பக்கமாக வரும்படி Regular Polygon ஐப் பயன்படுத்தி ஒழுங்கு பலங்கோணம் வரையலாம்). கண்களை மூடிக்கொண்டு வட்டத்தின் உள்ளே தொட்டால் அது பலகோணத்தின் உள்ளே அமைவதற்கான வாய்ப்பைக் கணக்கிடுக. பலகோணத்தின் பெயர் poly1 எனவும் வட்டத்தின் பெயர் c எனவும் Area(poly1)/Area(c) Input கொடுத்தால் போதுமானது. வாய்ப்பு மிகவும் குறைவது எப்போது? பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது வாய்ப்பிற்கு என்ன நிகழ்கிறது ?

ஜோடிகள்

சலவை செய்து இஸ்திரி போட்டவற்றையெல்லாம் பார்த்தபோது, ஜோணிக்கு ஒரு நீலநிறக் கால் சட்டையும், சிவப்பு, பச்சை, நீலம் என மூன்று நிறங்களில் மூன்று சட்டைகளும் கிடைத்தது. எவ்வாறெல்லாம் அணியலாம் என்று ஜோணி சிந்தித்தான்.



மீண்டும் ஒருமுறை தேடியபோது ஒரு பச்சை நிறக் கால்ச்சட்டையும் கிடைத்தது. அப்போது இனி இதை ஒவ்வொரு சட்டையுடன் மூன்று முறைகளில் அணியலாம் அல்லவா என்று ஜோணி சிந்தித்தான்.



அவ்வாறு ஆறு வேறுபட்ட முறைகளில் ஜோணிக்கு அணிய இயலும். இவற்றில் எத்தனை முறை கால்ச் சட்டையும், சட்டையும் ஒரே நிறத்தில் அணிய இயலும் ?

ஒரு பிரச்சனை

புகழ்பெற்ற அறிவியல் அறிஞரான கலிலியோ, சூதாட்டக் காரணான ஒரு நண்பன் எழுப்பிய பிரச்சனையைக் குறித்துக் கூறுகிறார் மூன்று பகடைகளை ஒன்றாக உருட்டினால் தொகையாக 9 மற்றும் 10 கிடைப்பதும், ஆறு முறைகளில் ஆகும் என்று அவர் கணக்கிட்டார்.

	9	10
1.	1 + 2 + 6	1 + 3 + 6
2.	1 + 3 + 5	1 + 4 + 5
3.	1 + 4 + 4	2 + 2 + 6
4.	2 + 2 + 5	2 + 3 + 5
5.	2 + 3 + 4	2 + 4 + 4
6.	3 + 3 + 3	3 + 3+ 4

ஆனால் கணக்கின்படி, 10 என்பது 9 ஐ விட அதிகமாக வருகிறது. இது ஏன் என்பது தான் வினா.

இதில் 1, 2, 6 என எடுத்திருப்பது ஏதோ, ஒரு பகடையில் 1, மற்றொன்றில் 2, மூன்றாவதில் 6 என்றல்லவா. இதற்குப் பதில் முதல் பகடையில் 1, இரண்டாவது பகடையில் 2, மூன்றாவது பகடையில் 6 என்பதை மட்டும் (1, 2, 6) என்ற மும்மையைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிடுக. முதல் பகடையில் 1, இரண்டாவது பகடையில் 6, மூன்றாவது பகடையில் 2, என்பதனை (1, 6, 2) என்ற மும்மையைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிடுக. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) என்ற ஆறு வித்தியாசமான மும்மைகள் 9 தொகையாகக் கிடைக்கின்ற முறையில் எடுக்க வேண்டும் என்பதே கலிலியோவின் விடை மற்றுள்ள மும்மைகளையும் விவரித்து எழுதினால், 9 கிடைப்பது 25 முறைகளிலும், 10 கிடைப்பது 27 முறைகளிலும் ஆகும் என்று அவர் தெளிவுபடுத்துகிறார்

(செய்து பார்க்கவும்).

அப்படியெனில் ஜோணி, ஒரே நிறமுள்ள சட்டையையும் கால் சட்டையையும் அணிவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ அல்லவா ?

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என எண்கள் எழுதிய, நான்கு காகிதத்துண்டுகளும்; வேறொரு பெட்டியில் 1, 2 என எண்கள் எழுதிய இரண்டு காகிதத்துண்டுகளும் உள்ளன. இரண்டில் இருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால் கிடைக்கும் எண் ஜோடிகள் எவை ?

முதல் பெட்டியில் இருந்து 1 என எடுத்தால், இரண்டாவது பெட்டியில் 1, 2 இவை ஒவ்வொன்றையும் சேர்த்து இரண்டு ஜோடிகள். இவற்றை (1, 1), (1, 2) என எழுதலாம்.

இதைப் போன்று முதல் பெட்டியிலிருந்து ஒவ்வொரு எண்ணையும் எடுத்து, கிடைக்கக்கூடிய எண் ஜோடிகள் அனைத்தையும் எழுதினால் ?

(1, 1)	(1, 2)
(2, 1)	(2, 2)
(3, 1)	(3, 2)
(4, 1)	(4, 2)

மொத்தம் 8 ஜோடிகள்.

இதில் எத்தனை ஜோடிகளில் இரண்டு எண்களும் ஒற்றை எண்களாகின்றன?

(1, 1), (3, 1) என்ற இந்த இரண்டு ஜோடிகளில் மட்டுமல்லவா? அப்போது இந்த இரண்டு பெட்டிகளில் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால், இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

இதைப் போன்று, இரண்டும் இரட்டை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிடலாமா? ஏதேனும் ஓர் எண் ஒற்றை எண்ணும் மற்ற எண் இரட்டை எண்ணும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு? இரண்டும் ஒரே எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு ?

(1) ரஜனிக்குப் பச்சை, நீலம், சிவப்பு என்ற நிறங்களில் கல்மாலைகளும், கம்மல்களும் உள்ளன. எத்தனை முறைகளில் ரஜனிக்கு மாலையும் கம்மலும் அணியலாம்? ஒரு நாளில் ரஜனி ஒரே நிறமுள்ள மாலையும் கம்மலும் அணிவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? வித்தியாசமான நிறம் உள்ளவையோ ?

(2) ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என எண்கள் எழுதிய நான்கு காகிதத்துண்டுகளும், வேறொரு பெட்டியில் 1, 2 என எழுதிய இரண்டு காகிதத்துண்டுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால் கிடைக்கின்ற எண்களின் தொகை ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? தொகை இரட்டை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு ?

(3) ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என எண்கள் எழுதிய நான்கு காகிதத்துண்டுகளும், வேறொரு பெட்டியில் 1, 2, 3 என எண்கள் எழுதிய மூன்று காகிதத்துண்டுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டு எடுத்தால், கிடைக்கின்ற எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? பெருக்கற்பலன் இரட்டை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(4) 1, 2, 3 என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எழுதுகின்ற இரண்டு இலக்க எண்களில் ஓர் எண்ணை எடுத்தால்,

(i) இரண்டு இலக்கங்களும் சமமாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(ii) இலக்கங்களின் தொகை 4 ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(5) இரண்டு நபர்களின் இடையே நடைபெறும் ஒரு விளையாட்டு. ஒவ்வொருவரும் ஒற்றை எண் வேண்டுமா, இரட்டை எண் வேண்டுமா என முதலில் முடிவு செய்ய வேண்டும். இருவரும் ஒரு கையில் உள்ள சில விரல்களை ஒன்றாக உயர்த்துகின்றனர். மொத்த விரல்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண் எனில் அதை முதலில் எடுத்த நபர் வெற்றி பெறுவார்; இரட்டை எண் எனில் அதை முதலில் எடுத்த நபர் வெற்றி பெறுவார். இந்த விளையாட்டில் முதலில் ஒற்றை எண் எடுப்பதா, அல்லது இரட்டை எண் எடுப்பதா, எது நல்லது ?

கூடுதல் ஜோடிகள்

மீண்டும் இரண்டு பெட்டிகள், ஒன்றில் 1 முதல் 10 வரை உள்ள எண்ணல் எண்கள் எழுதிய பத்துக் காகிதத்துண்டுகள், இரண்டாவது பெட்டியில் 1 முதல் 5 வரை உள்ள எண்ணல் எண்ணங்கள் எழுதிய ஐந்து காகிதத்துண்டுகள் வழக்கம்போல் இரண்டில் இருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டு எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டும் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

விடை காண்பதற்கான வழிமுறை எளிதானது. மொத்தம் எத்தனை எண் ஜோடிகள் கிடைக்கும் எனக்கணக்கிடுக. அவற்றில் நமக்குத் தேவையான முறையில் இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆகின்ற ஜோடிகள் எத்தனை எனப் பார்க்கவும். இரண்டாவது கிடைத்த எண்ணை முதலில் கிடைத்த எண்ணால் வகுத்தால் வாய்ப்பு ஆகும்.

சொல்வதைப் போன்று செய்வது எளிதானதா ? எல்லா எண் ஜோடிகளையும் எழுதி எண்ணுவது அவ்வளவு எளியது அல்ல.

சிந்தித்துப் பார்ப்போம். முதல் எண் பத்து எண்களில் ஏதாவது ஒன்றாகலாம், இரண்டாவது எண் ஐந்து எண்களில் ஏதாவது ஒன்றாகலாம். அப்போது முதல் எண் 1 ஆகின்ற எத்தனை ஜோடிகள் உள்ளன? முதல் எண் 2 ஆகின்ற ஜோடிகள் ?

சுருங்கக் கூறின், முதல் எண்ணை உறுதிப்படுத்தி விட்டால், இரண்டாவது எண்ணை மாற்றி 5 ஜோடிகள் உருவாக்கலாம். முதல் எண் 10 வகைகளில் ஆகலாம்.

வாய்ப்பும் நிகழ்வெண்ணும்

சாதாரணமாக ஒரு நாணயத்தைப் பல முறை சுண்டினால் தலையோ பூவோ (Head or Tail) விழுவதன் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்கும். அதனால் ஒவ்வொன்றும் கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$ என எடுக்கலாம். ஆனால் நாணயம் உருவாக்குவதில் ஏற்படுகின்ற குறைபாட்டினாலோ வேறு ஏதேனும் காரணங்களினாலோ சிலவேளை தலைப்பக்கம் விழுவதற்குரிய வாய்ப்புகள் அதிகம் ஆகலாம். இதை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பீர்கள்?

நாணயத்தை மீண்டும் மீண்டும் சுண்டும்போது ஒவ்வொரு பக்கமும் விழுகின்றதன் எண்ணிக்கை பாதியைவிட மிக அதிக அளவில் வேறுபட்டு காணப்பட்டாலே இத்தகைய ஓர் சந்தேகம் ஏற்பட வேண்டும். அப்போது அதிக முறை சுண்டும்போது ஒவ்வொரு பக்கமும் விழுவதன் எண்ணிக்கை வெவ்வேறாக அட்டவணைப் படுத்துவதுதான் முறை. எடுத்துக்காட்டாக இந்த அட்டவணையைப் பார்க்கவும்.

சுண்டுதல்	தலை	பூ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

இதிலிருந்து தலையின் வாய்ப்பு 0.6 எனவும் பூவின் வாய்ப்பு 0.4 எனவும் எடுப்பதே, இரண்டு 0.5 என எடுப்பதைவிடச் சரி எனக் காணலாமல்லவா. இதுபோன்ற கணக்கீடுகளை மிகத் துல்லியமாக ஆவதற்குரிய கணித முறைகளை **நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு (Probability theory)** என்ற கணித பிரிவின் தொடர்ந்துள்ள பாடத்தில் காணலாம்.

அப்போது மொத்த எண் ஜோடிகளை இவ்வாறு ஊகிக்கலாம்.

(5 columns, 10 rows)

(1,1)	(1,2)	. . .	(1,5)
(2,1)	(2,2)	. . .	(2,5)
. . .	. . .	. . .	. . .
(10,1)	(10,2)	. . .	(10,5)

- முதல் எண் 1 ஆன ஜோடிகள் 1 ஆம் வரிசையில், முதல் எண் 2 ஆன ஜோடிகள் 2 ஆம் வரிசையில் என இவ்வாறு முதல் எண் 10 ஆகும் வரை 10 வரிசைகள்.
- ஒவ்வொரு வரிசையிலும், இரண்டாம் எண் 1 முதல் 5 வரை ஆன 5 ஜோடிகள்.
- மொத்தம் $5 \times 10 = 50$ ஜோடிகள்.

இந்த 50 ஜோடிகளில் இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆகின்ற ஜோடிகள் எத்தனை ?

அதற்கு, முதல் எண் 1, 3, 5, 7, 9 என்ற 5 எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று ஆக வேண்டும். இரண்டாவது எண் 1, 3, 5 என்ற 3 எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று ஆக வேண்டும்.

(3 columns, 5 rows)

(1,1)	(1,3)	(1,5)
(3,1)	(3,3)	(3,5)
(5,1)	(5,3)	(5,5)
(7,1)	(7,3)	(7,5)
(9,1)	(9,3)	(9,5)

மொத்த ஜோடிகள் $3 \times 5 = 15$

அப்போது இந்தப் பெட்டிகளில் இருந்து இரண்டும் ஒற்றை எண்களாகக் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு.

$$\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

இதுபோல, இரண்டும் இரட்டை எண்கள் ஆவதற்குரிய வாய்ப்பையும், ஓர் எண் ஒற்றை எண்ணும் மற்ற எண் இரட்டை எண்ணும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பையும் கண்டுபிடிக்கலாமா?

நிச்சயமற்ற அளவு

ஒவ்வொரு நாளும் சூரியன் உதிக்கும் நேரமும், மறையும் நேரமும் நாட்காட்டியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை நீங்கள் கவனித்து இருக்கிறீர்களா ? பூமியும் சூரியனும் மிகத் துல்லியமாகச் சில கணித விதிகளின்படி வலம் வருவதாலேயே இவை அனைத்தையும் கணக்கிட முடிகிறது.

இதைப் போன்று மழைக்காலம் வெயில் காலம் எந்தெந்த மாதங்களில் வருகின்றன என்று கணக்கிடலாம். ஆனால் வெயில் காலத்தில் திடீரென மழை பொழியும் என்பதை முன்னரே கணிப்பதற்கு இயலாமலும் போகலாம். மழைப் பொழிவைப் பாதிக்கும் காரணிகளின் பன்முகத்தன்மை அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகளின் சிக்கலான தன்மை ஆகியவற்றால் இத்தகைய கணிப்புகள் சிக்கலாகின்றது.

சூழ்நிலைகளின் கணிதம் சார்ந்த பகுப்பாய்வு மூலம் வாய்ப்புகளைக் கணக்கிடலாம். அதனால் தான் அன்றாட வளிமண்டலத்தின் தன்மைகள் பற்றிய கணிப்புகள் வாய்ப்புகளாகக் கூறப்படுகின்றன. எதிர்பாராதச் சூழ்நிலைகளில் உருவாகும் மாற்றங்கள் சில நேரங்களில் இந்தக் கணிப்புகளைத் தவறாக்குகின்றன.

எந்த ஓர் அறிவியல் அடிப்படையுமில்லாமல், சரி என்பது போல் நடத்தப்படும் கணிப்புகளைவிட, இவ்வாறான வாய்ப்புக் கூற்றுகளுக்கு நம்பிக்கை அதிகரிப்பதாக உள்ளது என்பதைச் சரியாகக் கவனித்தால் அறிய முடிகிறது.

மேலும் ஒரு கணக்கு:

> ஒரு கூடையில் 50 மாங்காய்கள் உள்ளன, அதில் 20 மாங்காய்கள் பழுக்கவில்லை. வேறொரு கூடையில் 40 மாங்காய்கள் உள்ளன, 15 மாங்காய்கள் பழுக்கவில்லை. ஒவ்வொரு கூடையிலிருந்தும் ஒரு மாங்காய் வீதம் எடுத்தால், இரண்டும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

ஒவ்வொரு கூடையிலிருந்தும் ஒரு மாங்காய் வீதம் எடுத்தால், எத்தனை வேறுபட்ட முறைகளில் எடுக்கலாம் ? (வேண்டுமானால், முதல் கூடையில் உள்ள மாங்காய்களில் 1 முதல் 50 வரையும், இரண்டாவது கூடையில் உள்ள மாங்காய்களில் 1 முதல் 40 வரையும் எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ளதாகக் கற்பனை செய்யலாம்).

அப்போது மொத்தம் இரண்டு மாங்காய்கள் எடுப்பது $50 \times 40 = 2000$ முறைகளிலாகலாம்.

இதில் எத்தனை ஜோடிகளில் இரண்டும் பழுத்தது ஆகும் ?

முதல் கூடையில், $50 - 20 = 30$ பழுத்த மாங்காய்கள் உள்ளன, இரண்டாவது கூடையில் $40 - 15 = 25$ மாங்காய்கள் பழுத்தது.

முதல் கூடையில் உள்ள ஒவ்வொரு பழுத்த மாங்காயும், இரண்டாவது கூடையில் உள்ள ஒவ்வொரு பழுத்த மாங்காயுடன் ஜோடியாக்கினால், மொத்தம் $30 \times 25 = 750$ ஜோடிகள். அப்போது இரண்டும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$

இதுபோல், இரண்டும் பழுக்காதது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

ஒன்றேனும் பழுத்ததாக வேண்டிய வாய்ப்பு என்ன ?

ஒன்றேனும் பழுத்ததாக வேண்டுமெனில் ஒன்று பழுத்ததும் ஒன்று பழுக்காததும்; அல்லது இரண்டும் பழுத்தது;

இதில் ஒன்று பழுத்தது என்பதே இரண்டு முறைகளில் கிடைக்கும்;

(i) முதல் கூடையில் பழுத்ததும், இரண்டாவது கூடையில் பழுக்காததும்.

(ii) முதல் கூடையில் பழுக்காததும், இரண்டாவது கூடையில் பழுத்ததும்.

ஒவ்வொன்றிலும் இவ்வாறான எத்தனை ஜோடிகள் உள்ளன ?

அதாவது, ஒன்று மட்டும் பழுத்தது என்பதன் மொத்த ஜோடிகள்.

$$(30 \times 15) + (20 \times 25) = 450 + 500$$
$$= 950$$

இரண்டும் பழுத்தது 750 ஜோடிகள் எனக் கண்டுபிடித்துள்ளோம். இரண்டையும் எடுத்தால், ஒன்றேனும் பழுத்ததாவதற்குரிய மொத்த ஜோடிகள்

$$950 + 750 = 1700$$

எனவே ஒன்றேனும் பழுத்ததாவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இதனை இப்படியும் சிந்திக்கலாம்: ஒன்றேனும் பழுத்தது ஆகவேண்டுமெனில் இரண்டும் பழுக்காதது ஆகக்கூடாது. மொத்தம் வாய்ப்புள்ள 2000 ஜோடிகளில், இரண்டும் பழுக்காதது $20 \times 15 = 300$ ஜோடிகள் அல்லவா.

மீதியுள்ள $2000 - 300 = 1700$ ஜோடிகளில் ஒன்றேனும் பழுத்தது ஆக வேண்டும்.

அதாவது, ஒன்றேனும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$

(1) 10 A வகுப்பில் 30 மாணவர்களும், 20 மாணவிகளும் உள்ளனர். 10 B வகுப்பில் 15 மாணவர்களும், 25 மாணவிகளும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு வகுப்பிலிருந்தும் ஒரு நபரைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

- (i) இரண்டும் மாணவிகள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (ii) இரண்டும் மாணவர்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (iii) ஒரு மாணவனும் ஒரு மாணவியும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (iv) ஒரு நபராவது மாணவன் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(2) ஒரு நபரிடம் ஓர் இரண்டு இலக்க எண்ணைக் கூறுமாறு கேட்கப்படுகிறது.

- (i) இதில் இரண்டு இலக்கங்களும் சமம் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?
- (ii) முதல் இலக்கம், இரண்டாவது இலக்கத்தைவிடப் பெரியது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (iii) முதல் இலக்கம், இரண்டாவது இலக்கத்தைவிடச் சிறியது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

(3) 1 முதல் 6 வரை உள்ள எண்கள் குறிக்கப்பட்ட இரண்டு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கும் எண்களின் தொகை எந்தெந்த எண்களாகலாம்? மிகவும் கூடுதல் வாய்ப்புள்ள தொகை எது ?

(4) ஒரு பெட்டியில் 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்ணல் எண்கள் எழுதிய 10 காகிதத் துண்டுகளும் மற்றொரு பெட்டியில் 25 வரையுள்ள 5 இன் மடங்குகள் எழுதிய காகிதத்துண்டுகளும் உள்ளன. இரண்டிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத் துண்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றது.

- (i) இரண்டும் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (ii) இந்தக் காகித துண்டுகளில் எழுதிய எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?
- (iii) இந்தக் காகித துண்டுகளில் எழுதிய எண்களின் தொகை ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன ?

5 இருபடிச் சமன்பாடுகள்

வர்க்கபிரச்சனைகள்

ஒரு கணக்கிலிருந்து தொடங்கலாம்:

ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் 1 மீட்டர் அதிகரித்துப் பெரியதாக்கியபோது, சுற்றளவு 36 மீட்டர் ஆனது. முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவாக இருந்தது ?

பெரியதாக்கிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $36 \div 4 = 9$ மீட்டர்; அப்போது பழைய சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $9 - 1 = 8$ மீட்டர் என எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

வினா பின்வருமாறு ஆனால் ?

> ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் 1 மீட்டர் அதிகரித்துப் பெரியதாக்கியபோது, பரப்பளவு 36 சதுர மீட்டர் ஆனது. முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவாக இருந்தது ?

பெரியதாக்கிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு ?

$$\sqrt{36} = 6 \text{ மீட்டர் அல்லவா ?}$$

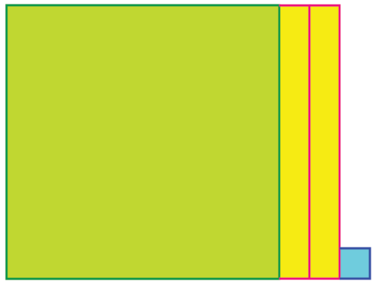
அப்போது முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $6 - 1 = 5$ மீட்டர்.

(1) ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் 2 மீட்டர் குறைத்து சிறியதாக்கிய போது, பரப்பளவு 49 சதுர மீட்டர் ஆனது. முதல் சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எத்தனை மீட்டராக இருந்தது ?

(2) சதுர வடிவத்தில் உள்ள ஒரு மைதானத்தைச் சுற்றிலும் 2 மீட்டர் அகலத்தில் ஒரு பாதை உள்ளது. மைதானமும் பாதையும் சேர்ந்த சதுரத்தின் பரப்பளவு 1225 சதுர மீட்டராகும். மைதானத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு ?

வேறொரு கணக்கு:

பின்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்:

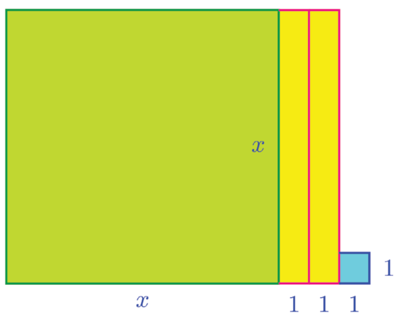


பச்சை நிறத்தில் ஒரு சதுரமும், அதே உயரமுடைய இரண்டு மஞ்சள் செவ்வகங்களும், நீல நிறத்தில் ஒரு சிறிய சதுரமும் சேர்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளன. மஞ்சள் செவ்வகங்கள் ஒவ்வொன்றின் அகலமும், நீல சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளமும் 1 மீட்டராகும்; படத்தின் மொத்த பரப்பளவு 100 சதுர மீட்டர் ஆகும்.

பச்சைநிற சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

நேரடியாகச் சிந்தித்துக் கணக்கிடுவது கடினம், அல்லவா ?

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி முயற்சி செய்யலாம். பச்சை நிற சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளம் x மீட்டர் என எடுக்கலாம்.



மொத்த பரப்பளவைப் பின்வருமாறு கணக்கீடு செய்யலாம்:

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

மொத்த பரப்பளவு 100 சதுர மீட்டர் என்று தரப்பட்டுள்ளது; அப்படியானால் பிரச்சனையைப் பின்வருமாறு இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம்:

$x^2 + 2x + 1 = 100$ எனில் x எவ்வளவு ?

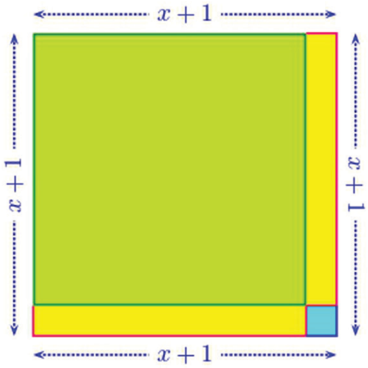
$x^2 + 2x + 1$ என்ற வடிவம் நினைவில் உள்ளதா ?

எட்டாம் வகுப்பில் **வர்க்க சமன்பாடுகள்** என்ற பாடத்தில்

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

எனக் கற்றிருக்கிறோமல்லவா.

படத்தில் உள்ள செவ்வகங்களை மாற்றி அமைத்தும் இதைக் காணலாம்.



அப்போது பிரச்சனையை மாற்றி எழுதலாம்:

$$(x+1)^2 = 100 \text{ எனில் } x \text{ எவ்வளவு ?}$$

இனி $x + 1 = 10$ என்றும், அவ்வாறு $x = 9$ என்றும் காணலாம் அல்லவா.

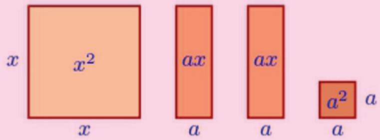
அதாவது, பச்சை நிற சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் 9 மீட்டர் ஆகும்.

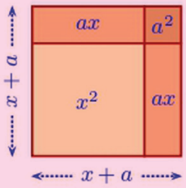
வடிவியல் வர்க்கம்

x, a எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்தாலும்

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

அல்லவா. x, a இவை மிகை எண்கள் ஆனால், இயற்கணித வாக்கியத்தை பட வடிவில் ஆக்கலாம்:





(1) அடுத்தடுத்துள்ள இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலனுடன் 1 ஐக் கூட்டியபோது 289 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?

(2) 6 இன் அடுத்தடுத்த இரண்டு மடங்குகளின் பெருக்கற்பலனுடன் 9 ஐக் கூட்டியபோது 729 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?

(3) 9, 11, 13, ... என்ற கூட்டுத் தொடரின் முதலில் உள்ள சில உறுப்புகளின் தொகையையும் 16 ஐயும் கூட்டியபோது 256 கிடைத்தது. எத்தனை உறுப்புகள் கூட்டப்பட்டன?

வர்க்க முழுமை

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

ஒரு செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கத்திற்கு சிறிய பக்கத்தைவிட 2 மீட்டர் நீளம் அதிகம். அதன் பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டர். பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

முதலில் பிரச்சனையை இயற்கணித வடிவில் ஆக்க வேண்டும். சிறிய பக்கத்தின் நீளம் x மீட்டர் என எடுத்தால், பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $x + 2$ மீட்டர்; பரப்பளவு $x(x+2) = x^2 + 2x$ சதுர மீட்டர்.

இனி செவ்வகப் பிரச்சனையை இயற்கணித வடிவில் ஆக்கலாம்:

$$x^2 + 2x = 224 \text{ எனில் } x \text{ என்ன?}$$

இனி என்ன செய்யலாம்?

முன்பு செய்த ஒரு கணக்கில் $x^2 + 2x + 1$ ஐ $(x + 1)^2$ என்று மாற்றி எழுதிச் செய்தது நினைவில் உள்ளதா ? இந்தப் பிரச்சனையில் $x^2 + 2x$ மட்டுமே உள்ளது.

1 கூட்டினால்போதும் அல்லவா ?

அப்படியானால் பின்வருமாறு தொடரலாம்:

(i) $x^2 + 2x = 224$ எனில் $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$

(ii) அதாவது, $(x + 1)^2 = 225$

(iii) $(x + 1)^2 = 225$ எனில் $x + 1 = \sqrt{225} = 15$

(iv) $x + 1 = 15$ எனில் $x = 14$

அவ்வாறு செவ்வகத்தின் சிறிய பக்கம் 14 மீட்டர் என்று கிடைத்தது.

அப்படியானால் பெரிய பக்கம் $14 + 2 = 16$ மீட்டர்

இந்த வினாவைச் சற்று மாற்றிப் பின்வருமாறு கூறினால் ?

> ஒரு செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கத்திற்கு சிறிய பக்கத்தை விட 20 மீட்டர் நீளம் அதிகம். அதன் பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டர். பக்கங்களின் நீளம் என்ன ?

இயற்கணித வடிவம் பின்வருமாறு மாறும்:

$x^2 + 20x = 224$ எனில் x என்ன ?

இங்கும் 1 கூட்டினால் சமன்பாட்டின் வலதுபக்க எண் 225 $= 15^2$ ஆகும்; ஆனால், இடது பக்க இயற்கணித வாக்கியம் $x^2 + 20x + 1$ என்றுதான் ஆகும்.

இதை $(x + a)^2$ என்ற வடிவிலாக்க இயலுமா?

a ஆக எந்த எண் எடுத்தாலும்

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ அல்லவா.

நமது பிரச்சனையில் உள்ளது $x^2 + 20x$ ஆகும். அதாவது, பொதுவான சமன்பாட்டில் $2ax$ இன் இடத்தில் $20x$,

அப்போது, a ஆக 10 எடுத்துப் பார்த்தால் ?

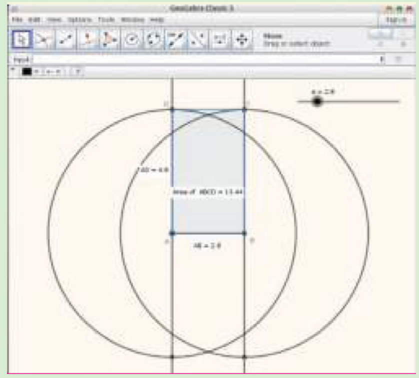
$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$

பிரச்சனையில் $x^2 + 20x = 224$ ஆகும். இப்போது பார்த்தபடி 100 கூட்டித் தொடர்ந்தால் ?

$$\begin{aligned} x^2 + 20x &= 224 \\ x^2 + 20x + 100 &= 324 \\ (x + 10)^2 &= 324 \\ x + 10 &= \sqrt{324} = 18 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

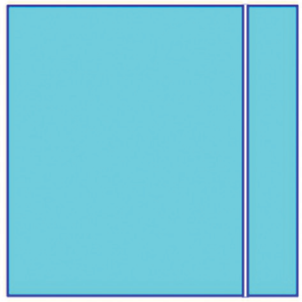
இவ்வாறு இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் 8 மீட்டரும், 28 மீட்டரும் எனக் கணக்கீடு செய்யலாம்.

பெரிய பக்கம் சிறிய பக்கத்தைவிட 2 அதிகம் உள்ள செவ்வகங்களை ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி வரையலாம். இதற்காக min = 0 ஆன a என்ற சிலைடர் உருவாக்கவும். நீளம் a ஆக ஒரு கோடு AB வரைந்த பின் அதன் முனைகள் வழி AB க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். A, B இவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஆரம் a + 2 வரும்படி வட்டங்கள் வரையவும். ஒவ்வொரு வட்டமும் செங்குத்துக் கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகள் C, D அடையாளப்படுத்தவும். Polygon டூல் பயன்படுத்தி ABCD என்ற செவ்வகம் வரையவும். இனி கோடுகளையும் வட்டங்களையும் மறைத்து வைக்கலாம். செவ்வகத்தின் பரப்பளவை அடையாளப்படுத்தவும். சிலைடரின் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். பரப்பளவு 224 ஆவது எப்போது ?



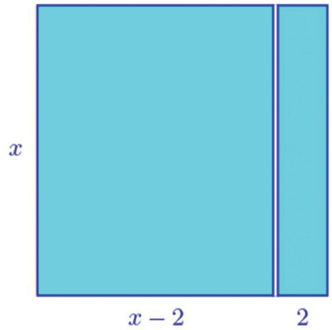
வேறொரு செவ்வகக் கணக்கு:

ஒரு சதுரத்திலிருந்து 2 மீட்டர் அகலம் உள்ள ஒரு துண்டு வெட்டி மாற்றப்படுகிறது.



மீதி உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 99 சதுர மீட்டர்; சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் என்ன ?

சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் x என எடுத்தால், மீதியுள்ள செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் x மீட்டர், $x - 2$ மீட்டர் என ஆகும்:



மீதியுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $x(x-2) = x^2 - 2x$ சதுர மீட்டர் எனவும் ஆகும்.
அப்போது பிரச்சனையில் இயற்கணித வடிவம் பின்வருமாறு ஆகும்.

$x^2 - 2x = 99$ எனில் x என்ன ?

$x^2 + 2x$ ஐப் போல் $x^2 - 2x$ ஐயும் வர்க்க வடிவத்திலாக்க இயலுமா ?
எட்டாம் வகுப்பில் உள்ள வேறு ஒரு சமன்பாட்டை நினைவு கூரவும்:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

இனி பிரச்சனையில் x ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 99 \\ x^2 - 2x + 1 &= 100 \\ (x-1)^2 &= 100 \\ x - 1 &= 10 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 11 மீட்டர்.

வேறொரு கணக்கு:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பங்கங்களில் ஒன்றின் நீளம், மற்ற பக்கத்தின் நீளத்தைவிட 5 சென்டிமீட்டர் அதிகமாகும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 12 சதுர சென்டிமீட்டர். இந்தப் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

செங்குத்துப் பக்கங்களில் சிறிய பக்கத்தின் நீளம் x என எடுத்தால், மற்ற பக்கத்தின் நீளம் $x + 5$ ஆகும்; பரப்பளவு ?

அப்போது தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை இயற்கணித வடிவில் ஆக்கினால்

$$\frac{1}{2}x(x+5) = 12$$

எனக் கிடைக்கும். இதையே

$$x^2 + 5x = 24$$

என எழுதலாம்.

$x^2 + 5x$ உடன் எந்த எண்ணைக் கூட்டினால், $x^2 + 2ax + a^2$ என்ற வடிவிலாகும் ?

$$x^2 + 5x = x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x$$

என எழுதிப் பார்க்கவும்.

இதனை வர்க்க வடிவிலாக்க, கூட்ட வேண்டிய எண் எது ?

$$x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

இப்போது நமது சமன்பாட்டின் இருபுறமும் $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ஐக் கூட்டலாம்.

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 24 + \frac{25}{4}$$

அதாவது

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

இதிலிருந்து

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$$

என்றும், அதிலிருந்து

$$x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$$

என்றும் கணக்கீடு செய்யலாம்.

அதாவது செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டரும், 8 சென்டிமீட்டரும்,

இனி பின்வரும் கணக்கைச் செய்து பார்க்கவும்:

சுற்றளவு 100 மீட்டரும், பரப்பளவு 525 சதுர மீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்க வேண்டும். அதன் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும் ?

செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் இவற்றின் தொகை 50 மீட்டர் அல்லவா. அப்போது, ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x மீட்டர் என எடுத்தால், மற்ற பக்கத்தின் நீளம் $50 - x$ மீட்டர்; பரப்பளவு $x(50-x) = 50x - x^2$ சதுர மீட்டர். அப்போது பிரச்சனையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$50x - x^2 = 525$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்னவாக வேண்டும்?

$50x - x^2$ ஐ வர்க்க வடிவில் எழுத இயலாது அல்லவா. சமன்பாட்டைச் சற்று மாற்றி எழுதலாம். $50x$ என்ற எண்ணிலிருந்து x^2 ஐக் கழித்தால் 525 கிடைக்க வேண்டுமெனில், அதைத் திருப்பிக் கழித்தால் அதன் குறையான -525 கிடைக்க வேண்டும் அல்லவா. அப்போது பிரச்சனையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$x^2 - 50x = -525$ ஆக வேண்டும் எனில் x என்னவாக இருக்க வேண்டும் ?

இனி $x^2 - 50x$ உடன் ஓர் எண்ணைக் கூட்டி வர்க்க வடிவிலாக்க வேண்டும். கூட்ட வேண்டிய எண் எது ?

$$x^2 - 50x + 625 = (x - 25)^2$$

இனி நம்முடைய பிரச்சனைக்குப் பின்வருமாறு தீர்வு காணலாம்:

$$\begin{aligned} x^2 - 50x &= -525 \\ x^2 - 50x + 625 &= -525 + 625 = 100 \\ (x - 25)^2 &= 100 \\ x - 25 &= 10 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

அதாவது, செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் 35 மீட்டரும் 15 மீட்டரும்.

இந்தக் கணக்கை வேறொரு முறையிலும் செய்யலாம்;

சுற்றளவு 100 மீட்டர் உள்ள சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 25 மீட்டரல்லவா; எனவே, பரப்பளவு 625 சதுர மீட்டர்.

கணக்கில் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 525 சதுர மீட்டர் அல்லவா; எனவே அது சதுரமல்ல. அதனால் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளம் 25 மீட்டருமல்ல.

இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் 25 மீட்டரைவிட அதிகம் எனில், சுற்றளவு 100 மீட்டரைவிட அதிகமாகும் ; இரண்டும் 25 மீட்டரைவிடக் குறைவு எனில், சுற்றளவு 100 மீட்டரைவிடக் குறைவாகும். அப்போது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 25 மீட்டரைவிட அதிகமாகவும், மற்ற பக்கத்தின் நீளம் 25 மீட்டரைவிடக் குறைவாகவும் இருக்க வேண்டும்.

இந்த நீளங்களின் தொகை 50 ஆக வேண்டுமெனில் (ஏன்?), கூடியதும் குறைந்ததும் ஒரே அளவில் இருக்க வேண்டும்.

அது x மீட்டர் என எடுத்தால், பக்கங்களின் நீளம் $25 + x$ மீட்டர், $25 - x$ மீட்டர் என ஆகும்;

பரப்பளவு $(25 + x)(25 - x)$ சதுர மீட்டர்.

அப்போது கணக்கின் இயற்கணித வடிவம் பின்வருமாறு ஆகும்:

$(25 + x)(25 - x) = 525$ ஆக வேண்டும் எனில் x என்ன ஆக வேண்டும் ?

இதில் $(25 + x)(25 - x)$ என்பதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் அல்லவா.

$$(25 + x)(25 - x) = 625 - x^2$$

(எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசம வாக்கியங்கள்** என்ற பாடத்தில் **வர்க்க வித்தியாசம்** என்ற பகுதி).

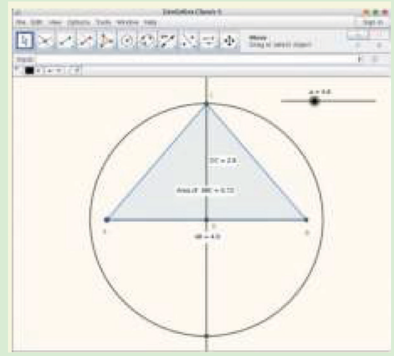
இதைப் பயன்படுத்தி வினாவை பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$625 - x^2 = 525$ ஆக வேண்டும் எனில் x என்ன?

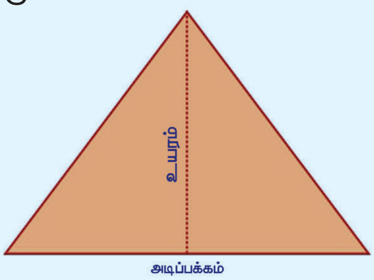
இதிலிருந்து $x^2 = 625 - 525 = 100$ என்றும், தொடர்ந்து $x = 10$ என்றும் காணலாம் அல்லவா.

அதாவது, பக்கங்களின் நீளம் $25 + 10 = 35$ மீட்டரும் $25 - 10 = 15$ மீட்டரும்.

a என்ற பெயரில் min = 2, max = 10 ஆன ஒரு சிலைடர் உருவாக்கி, நீளம் a ஆன ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மையப்புள்ளியையும் செங்குத்து இரு சமவெட்டியையும் அடையாளப்படுத்தவும். மையப்புள்ளியை மையமாகவும் ஆரம் a − 2 ஆன ஒரு வட்டம் வரையவும். வட்டம் செங்குத்து இருசமவெட்டியுடன் சந்திக்கும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி முக்கோணத்தை பூர்த்தி செய்யவும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவை அடையாளப்படுத்தவும். சிலைடரின் மதிப்பை மாற்றிப் பார்க்கவும். பரப்பளவு எப்போது 12 ஆகும்?



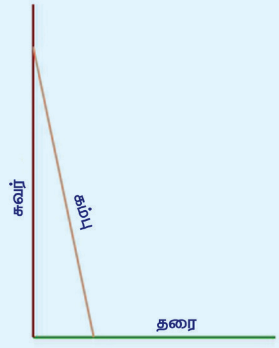
(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது போல் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் உருவாக்க வேண்டும்.



உயரம், அடிப்பபக்கத்தை விட 2 மீட்டர் குறைவு ஆக வேண்டும்; பரப்பளவு 12 சதுர மீட்டர் ஆக வேண்டும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் என்னவாக இருக்க வேண்டும் ?

(2) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கில் இருந்து ஒரு சென்டிமீட்டர் குறைத்ததே அதன் செங்குத்துப் பக்கம்; இரண்டு மடங்குடன் ஒரு சென்டிமீட்டர் கூட்டியதே அதன் கர்ணம். பக்கங்களின் நீளம் எவை ?

(3) 2.6 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கம்பு சுவரில் சாய்வாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பின் அடிப்பக்கம், சுவரிலிருந்து 1 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது. கம்பின் அடிப்பக்கத்தைச் சற்று முன்னோக்கி நகர்த்தியபோது, மேல் பக்கம் அதே தூரம் கீழ் நோக்கி நகர்ந்தது. எவ்வளவு தூரம் முன்னோக்கி நகர்த்தப்பட்டது ?



(4) அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கற்பலன் 195 எனில் எண்கள் எவை ?

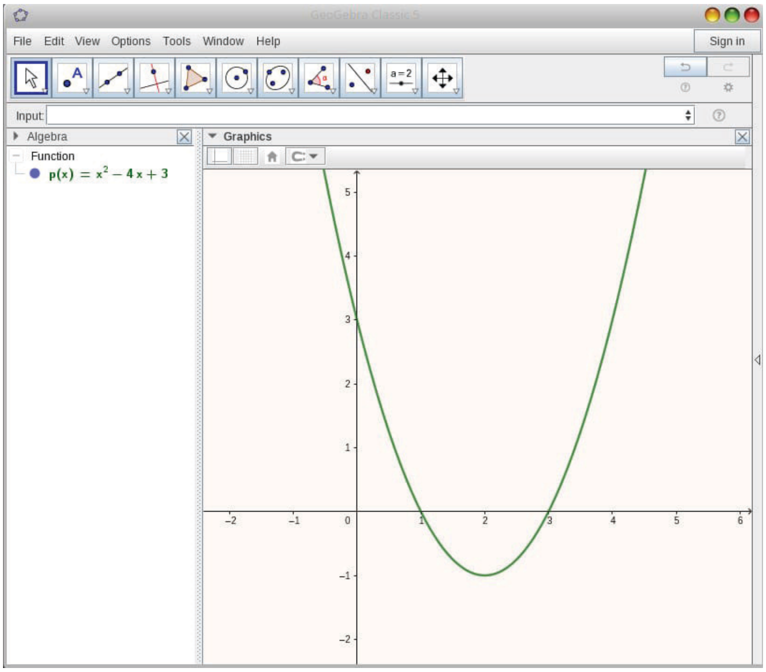
(5) 5, 7, 9, ... என்ற கூட்டுத் தொடரின் முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 140 கிடைக்கும் ?

இரண்டு விடைகள்

இருபடி பல்லுறுப்புகளின் பட வடிவத்தை ஒன்பதாம் வகுப்பில் **பல்லுறுப்புப் படங்கள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்தோம் அல்லவா (**இருபடி பல்லுறுப்புகள்** என்ற பாகம்).

எடுத்துக்காட்டாக, $p(x) = x^2 - 4x + 3$

என்ற பல்லுறுப்பின் படம் ஜியோஜிப்ராவில் பின்வருமாறு வரைந்து கிடைக்கும்.



பல்லுறுப்பின் படம் கிடைமட்டமான கோட்டை வெட்டி செல்வது, 1, 3 ஆகிய எண்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் வழி அல்லவா.

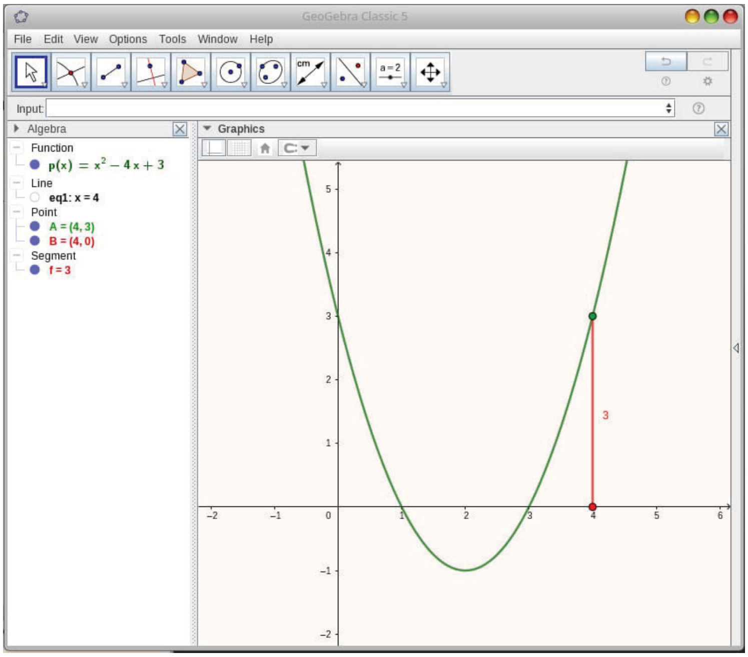
அப்போது $p(1)$, $p(3)$ இவை எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

பொதுவாக, கிடைமட்டமான கோட்டில் x என்ற எண்ணை அடையாளப்படுத்திய புள்ளியை எடுத்தால், இதிலிருந்து பல்லுறுப்பின் பட வடிவத்திற்கு உள்ள உயரமல்லவா $p(x)$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$p(4) = 4^2 - (4 \times 4) + 3 = 3$$

எனக் கணக்கீடு செய்யலாம். படத்திலிருந்து, கிடைமட்டமான கோட்டில் 4 என்ற புள்ளியிலிருந்து பல்லுறுப்பின் பட வடிவத்தில் உள்ள உயரம் 3 என்றும் கணக்கீடு செய்யலாம்.:



கிடைமட்டமான கோட்டில் 1, 3 இடங்களிலிருந்துள்ள இந்த உயரம் பூஜ்ஜியம் அல்லவா. அப்போது, $p(1), p(3)$ இவை பூஜ்ஜியமா ?

பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும்:

$$p(1) = 1^2 - (4 \times 1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$p(3) = 3^2 - (4 \times 3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

இவ்வாறு படம் வரையாமலேயே $p(x) = 0$ ஆகும் x, எந்த எண் என்று இயற்கணிதம் மூலம் கணக்கீடு செய்ய இயலுமா ?

வினா பின்வருமாறு:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ஆக வேண்டும் எனில் x என்ன ஆக வேண்டும் ?

முன்பு செய்த கணக்குகள் போல இதைச் செய்ய இயலுமா?

$x^2 - 4x + 3$ உடன் ஏதேனும் எண்ணைக் கூட்டி $(x - a)^2$ என்ற வடிவத்தில் ஆக்க இயலுமா ?

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

எனத் தெரியும் அல்லவா. இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(x^2 - 4x + 3) + 1 = (x - 2)^2$$

இனி நமக்குத் தேவையான x கணக்கீடு செய்யலாம் அல்லவா.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 + 1 = 0 + 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

அதாவது, முன்பு கண்டுபிடித்தது போல, $p(3) = 0$

ஆனால், $p(1) = 0$ என்றும் முன்பு பார்த்தோம் அல்லவா. வேறொரு முறையில் கூறினால், $x = 1$ என்பது $x^2 - 4x + 3 = 0$ சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

இந்த விடை கிடைக்காதது ஏன் ?

இயற்கணித முறையில் தீர்வு கண்டுபிடித்த வழிமுறைகளில் மீண்டும் ஒரு முறை பார்க்கலாம். இதில் ஓர் இடத்தில்

$$(x - 2)^2 = 1$$

எனக் கிடைத்ததல்லவா ?

அதிலிருந்து $x - 2 = 1$ எனவும் எழுதினோம்.

ஒரு எண்ணின் வர்க்கம் 1 எனில் எண் 1 மட்டும்தான் ஆகுமா ?

(-1) இன் வர்க்கம் என்ன ?

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

(ஒன்பதாம் வகுப்பில் **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **ஊசலாட்டம்** என்ற பகுதி).

அப்போது நம்முடைய கணக்கில்,

$$(x-2)^2 = 1$$

என்பதிலிருந்து

$$x-2 = 1 \text{ அல்லது } x-2 = -1$$

என்று கூற இயலும். இதில்

$x-2 = 1$ என எடுத்தால், $x = 1+2 = 3$

$x-2 = -1$ என எடுத்தால், $x = -1+2 = 1$

இப்போது இயற்கணித முறையிலும் $p(x) = 0$ ஆக x எடுக்கக்கூடிய இரண்டு எண்களும் கிடைத்ததல்லவா?

அப்போது வேறொரு வினா: இதுவரை செய்த கணக்குகளில் எல்லாம் இவ்வாறு குறை வர்க்கமூலம் எடுத்திருந்தால், வேறொரு விடையும் கிடைத்திருக்குமா?

எடுத்துக்காட்டாக, முன்பு செய்த ஒரு செவ்வகக் கணக்கைப் பார்ப்போம்: பெரிய பக்கத்திற்குச் சிறிய பக்கத்தைவிட இரண்டு மீட்டர் அதிக நீளமும், பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டருமான செவ்வகம்.

இதன் பக்கங்களைக் கணக்கிட சிறிய பக்கத்தின் நீளம் x மீட்டர் என எடுத்தால், $(x+1)^2 = 225$ எனக் கிடைக்கும் எனப் பார்த்தோம். தொடர்ந்து $x+1 = 15$ என எடுத்து, சிறிய பக்கத்தின் நீளம் 14 மீட்டர் எனக் கணக்கீடு செய்தோம்.

இயற்கணிதத்தை மட்டும் பார்த்தால் $x+1 = -15$ என்றும் ஆகலாம்: அதாவது $x = -16$

ஆனால் இந்தக் கணக்கில் x செவ்வகத்தின் பக்கமானதால், அது ஒரு மிகை எண்ணாகும், அப்போது $x = -16$ என்ற விடை செவ்வக கணக்கிற்கு உகந்ததல்ல.

முன்பு செய்த வேறொரு செவ்வகக் கணக்கைப் பார்ப்போம்: சுற்றளவு 100 மீட்டரும், பரப்பளவு 525 சதுர மீட்டரும் ஆன செவ்வகம்.

இதில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x மீட்டர் என எடுத்தால் $(x-25)^2 = 100$ எனக் கண்டுபிடித்தோம். இதிலிருந்து, $x-25 = 10$ என எடுத்து, ஒரு பக்கம் 35 மீட்டர், மற்ற பக்கம் $50-35 = 15$ மீட்டர் என்றும் கணக்கீடு செய்தோம்.

குறைவர்க்கமூலத்தை எடுத்தால் ?

$x-25 = -10$ என்றும் இதிலிருந்து $x = 15$ என்றும் கிடைக்கும். அதாவது, ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 15 மீட்டர் என்றும் மற்ற பக்கத்தின் நீளம் $50-15 = 35$ என்றும் கிடைக்கும்.

அப்போது இந்தக் கணக்கில் இரண்டு வர்க்கமூலங்களில் எதை எடுத்தாலும் ஒரே செவ்வகமே கிடைக்கிறது. பொதுவாகக் கூறினால், ஒரு நடைமுறை பிரச்சனையை இயற்கணித சமன்பாடாக்கிக் கணித முறையில் மட்டும் சிந்திக்கும்போது, ஒன்றுக்கு அதிகம் விடைகள் கிடைக்கலாம். இவற்றில் சில மட்டுமோ அல்லது அனைத்துமோ நடைமுறை பிரச்சனைக்குப் பொருத்தமானதல்ல என்றும் இருக்கலாம்.

அப்போது சாதாரணமாக இயற்கணித முறையில் எல்லா விடைகளும் கண்டுபிடிப்பதும், தொடர்ந்து இவற்றிலிருந்து சூழலுக்குப் பொருத்தமானவற்றை மட்டும் எடுப்பதே வழக்கம்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

99, 97, 95, ... என்ற கூட்டுத் தொடரில் முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 900 கிடைக்கும் ?

இந்தத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு $101 - 2n$ எனவும், அதிலிருந்து முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$101n - n(n+1) = 100n - n^2$$

என்றும் கணக்கீடு செய்யலாம் அல்லவா. அப்போது வினாவின் இயற்கணித வடிவத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$100n - n^2 = 900$ ஆக வேண்டும் எனில் n எதுவாக இருக்க வேண்டும் ?

இதைப் பின்வருமாறு கணக்கீடு செய்யலாம்:

$$\begin{aligned} 100n - n^2 &= 900 \\ n^2 - 100n &= -900 \\ n^2 - 100n + 50^2 &= -900 + 2500 \\ (n-50)^2 &= 1600 \end{aligned}$$

இதிலிருந்து என்ன கிடைக்கிறது ?

1600 என்பது 40 னுடையவும் -40 னுடையவும் வர்க்கமல்லவா.

அப்போது மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் இருந்து

$n - 50 = 40$ அல்லது $n - 50 = -40$

என இரண்டு விடைகள் கிடைக்கும். அதாவது

$n = 90$ அல்லது $n = 10$

அப்போது இந்தக் கூட்டுத் தொடரின் முதல் 10 உறுப்புகளைக் கூட்டினாலும், முதல் 90 உறுப்புகளைக் கூட்டினாலும் 900 தான் கிடைக்கும்.

(1) ஓர் எண்ணையும், அதனுடன் 2 கூட்டியதையும் பெருக்கியபோது 168 கிடைத்தது. எண்கள் எவை ?

(2) தொகை 4 உம், பெருக்கற்பலன் 2 உம் ஆன இரண்டு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) 55, 45, 35, ... என்ற கூட்டுத் தொடரைப் பார்க்கவும்.

(i) இதில் முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 175 கிடைக்கும் ?

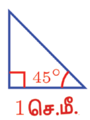
(ii) முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 180 கிடைக்கும் ?

(iii) முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 0 கிடைக்கும் ?

6 முக்கோணவியல்

கோணங்களும் பக்கங்களும்

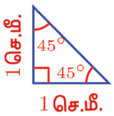
இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



இதன் பிற இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு ?

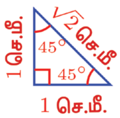
இரண்டு கோணங்கள் $90°$ உம், $45°$ உம் ஆனதால், மூன்றாவது கோணம் $45°$ ஆகும்.

இரண்டு கோணங்கள் சமமானதால், அவற்றின் எதிப்பக்கங்களும் சமமாகும். (எட்டாம் வகுப்பில் **சமமுக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இருசமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

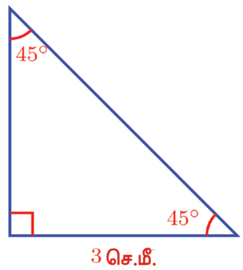


மூன்றாவது பக்கம் ?

அதன் நீளம் $\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர் என்று ஒன்பதாம் வகுப்பில் **புதிய எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **அளவுகளும் எண்களும்** என்ற பகுதியில் கற்றிருக்கிறோம்.



இனி பின்வரும் முக்கோணத்தின் பிற இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கீடு செய்யலாமா ?

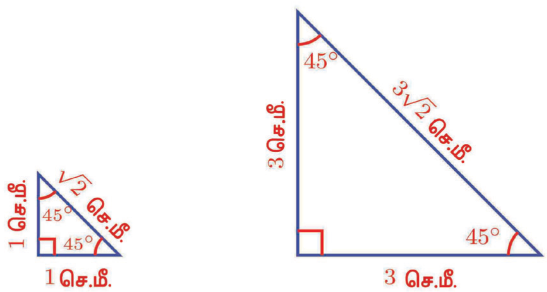


முதல் முக்கோணத்திற்கும் இந்த முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்களல்லவா ?

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களில், சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் நீளம் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்திலாகும். (அதாவது, ஒரே மடங்கு அல்லது பாகம் ஆகும்) என்று ஒன்பதாம் வகுப்பில் **வடிவொத்த முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் கற்றிருக்கிறோம்.

இங்கு பெரிய முக்கோணத்தில் $45°$ கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம், சிறிய முக்கோணத்தின் அதே கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கத்திற்கு மூன்று மடங்காகும்.

அப்போது பெரிய முக்கோணத்தில் பிற பக்கங்களின் நீளமும் இதைப்போலச் சிறிய முக்கோணத்தில் உள்ள பக்கங்களின் மூன்று மடங்காகவே வேண்டும்:



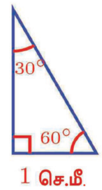
இதுபோல, முக்கோணங்கள் $45°, 45°, 90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும், ஒரு பக்கத்தின் நீளம் தெரியுமெனில் பிற இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கீடு செய்யலாம் அல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக இத்தகைய ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பக்கம் $\frac{1}{2}$ மீட்டர் எனில் பிற இரண்டு பக்கங்கள் $\frac{1}{2}$ மீட்டரும் $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ மீட்டரும் ஆகும்.

இதைப் பொதுவாக எவ்வாறு கூறலாம் ?

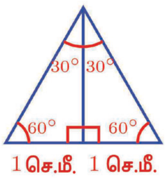
கோணங்கள் $45°, 45°, 90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் இரண்டு சிறிய பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும்; இந்த நீளத்தின் $\sqrt{2}$ மடங்கே பெரிய பக்கத்தின் நீளம்

இனி பின்வரும் முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



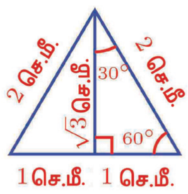
இதில் பிற இரண்டு பக்கங்களை எவ்வாறு கணக்கீடு செய்யலாம் ?

இது போன்ற வேறொரு முக்கோணத்தைச் சேர்த்து வைத்தால் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா.

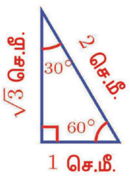


இந்தச் சமபக்க முக்கோணத்தில் அடிப்பக்கம் 2 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், பிற இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களும் 2 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

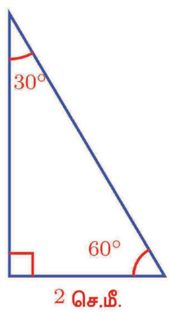
இதன் உயரம் $\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டர் என்றும் ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் (**புதிய எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **அளவுகளும் எண்களும்** என்ற பகுதி).



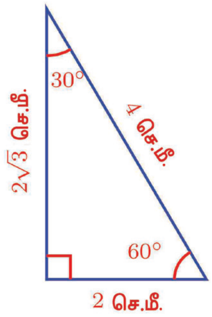
அப்போது முதலில் வரைந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் எல்லாம் கிடைத்ததல்லவா.



இனி கோணங்கள் $30°$, $60°$, $90°$ உள்ள வேறொரு முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



இதில் 30° கோணத்தின் எதிர்பக்கம், சிறிய முக்கோணத்தின் 30° கோணத்தின் எதிர்பக்கத்தின் இரண்டு மடங்காகும். அப்போது மற்ற கோணங்களின் எதிர்பக்கங்களும் இரண்டு மடங்காக வேண்டும் அல்லவா.

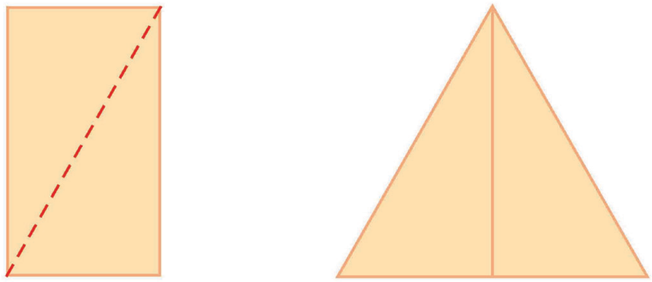


இத்தகைய முக்கோணங்களில் எல்லாம் பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எவ்வாறு கூறலாம் ?

கோணங்கள் 30°, 60°, 90° உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் மிகச்சிறிய பக்கத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்கு நடுத்தரப் பக்கம்; மிகச் சிறிய பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கு மிகப்பெரிய பக்கம்.

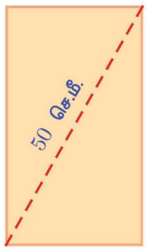
இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கு செய்யலாம்:

ஒரு செவ்வகப் பலகையை மூலைவிட்டத்தின் வழியாக வெட்டி கீழே காட்டி இருப்பது போல் மாற்றி அடுக்கி ஒரு சமபக்க முக்கோணம் உருவாக்க வேண்டும்:

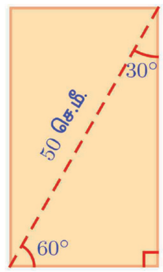


முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 50 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும். செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

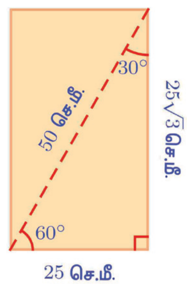
செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டமல்லவா முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம். அப்போது அது 50 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும்.



முக்கோணங்களைச் சேர்த்து வைக்கும்போது கிடைக்க வேண்டியது சமபக்க முக்கோணம் ஆனதால், இந்த முக்கோணங்களின் கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ ஆக வேண்டும்.



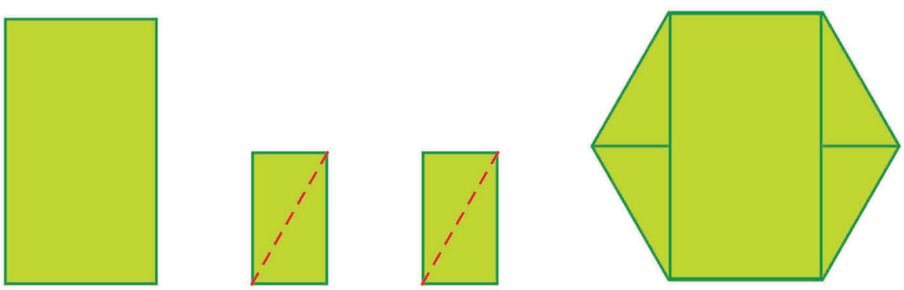
இத்தகைய ஒரு முக்கோணத்தில், மிகச் சிறிய பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கல்லவா மிகப்பெரிய பக்கம். இங்கு மிகப் பெரிய பக்கத்தின் நீளம் 50 சென்டிமீட்டர்; அப்போது மிகச் சிறிய பக்கத்தின் நீளம் 25 சென்டிமீட்டர்; மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் ?



இப்போது செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் கிடைத்ததல்லவா ?

இதுபோலப் பின்வரும் கணக்கைச் செய்து பார்க்கவும்:

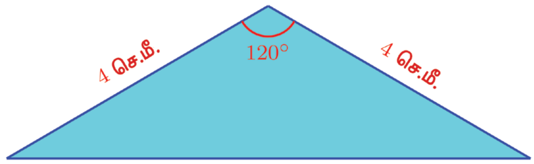
இரண்டு செவ்வகங்களை மூலைவிட்டங்கள் வழியாக வெட்டி முக்கோணங்கள் ஆக்கி, வேறொரு செவ்வகத்துடன் சேர்த்து வைத்து, கீழே தரப்பட்டுள்ளது போல ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் உருவாக்க வேண்டும்:



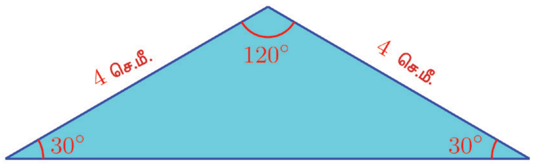
அறுகோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 30 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டுமெனில் செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும் ?

சில பரப்பளவுகளைக் கணக்கீடு செய்வதற்கும் இக்கருத்துகளைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாகப் பின்வரும் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

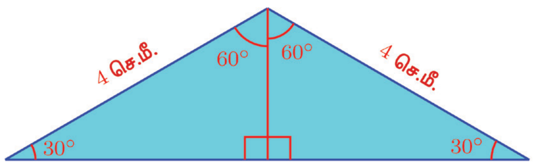
கீழே வரையப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு ?



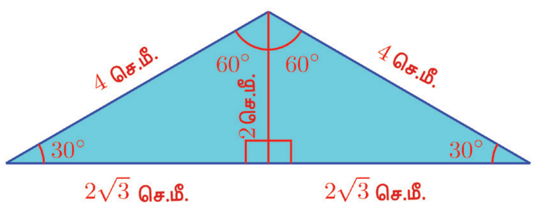
இந்த முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் ஒரே நீளமானதால் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள கோணங்களும் ஒரே அளவாக இருக்கும். மேலே உள்ள கோணம் $120°$ ஆனதால், பிற இரண்டு கோணங்களின் தொகை $60°$; அவை சமமானதால் ஒவ்வொன்றும் $30°$.



மேல் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடு மேலே உள்ள கோணத்தைச் சமமாக வெட்டுமல்லவா (எட்டாம் வகுப்பில் **சமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரு சமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி).



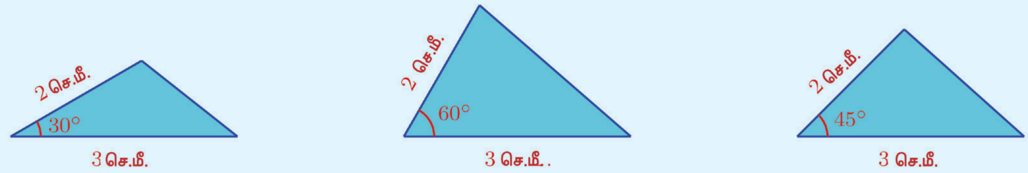
இனி இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும் முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் நீளத்தையும் கணக்கீடு செய்யலாம் அல்லவா.



அப்போது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

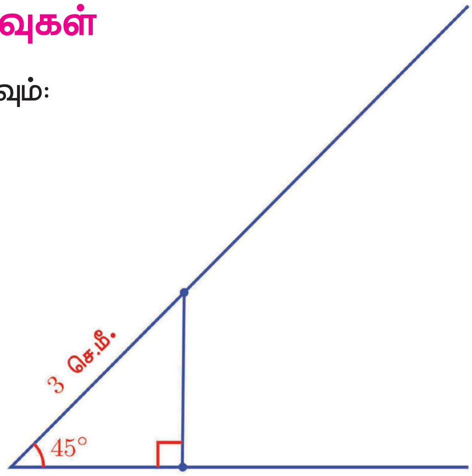
(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள இணைகரங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் காண்க.

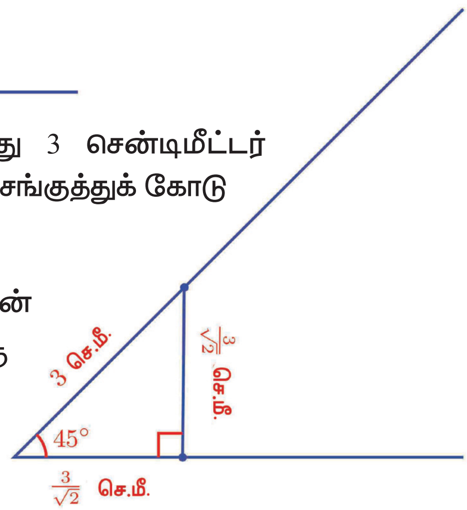


புதிய கோண அளவுகள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

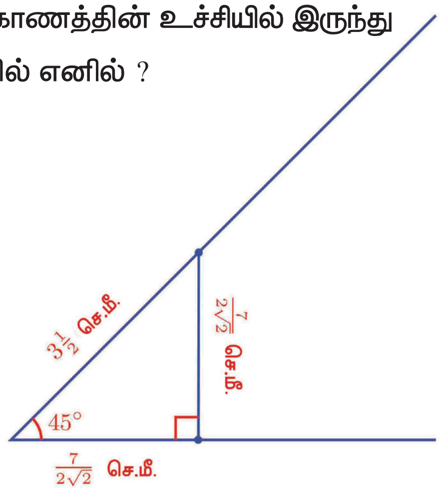


45° கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில், உச்சியிலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து, மற்ற பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.



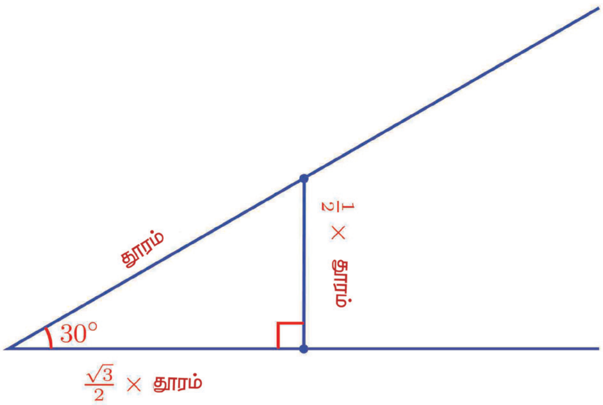
இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரமும் கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரமும் $\frac{3}{\sqrt{2}}$ சென்டிமீட்டர் என்று முன் பகுதியில் உள்ள கணக்குகளிலிருந்து கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா.

முதலில் எடுத்த புள்ளி, கோணத்தின் உச்சியில் இருந்து $3\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் எனில் ?

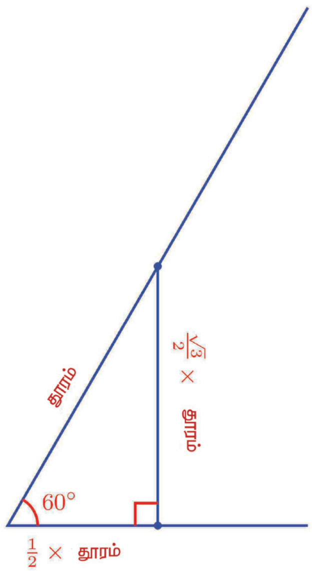


பொதுவாகக் கூறினால் முதல் புள்ளி கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் எந்த தூரத்தில் எடுத்தாலும், மற்ற பக்கத்திற்குள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் உயரமும், உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரமும், முதலில் எடுத்த தூரத்தின் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ பாகமாகவே இருக்கும்.

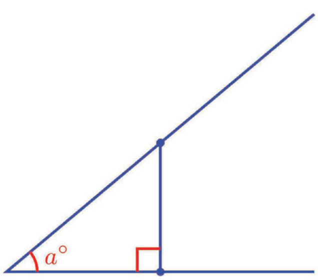
$45°$ கோணத்திற்குப் பதில், $30°$ கோணமானால் ?

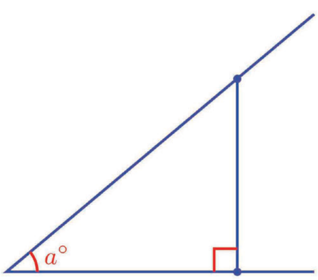


$60°$ கோணமானால் ?



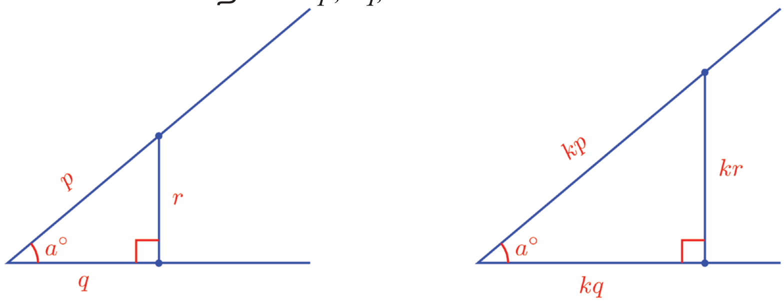
பிற கோணங்களை எடுத்தாலும் இதுபோல செங்குத்துக் கோட்டின் உயரமும், உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரமும், புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் குறிப்பிட்ட பாகமாக இருக்குமா? இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:





ஒரு கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு, உச்சியிலிருந்து வேறுபட்ட தூரங்களில், இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்து, அவற்றிலிருந்து மற்ற பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு கிடைக்கின்ற இரண்டு முக்கோணங்களின் கோணங்கள் எல்லாம் சமமானதினால், பக்கங்களின் நீளங்கள் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆகும். அப்போது இடது முக்கோணத்தில் உள்ள பக்கங்களின் நீளங்களை அளவுகளின் வரிசையில் p, q, r என எடுத்தால், வலது முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் இதே வரிசையில், p, q, r என்ற எண்களை ஒரே எண்ணால் பெருக்கியது ஆகும். இந்த எண்ணை k என எடுத்தால், வலது முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் kp, kq, kr:



இடது முக்கோணத்தில் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், உச்சியில் இருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் $\frac{r}{p}$ பாகமும் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக்கோட்டின் அடிபக்கத்திற்குள்ள தூரம், புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் $\frac{q}{p}$ பாகமும் அல்லவா.

வலது முக்கோணத்தில் ?

இந்தப் பாகங்கள் $\frac{kr}{kp} = \frac{r}{p}$ யும் $\frac{kq}{kp} = \frac{q}{p}$ யும் ஆகும்.

அதாவது, இந்தப் பாகங்கள் மாறுவதில்லை.

அப்படியானால் பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

> ஒரு கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு, உச்சியிலிருந்து பல தூரங்களில் புள்ளிகள் எடுத்தால், அந்தப் புள்ளிகளிலிருந்து மற்ற பக்கத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் உயரமும், உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப்பக்கங்களுக்கு உள்ள தூரமும் மாறும்; ஆனால் இவை ஒவ்வொன்றும் புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் எத்தனை பாகம் என்பது மாறுவதில்லை.

$45°, 60°, 30°$ என்னும் கோணங்களில் இந்தப் பாகங்கள் கணக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளது அல்லவா; பிற கோணங்களில் இவற்றைக் கணக்கீடு செய்வது அவ்வளவு எளிதல்ல. ஆனால் பல ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே கணித அறிஞர்கள் $90°$ ஐ விட குறைவான எல்லா கோணங்களிலும் இந்தப் பாகங்களைக் கணக்கீடு செய்வதற்கான முறைகளைக் கண்டுபிடித்ததுடன், அவ்வாறு கணக்கீடு செய்த எண்களை அட்டவணைப்படுத்தவும் செய்தனர்.

எடுத்துக்காட்டாக, $40°$ கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து பிற பக்கத்திற்குள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் உயரம், உச்சியிலிருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் தோராயமாக 0.6428 பாகம் என்றும், உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்குள்ள தூரம், புள்ளிக் குள்ள தூரத்தின் 0.7660 பாகம் என்றும் இந்த அட்டவணையிலிருந்து அறியலாம்.

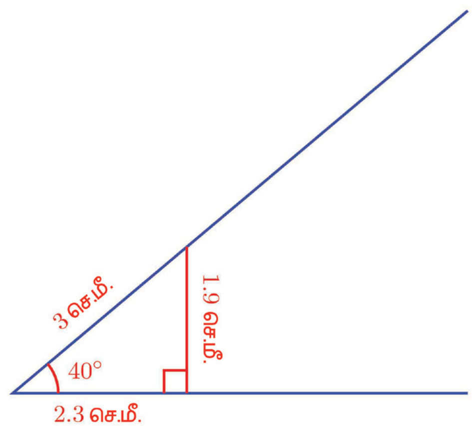
அப்போது 40° கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு, உச்சியிலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒரு புள்ளி எடுத்து, பிற பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால், இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் தோராயமாக

$$3 \times 0.6428 \approx 1.9 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

என்றும், உச்சியிலிருந்து இந்தச் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிபக்கத்திற்குள்ள தூரம் தோராயமாக

$$3 \times 0.7660 \approx 2.3 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

என்றும் காணலாம்.



புள்ளிக்குள்ள தூரம் 3 மீட்டர் எனில், செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் தோராயமாக 1 மீட்டர், 928 மில்லி மீட்டர் என்றும், உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரம் தோராயமாக 2 மீட்டர், 298 மில்லி மீட்டர் என்றும் கணக்கிடலாம்.

இவ்வாறு கணக்கீடு செய்யும் எண்களுக்குச் சிறப்புப் பெயர்கள் உண்டு. இப்போது பார்த்த கணக்கில், 0.6428... என்ற எண், 40° கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து மற்ற பக்கத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், உச்சியில் இருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் எத்தனை பாகம் எனக் காட்டும் புள்ளியல்லவா. இதை **40° கோணத்தின் சைன் (Sine of 40°)** எனக் கூறுவர்; சுருக்கமாக $\sin 40^\circ$ என எழுதலாம். அதாவது

$$\sin 40^\circ \approx 0.6428$$

இரண்டாவது எண்ணான 0.7660.... என்பது, 40° கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்குள்ள தூரம் புள்ளிக்குள்ள தூரத்தின் எத்தனை பாகம் எனக் குறிக்கும் எண்ணாகும். இதை, **40°** யின் கொசைன் **(Cosine of 40°)** எனக் கூறுவதோடு, $\cos 40^\circ$ எனச் சுருக்கி எழுதலாம். அதாவது

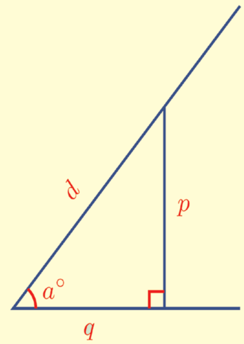
$$\cos 40^\circ \approx 0.7660$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

a° கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து d தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து பிற பக்கத்திற்குள்ள செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் p யும் கோணத்தின் உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிபக்கத்திற்குள்ள தூரம் q யும் ஆனால்,

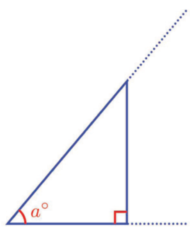
$$\sin a^\circ = \frac{p}{d}$$

$$\cos a^\circ = \frac{q}{d}$$



இதில் கவனிக்க வேண்டியது, கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் பல புள்ளிகள் எடுக்கும்போது d, p, q என்னும் எண்கள் எல்லாம் மாறும்; ஆனால் $\sin a^\circ$, $\cos a^\circ$ என்னும் எண்கள் மாறுவதில்லை. கோணத்தின் அளவான a° மாறினால் மட்டுமே இவை மாறும். அதாவது, இவை கோணத்தின் அளவைக் குறிப்பிடும் எண்களாகும்.

sin, cos இவற்றைச் சற்று வித்தியாசமாக வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். அந்தக் கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்ற பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரையும்போது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா.

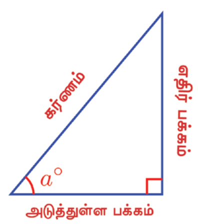


கோணத்தின் உச்சியையும் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு இந்த முக்கோணத்தின் கர்ணம். புள்ளியிலிருந்து பிற பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துக் கோடு, முக்கோணத்தின் a° கோணத்தின் **எதிர் பக்கமாகும் (Opposite side);** கோணத்தின் உச்சியையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்தையும் இணைக்கும் கோட்டை முக்கோணத்தின் a° கோணத்தின் **அடுத்துள்ள பக்கம் (Adjacent side)** எனக் கூறுவர். அப்போது $\sin a^\circ$, $\cos a^\circ$ இவற்றைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

ஒரு கோணம் a° ஆன செங்கோண முக்கோணத்தில்,

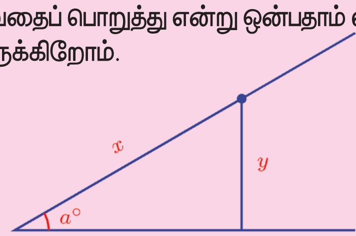
$$\sin a^\circ = \frac{\text{எதிர் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\cos a^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$



விகிதம்

ஒரு கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள புள்ளிகளை எல்லாம் எடுத்தால் பிற பக்கத்திலிருந்து உள்ள உயரம் மாறுவது கோணத்தின் உச்சியில் இருந்துள்ள தூரம் மாறுவதைப் பொறுத்து என்று ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம்.



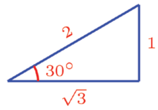
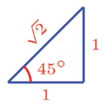
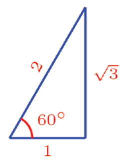
(**விகிதம்** என்ற பாடத்தில் **விகித மாற்றம்** என்ற பகுதி). இந்த மாற்றத்தில் விகித மாறிலி என்ன?

$\frac{y}{x}$ ஐ அல்லவா, $\sin a^\circ$ எனக் கூறுவது.

அதாவது, தூரம் மாறுவதைப் பொறுத்து உயரம் மாறுவதில் விகித மாறிலி தான் $\sin a^\circ$

இதுபோல $\cos a^\circ$ ஐயும் வேறொரு மாற்றத்தின் விகித மாறிலியாகக் கூறலாமா ?

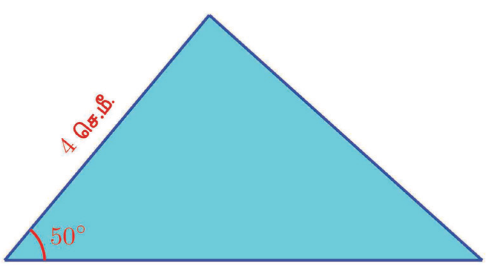
முதல் பகுதியில் ஒரு கோணம் $45°, 60°, 30°$ என இவ்வாறு உள்ள செங்கோண முக்கோணங்களைப் பற்றிக் கற்ற கருத்துக்களை sin, cos பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

கோணம்	படம்	சைன்	கொசைன்
$30°$		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$60°$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

($1°$ முதல் $89°$ வரை $1°$ இடைவெளிவிட்டு உள்ள எல்லாக் கோணங்களுடையவும் சைனும் கொசைனும் நான்கு தசம இடங்கள் துல்லியமாகப் பாடத்தின் இறுதியில் உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது).

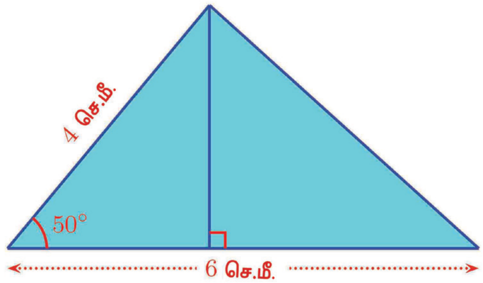
முதல் பகுதியில் செய்ததுபோலப் பரப்பளவுகளைக் கணக்கிட சைன் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கீடு செய்யலாம்:



ஜியோஜிப்ராவில், நீளம் 1 ஆன AB என்ற கோடு வரையுங்கள். ஒரு Angle சிலைடர் a உருவாக்கவும். "Angle with Given Size" ஐத் தேர்வு செய்து B, A ஆகியவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவாக a வழங்கவும். புதிய ஒரு புள்ளி B' கிடைக்கும். AB' ஐ இணைக்கவும். B வழியாக AB' க்கு ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரையவும், அது AB' உடன் சந்திக்கும் புள்ளி C ஐ அடையாளப்படுத்தவும். ABC என்ற முக்கோணத்தை வரையவும், பிறகு AB' ஐ மறைக்கவும். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். கோண அளவு மாறுவதற்கு ஏற்ப பக்கங்களின் நீளம் மாறுவதைக் காணலாம். இதில் BC இன் நீளம் கோண அளவின் sin அளவு AC இன் நீளம் கோண அளவின் cos அளவு ஆகும் (ஏன்?). இதன் மூலம் sine, cosine அளவுகளுக்கான ஒரு பட்டியலை உருவாக்கவும். sine, cosine எண்கள் அதிகபட்சம் எது வரை ஆகும்?

அதற்கு மேல் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோடு வரைய வேண்டும்:



கோணங்களின் சைன், கொசைன் மதிப்புகளைக் காண ஜியோ ஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தலாம். Input Bar இல் sin (30°) என்று கொடுத்தால் sin 30° கிடைக்கும். இதுபோலக் கொசைன் எண்களையும் காணலாம். (30° என்பது கிடைக்க 30 என்று தட்டச்சு செய்த பின் Input Bar வலது முனையில் உள்ள α சின்னத்தில் கிளிக் செய்து ° என்பதில் கிளிக் செய்தால்போதும்).

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அடிப்பக்கத்தினுடையவும் இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதி அல்லவா.

செங்குத்துக் கோட்டின் உயரத்தை எவ்வாறு காணலாம் ?

படத்தில் இடது பக்கம் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தில், $50°$ கோணத்தின் எதிர் பக்கம் அல்லவா இந்தச் செங்குத்துக் கோடு; எதிர் பக்கத்தின் நீளத்தைக் கர்ணத்தால் வகுத்தால் கிடைப்பது $\sin 50°$; அப்போது செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், கர்ணத்தை $\sin 50°$ ஆல் பெருக்கினதாகும்.

அதாவது $4 \times \sin 50°$

இனி அட்டவணையிலிருந்து

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

எனக் கிடைக்கும். அப்போது

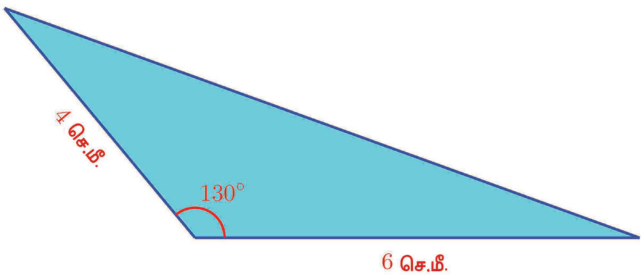
$$\text{உயரம்} \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

இனி பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா

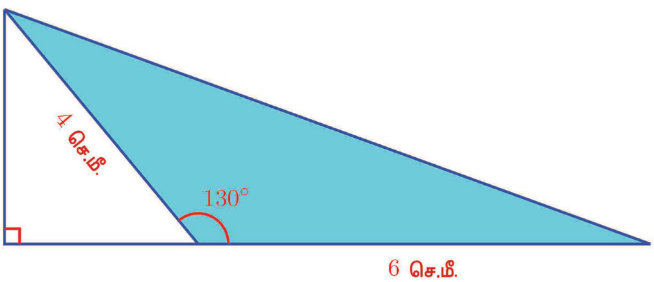
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19$$

அதாவது, பரப்பளவு தோராயமாக 9.19 சதுர சென்டிமீட்டர்.

இந்தக் கணக்கில் முக்கோணத்தின் கோணம் $50°$ க்குப் பதில் $130°$ ஆனால் ?



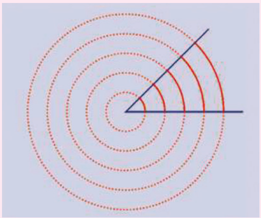
இதில் மேல் உச்சியில் இருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடு முக்கோணத்திற்கு வெளியே ஆகும்.



டிகிரி அளவு

ஒரு கோணத்தின் அளவு $45°$ டிகிரி என்றால் பொருள் என்ன ?

இந்த அளவுள்ள ஒரு கோணத்தின் உச்சி மையமான பல வட்டங்களை வரையலாம்; அவற்றில் எல்லாம் இந்தக் கோணத்தின் உள்ளே வரும் விற்களின் நீளங்களும் பல;



ஆனால் இந்த விற்கள் ஒவ்வொன்றும் அந்தந்த வட்டங்களின் $\frac{1}{8}$ பாகம் என்பதில் மாற்றமில்லை. இந்த $\frac{1}{8}$ ஐ 360 ஆல் பெருக்கியது 45.

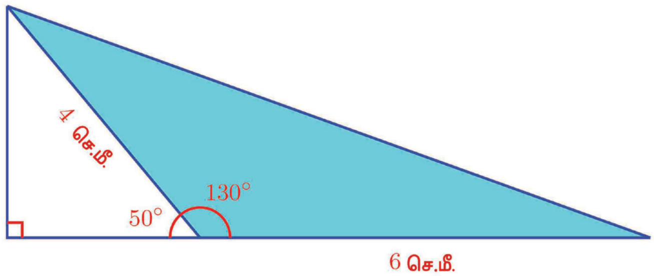
கோணத்தின் அளவு $60°$ ஆனால் ?

உச்சியை மையமாக எடுத்து வரையப்படும் அனைத்து வட்டத்தினுடையவும் $\frac{1}{6}$ பாகமே கோணத்தின் உள்ளே அமைவது. அதை 360 ஆல் பெருக்கியது 60.

பொதுவாகக் கூறினால் எந்தக் கோணத்தினுடையவும் டிகிரி அளவு என்பது அதன் உச்சியை மையமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டத்தில் கோணத்தின் உள்ளே அமையும் வில்லின் நீளத்தை வட்டத்தின் சுற்றளவால் வகுத்து, 360 ஆல் பெருக்கி கிடைக்கும் எண் ஆகும்.

இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தை எவ்வாறு கணக்கீடு செய்யலாம் ?

நமது முக்கோணத்திற்கு வெளியேயுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் 50° அல்லவா; அதன் எதிர் பக்கமே நமக்கு வேண்டிய செங்குத்துக் கோடு.



அப்போது முதல் கணக்கைப் போல, செங்குத்து கோட்டின் உயரம் $4 \sin 50° \approx 4 \times 0.766 = 3.064$ சென்டிமீட்டராகும். பரப்பளவும் முதல் கணக்கைப் போல

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்.}$$

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர், 10 சென்டிமீட்டரும்; அவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் 40°.

(i) இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) இதே பக்கங்களும், அவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் 140° யும் ஆன முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு ?

(2) ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டரும், அதிலுள்ள ஒரு கோணம் 100° ஆகும். அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

(3) ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர், 12 சென்டிமீட்டர் ஆகும்; அவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் 50° யும் ஆகும். அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

(4) ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டரும், அதில் ஒரு கோணம் 40° யும் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைய வேண்டும். இந்த 40° கோணத்திற்கு எதிரான பக்கத்தின் நீளம் குறைந்தபட்சம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும்?

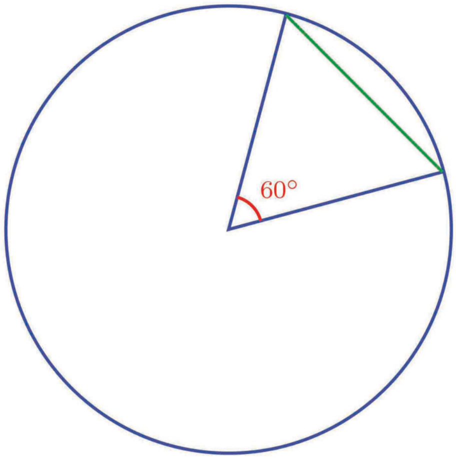
(5) பக்கம் 5 சென்டிமீட்டரும் ஒரு கோணம் 70° ஆன சாய்வு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

முக்கோணமும் வட்டமும்

வட்டத்தில் உள்ள ஒரு வில்லின் நீளத்தை மையக் கோணத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கீடு செய்யலாம் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **வட்டப் பகுதிகள்** என்ற பாடத்தில் **நீளமும் கோணமும்** என்ற பகுதி).

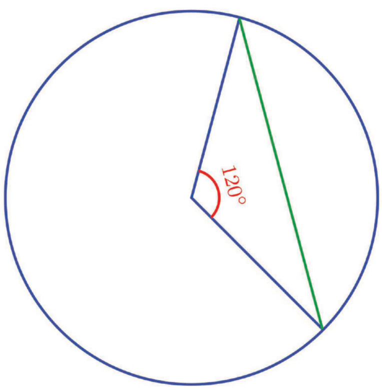
வட்டத்திலுள்ள ஒரு நாணின் நீளத்தை எவ்வாறு கணக்கீடு செய்யலாம் ?

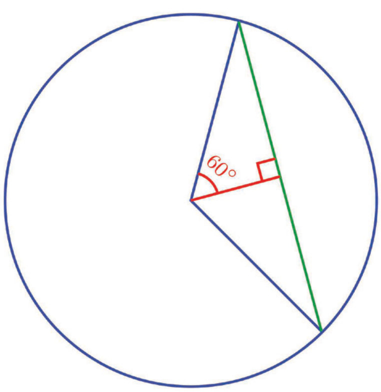
எடுத்துக்காட்டாக, மையக்கோணம் 60° உள்ள நாணின் நீளம், வட்டத்தின் ஆரத்திற்குச் சமம் என எளிதாகக் காணலாம் (எவ்வாறு ?).



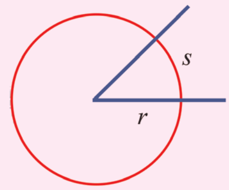
மையக்கோணம் 120° உள்ள நாணின் நீளம் ?

இதைக் கணக்கீடு செய்ய மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும். இது நாணையும் மையக் கோணத்தையும் சமபாகம் செய்யுமல்லவா (காரணம் ?).





கோணத்திற்கு வேறொரு அளவு



ஒரு கோணத்தின் டிகிரி அளவு என்றால் என்னவென்று பார்த்தோம் அல்லவா: ஒரு கோணத்தின் உச்சியை மையமாக எடுத்து பல அளவுகளிலுள்ள வட்டங்கள் வரைந்தால் அவற்றின் சுற்றளவும் கோணத்தின் உள்ளே உள்ள வில்லின் நீளமும் மாறும் எனினும் வட்டத்தின் எத்தனை பாகம் வில் என்பது மாறுவதில்லை. அதாவது, படத்தில் s உம் r உம் மாறவில்லை எனில், $\frac{s}{2\pi r}$ மாறவில்லை என்றும், அதை 360 ஆல் வகுத்ததே டிகிரி அளவு என்றும் கூறுவர். அதாவது, கோணின் டிகிரி அளவு $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$. இதில் s, r இவை மாறினாலும் 2π, 360 என்னும் எண்கள் மாறவில்லை அல்லவா. அப்போதும் கோணத்தை அளக்க $\frac{s}{r}$ எடுத்தால் போதுமல்லவா?

இந்த அளவே கோணத்தின் **ரேடியன் (Radian)** அளவு என்று கூறப்படுகிறது. அதாவது மேலே காணப்படும் படத்தில்,

கோணத்தின் ரேடியன் அளவு $= \frac{s}{r}$.

டிகிரி அளவைக் குறிப்பிட $^{\mathrm{o}}$ என்ற அடையாளம் அல்லவா பயன்படுத்தப் படுகிறது. ரேடியன் அளவைக் குறிப்பிட **rad** என எழுதுகிறோம்.

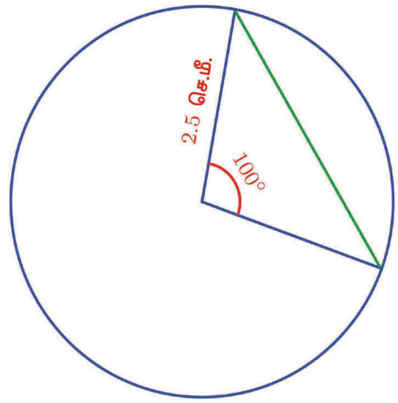
இந்தக் கருத்தை முதலாவது வெளியிட்டது பதினெட்டாம் நூற்றாண்டில் இங்கிலாந்தில் வாழ்ந்த ரோஜர் கோட்ஸ் (Roger Cotes) என்ற கணித மேதை ஆவார். ரேடியன் என்ற பெயர் அளித்தது, 19ஆம் நூற்றாண்டில் இங்கிலாந்தின் ஜேம்ஸ் தாம்சன் (James Thomson) என்ற இயற்பியல் அறிஞர் ஆவார்.

ஆரமும், நாணின் பாதியும், செங்குத்துக் கோடும் சேர்ந்து உருவாக்கும் செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் வட்டத்தின் ஆரம்; 60° கோணத்தின் எதிர்பக்கம், நாணின் பாதி.

அப்போது நாணின் பாதி, ஆரத்தின் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ பாகம் என்று காணலாம் அல்லவா.

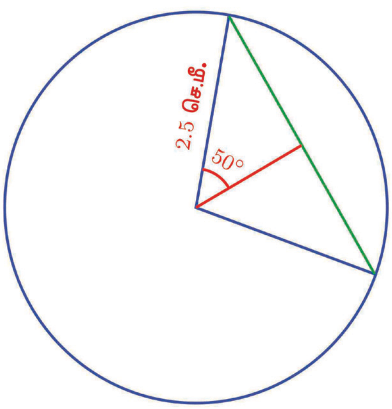
நாணின் நீளம், ஆரத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்கு.

மையக்கோணம் இரண்டு மடங்கு ஆகும்போது வில்லும் இரண்டு மடங்காகும் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. ஆனால், நாண் இரண்டு மடங்காகவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். அதாவது, மையக்கோணம் மாறுவதன் அளவு வீதத்தில் அல்ல, நாணின் நீளம் மாறுவது.



இனி இந்தப் படத்தில் உள்ள நாணின் நீளத்தைக் கணக்கீடு செய்வது எவ்வாறு ?

முன்பு செய்தது போல வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைந்து மையக் கோணத்தையும் நாணையும் பாதியாக்கலாம்;



இவ்வாறு கிடைக்கின்ற செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் 2.5 சென்டிமீட்டர். அப்போது 50° கோணத்தின் எதிர்பக்கம் $2.5 \times \sin 50^\circ$ சென்டிமீட்டர்

இது நாணின் பாதி அல்லவா. அப்போது நாணின் நீளம்

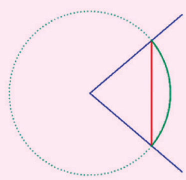
$$5 \times \sin 50^\circ \approx 5 \times 0.7660 \approx 3.8 \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

எந்த நாணினுடையவும் நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்க இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

நாணின் நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்க என்னென்ன செய்தோம் ?

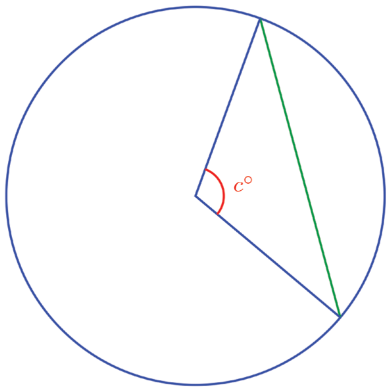
நேர்வழி

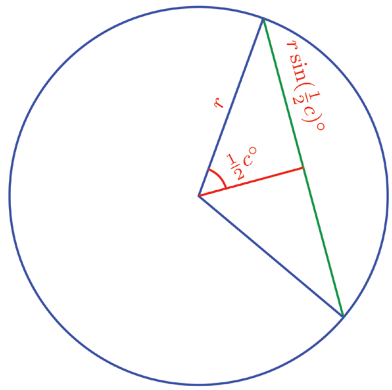
டிகிரி அளவானாலும், ரேடியன் அளவானாலும், கோணத்தின் அளவைக் குறிப்பிட பயன்படுத்துவது ஒரு வில்லின் நீளத்தை அல்லவா. அதற்குப் பதில் நாணின் நீளம் பயன்படுத்தும் கணக்கீடுகளை, B.C.E. இரண்டாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த கிரேக்கரான ஹிப்பார்க்கஸ் (Hipparchus) என்ற வானவியல் அறிஞர் செய்திருக்கிறார்.



வேறுபட்ட மையக் கோணங்கள் உள்ள நாண்களின் நீளங்களைக் காட்டும் ஒரு பெரிய அட்டவணையை இவர் எழுதியிருப்பதாகப் பிற்காலத்தில் வாழ்ந்த பல கணித மேதைகளும் கூறுகின்றார்கள் எனினும், அது கிடைக்கப்பெறவில்லை. C.E. இரண்டாம் நூற்றாண்டில் எகிப்தில் உள்ள கிளாடியஸ் தாளமி (Caludius Ptolemy) உருவாக்கிய இத்தகைய ஓர் அட்டவணை கிடைத்துள்ளது. இதில் ஆரம் 60ஆன ஒரு வட்டத்தில் $\frac{1}{2}^\circ$ இடைவிட்டு, 180°வரை உள்ள மையக் கோணங்கள் உருவாகும் நாண்களின் நீளங்களை மிகத் துல்லியமாக அவர் கணக்கீடு செய்திருக்கிறார்.

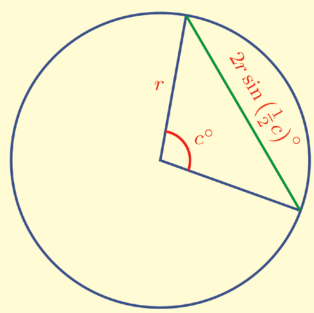
மையக் கோணத்தின் பாதியின் சைனை ஆரத்தால் பெருக்கியபோது, நாணின் பாதி கிடைத்தது. அதன் இரண்டு மடங்கு எடுத்தபோது, முழு நாணும் கிடைத்தது.





அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

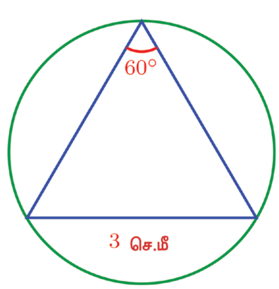
ஒரு வட்டத்தில் உள்ள எந்த நாணினுடையவும் நீளம் மையக் கோணத்தின் பாதியின் சைனை ஆரத்தால் பெருக்கியதன் இரண்டு மடங்காகும்



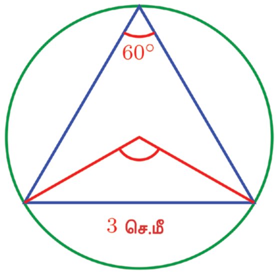
எடுத்துக்காட்டாகப் பின்வரும் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆன சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ?

படத்தைப் பார்க்கவும்:



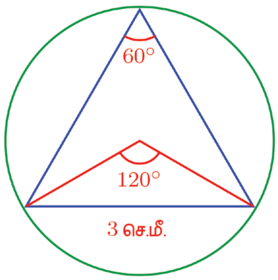
முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும், சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு நாண் ஆகும்; அதன் மையக்கோணம் என்ன ?



படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் இரண்டு முனைகளை இணைக்கும் வில்லின் மையக் கோணமே அடிப்பக்கமான நாணின் மையக் கோணம்.

வட்டத்தின் இந்த வில்லில் இல்லாத ஒரு புள்ளி முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி.

அப்போது **வட்டங்களும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **வில்லும் கோணமும்** என்ற பகுதியின் கருத்துப்படி, வில்லின் (நாணினுடையவும்) மையக் கோணம், $60° \times 2 = 120°$



மேல் கூறியபடி, இந்தப் பக்கத்தின் நீளம் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தை $2 \sin 60°$ ஆல் பெருக்கியதாகும்.

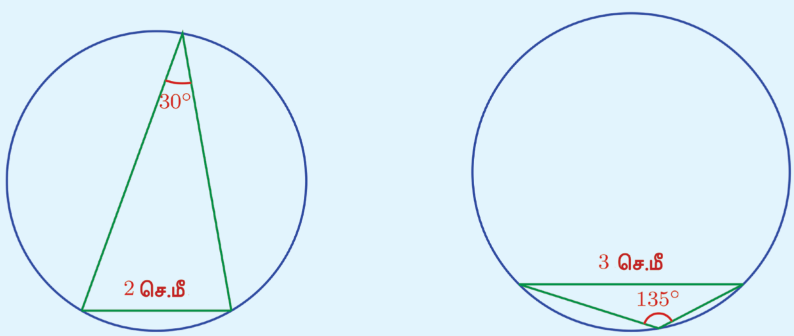
$$2 \sin 60^{\circ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

அப்போது ஆரத்தை இவ்வாறு கணக்கிடலாம்:

$$3 \div \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

சுற்று வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டர்.

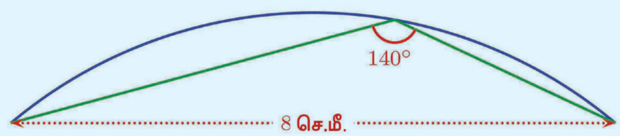
(1) இரண்டு முக்கோணங்களும் அவற்றின் சுற்றுவட்டங்களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:



ஒவ்வொரு வட்டத்தினுடையவும் ஆரத்தைக் கணக்கிடவும்.

(2) 5 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கோட்டின் முனைப்புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டம் வரைய வேண்டும் கோட்டின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள வட்டப் பகுதியிலுள்ள கோணம் $80°$ இருக்க வேண்டும். வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

(3) படத்தில் ஒரு வட்டத்துண்டு தரப்பட்டுள்ளது.



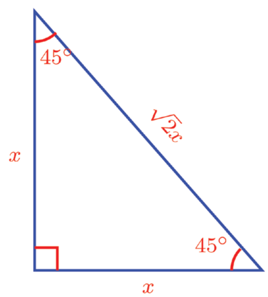
வட்டத்தின் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ?

பக்கங்களின் விகிதம்

ஒரே கோணங்கள் உள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் ஒரே விகிதம் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றோம் அல்லவா. (**விகிதம் என்ற** பாடத்தில் **அளவு வீதமும் விகிதமும்** என்ற பகுதி) வேறொரு முறையில் கூறினால் ஒரு முக்கோணத்தில் உள்ள கோணங்கள் பக்கங்களின் விகிதத்தை உறுதி செய்யும்.

எடுத்துக்காட்டாக, கோணங்கள் $45°, 45°, 90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் இரண்டு சிறிய பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் எனவும், இந்த நீளத்தின் $\sqrt{2}$ மடங்கு பெரிய பக்கத்தின் நீளம் என்றும் இந்தப் பாடத்தின் ஆரம்பத்தில் கற்றோம் அல்லவா.

அதாவது இத்தகைய எல்லா முக்கோணங்களிலும் பக்கங்களின் நீளங்கள் $1, 1, \sqrt{2}$ என்ற எண்களை ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

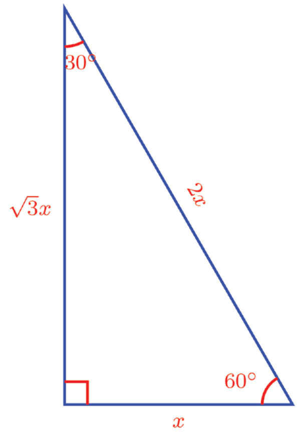


வேறொரு முறையில் கூறினால்,

> கோணங்கள் $45°, 45°, 90°$ ஆன எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் $1 : 1 : \sqrt{2}$ ஆகும்.

இதுபோலக் கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் மிகச்சிறிய பக்கத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்கு நடுத்தரப் பக்கம் என்றும், மிகச்சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கு மிகப்பெரிய பக்கம் என்றும் கற்றோம் அல்லவா.

அதாவது இத்தகைய எல்லா முக்கோணங்களிலும் பக்கங்களின் நீளங்கள் $1, \sqrt{3}, 2$ என்ற எண்களை ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

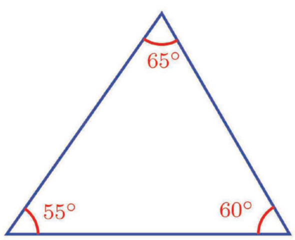


இதையும் பக்கங்களின் விகிதமாகக் கூறலாம்:

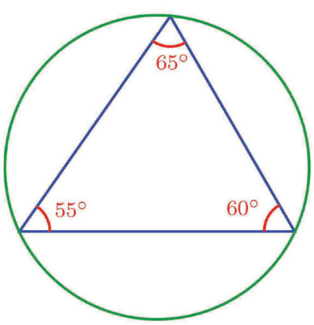
> கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $1 : \sqrt{3} : 2$ ஆகும்.

பிற முக்கோணங்களில் பக்கங்களின் விகிதத்தைக் கணக்கிட கோணங்களின் சைன் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாகப் பின்வரும் முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



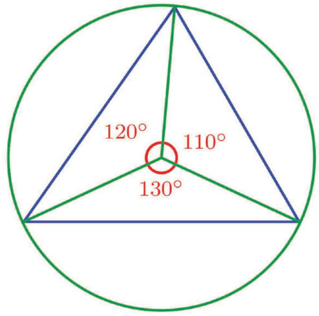
முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் வரைந்தால், பக்கங்கள் எல்லாம் வட்டத்தின் நாண்களாகும் அல்லவா.



ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் எனில் அதன் கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ ஆகுமா? ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்திச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

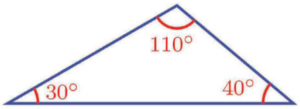
முதலில், பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் உள்ள முக்கோணங்களை வரைவோம். இதற்காக Min = 0 வரக்கூடிய விதத்தில் ஒரு சிலைடர் a ஐ உருவாக்கவும். Segment with Given Length ஐப் பயன்படுத்தி ஒரு புள்ளியில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோட்டின் நீளம் a*sqrt(3) எனக் கொடுக்கவும் ($a\sqrt{3}$ என்பது இதன் பொருள்). இந்தக் கோட்டின் ஒரு முனையை மையமாகக் கொண்டு ஆரம் a ஆக ஒரு வட்டமும் மறுமுனையை மையமாகக் கொண்டு ஆரம் 2a ஆக வேறொரு வட்டமும் வரையவும். இந்த வட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியும் கோட்டின் முனைப்புள்ளிகளும் உச்சிகள் ஆகும்படி ஒரு முக்கோணம் வரையவும். முக்கோணத்தின் கோணங்களை அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கவும். a ஐ மாற்றிப் பார்க்கவும். கோணங்களுக்கு என்ன நிகழும். இதே முறையில் பக்கங்கள் $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+1$ என்ற விகிதத்தில் அமையுமாறு முக்கோணங்கள் வரைந்து கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும்.

ஒவ்வொரு நாணினுடையவும் மையக் கோணம், முக்கோணத்தில் அதற்கு எதிரே உள்ள கோணத்தின் இரண்டு மடங்குமாகும் (**வட்டங்களும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **வில்லும் கோணமும்** என்ற பகுதி).

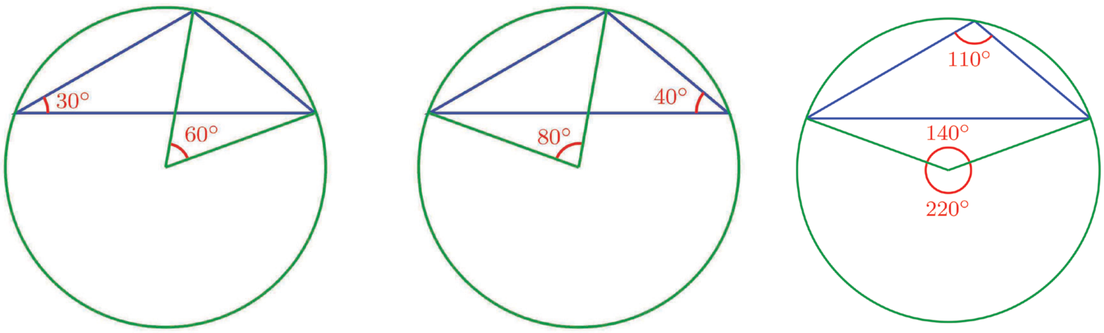


அப்போது, சுற்றுவட்ட ஆரம் r என எடுத்தால். நாண்களின் நீளம் $2r \sin 55°$, $2r \sin 60°$, $2r \sin 65°$; முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் $\sin 55° : \sin 60° : \sin 65°$. அட்டவணையிலிருந்து இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும் செய்யலாம். இதில் $55°$, $60°$, $65°$ என்பவை முக்கோணத்தின் கோணங்களே என்பதையும் கவனிக்கவும்.

முக்கோணம் பின்வருமாறு ஆனால் ?



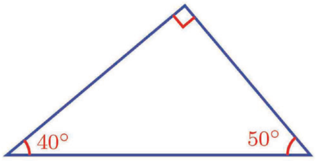
சுற்றுவட்டமும், நாண்களான பக்கங்களின் மையக்கோணங்களும் இவ்வாறு ஆகும்:



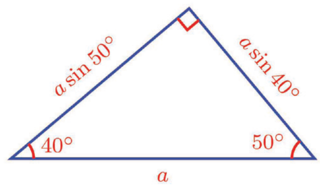
அப்போது முதல் கணக்கில் பார்த்தது போலச் சுற்றுவட்ட ஆரம் r என எடுத்தால், நாண்களின் அதாவது முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் $2r \sin 30°$, $2r \sin 40°$, $2r \sin 70°$ என இவ்வாறு ஆகும்; விகிதம் $\sin 30°: \sin 40°: \sin 70°$

இதில் $30°$, $40°$ என்பவை முக்கோணத்தில் உள்ள இரண்டு கோணங்களும், $70°$ என்பது, $180°$ இல் இருந்து மூன்றாவது கோணம் ஆகிய $110°$ கழித்ததும் ஆகும் எனக் கவனிக்கவும்.

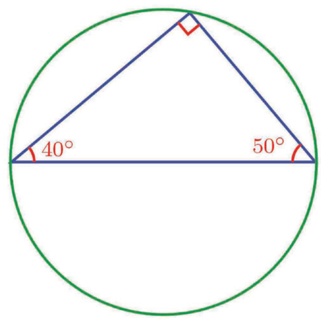
இனி செங்கோண முக்கோணம் ஆனால் ?



இதன் கர்ணத்தின் நீளம் a என எடுத்தால், பிற இரண்டு பக்கங்களின் நீளத்தைக் கணக்கீடு செய்யலாம் அல்லவா



சுற்றுவட்டத்தின் விட்டமும் a தான் என்று பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா.

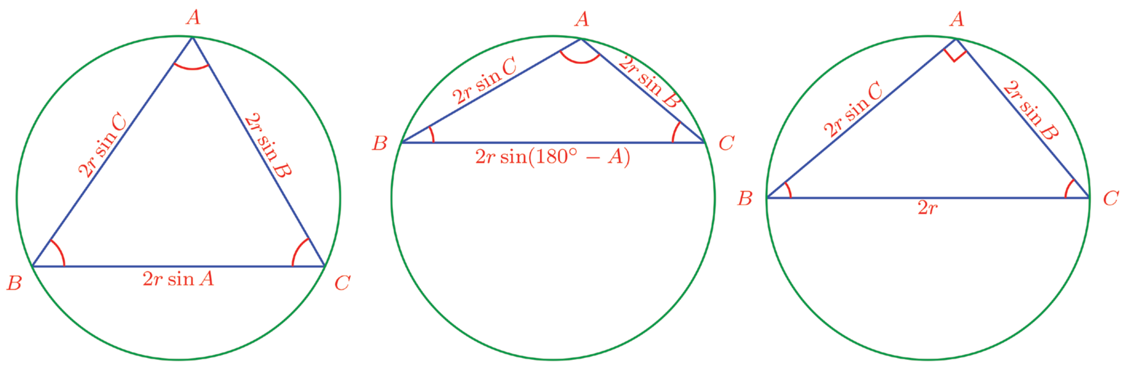


(ஒன்பதாம் வகுப்பில் **இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **முக்கோண மையங்கள்** என்ற பகுதியின் இறுதியில் உள்ள கணக்குகளில் 1(iii)).

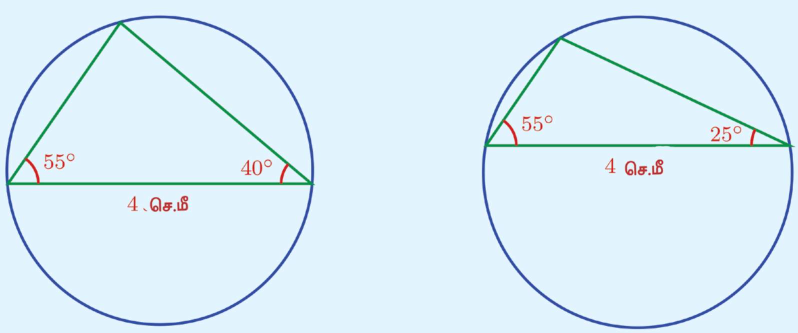
இங்கு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம்

$1 : \sin 40° : \sin 50°$ என்பதையும் கவனிக்கவும்.

ஒரே கோணங்களுக்குள்ள முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதமும் ஒரே விகிதம் என்று ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்று இருக்கிறோம் அல்லவா இப்போது இந்த விகிதம் கண்டுபிடிப்பதற்கான வழியும் ஆயிற்று.



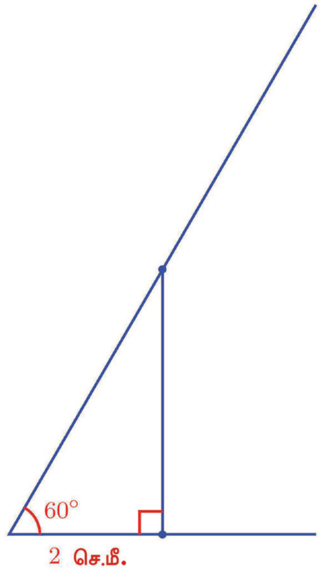
படத்தில் இரண்டு முக்கோணங்களும் அவற்றின் சுற்றுவட்டங்களும் காண்பிக்கப் பட்டுள்ளன.



சைன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வட்டங்களின் விட்டமும் இரண்டு முக்கோணங்களின் பிற பக்கங்களின் நீளங்களையும் மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடவும்.

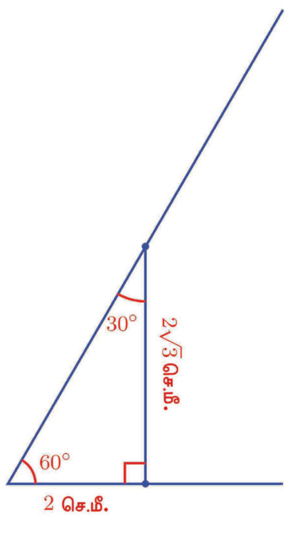
வேறொரு அளவு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



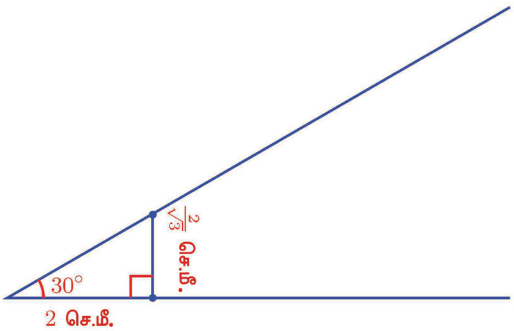
இதில் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் எவ்வளவு ?

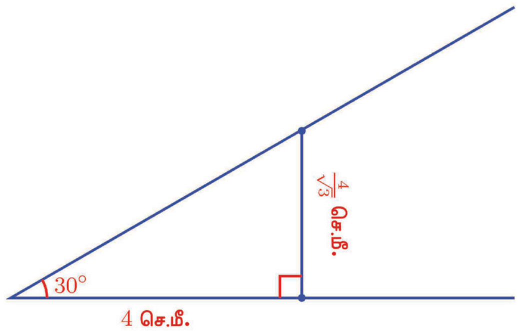
படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ அல்லவா. மிகச்சிறிய பக்கம் 2 சென்டிமீட்டர். அப்போது, நடுத்தரம் பக்கம் $2\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டர். இதுவே செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமும்:



இனி இந்தக் கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்து பிற பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைந்தாலும், செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிபக்கத்திற்குள்ள தூரத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்காகவே இருக்கும் அல்லவா.

30° கோணம் எடுத்தால் ?





செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிபக்கத்திற்குள்ள தூரத்தின் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ பாகம்.

45° கோணம் ஆனால் ?

இவ்வாறு கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பிற பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரத்தின் எத்தனை மடங்கு, அல்லது பாகம், எனக் காட்டும் எண்ணைக் கோணத்தின் **டான்ஜென்ட் (Tangent)** என்று கூறுவதோடு, **tan** எனச் சுருக்கி எழுதவும் செய்யலாம். அப்போது, மேலே பார்த்த எடுத்துக்காட்டில்

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

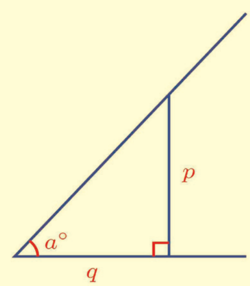
$$\tan 45° = 1$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

சைன், கொசைன் போன்று ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி டான் காண்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். நீளம் 1 என AB என்ற கோடும் Bயின் வழியாக ABக்குச் செங்குத்துக் கோடும் வரையவும். ஒரு Angle Slider, a ஐ உருவாக்கவும். Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி B, A என்பவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவாக a எனக் கொடுக்கவும். புதிய ஒரு புள்ளி B' கிடைக்கும். A, B' என்பவற்றின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் கோடு வரைந்து B இல் வரைந்து செங்குத்துக் கோட்டை வெட்டும் புள்ளி C என அடையாளப்படுத்தவும். ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். மேலும் தேவையற்ற கோடுகளையும் புள்ளிகளையும் மறைத்து வைப்போம். BC இன் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். இது கோணம் A இன் டான் அளவாகும் (எதனால் ?). டான் அளவு எது வரை ஆகலாம்?

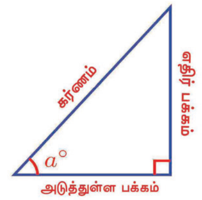
$a°$ கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றப் பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் p யும், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்பக்கத்திற்குள்ள தூரம் q யும் ஆனால்,

$$\tan a° = \frac{p}{q}$$



sin, cos இவற்றைப் போல tan ஐயும் செங்கோண முக்கோணம் பயன்படுத்திக் கூறலாம்:

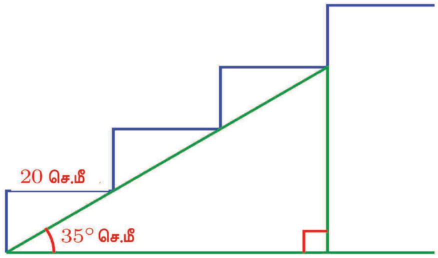
ஒரு கோணம் $a°$ ஆன செங்கோண முக்கோணத்தில்,



$$\tan a° = \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

கோணத்தின் டான் அளவைப் பயன்படுத்தும் ஒரு சூழலைப் பார்ப்போம்.

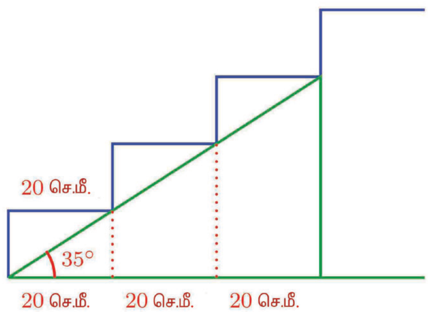
ஒரு படிக்கட்டின் அளவுகள் பின்வருமாறு:



மூன்றாவது படி எவ்வளவு உயரத்தில் எனக் கணக்கீடு செய்ய வேண்டும்.

படத்தில் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தில் 35° கோணத்தின் எதிர்பக்கத்தைக் கணக்கீடு செய்ய வேண்டும். அதற்கு அடுத்துள்ள பக்கத்தின் tan 35° ஆல் பெருக்கினால்போதும்.

அடுத்துள்ள பக்கத்தை எவ்வாறு கணக்கீடு செய்யலாம்? இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



அப்போது மூன்றாவது படியின் உயரம் , $60 \times \tan 35°$ சென்டிமீட்டர்.

அட்டவணையிலிருந்து

$$\tan 35° \approx 0.7002$$

என்று காணலாம்.

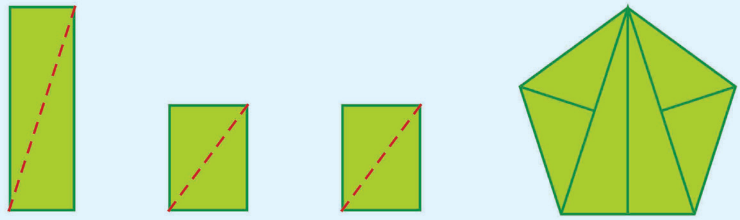
உயரம் தோராயமாக

$$60 \times 0.7002 = 42.012 \approx 42 \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

(1) ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் ஒரு கோணம் 50° ஆகும்; சிறிய மூலைவிட்டம் 6 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். அதன் பரப்பளவு எவ்வளவு ?

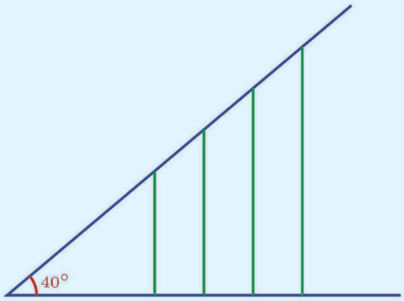
(2) சுவரின் மீது ஓர் ஏணி சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவரிலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது; ஏணிக்கும் தரைக்கும் இடையே உள்ள கோணம் 40°. ஏணியின் மேல் முனை தரையில் இருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது ?

(3) மூன்று செவ்வகங்களை மூலைவிட்டங்களின் வழியாக வெட்டி முக்கோணங்கள் ஆக்கி, கீழ்க்காண்பது போலச் சேர்த்து வைத்து ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணம் உருவாக்க வேண்டும்:



ஐங்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் 30 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும் எனில் செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும் ?

(4) படத்தில் செங்குத்தாக உள்ள கோடுகள் ஒரு சென்டிமீட்டர் தூரம் இடைவெளியில் வரையப்பட்டுள்ளது.

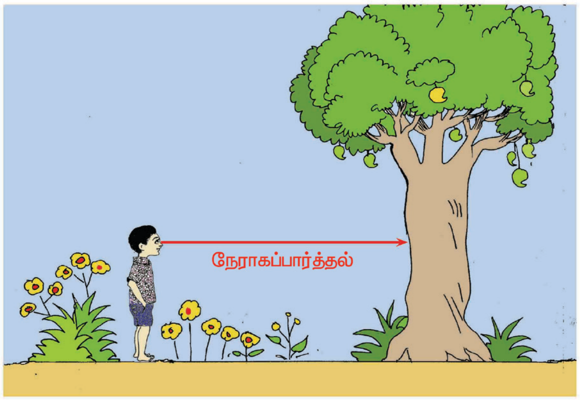


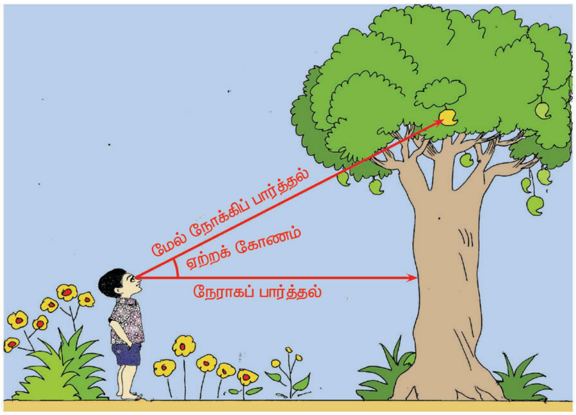
அவற்றின் உயரங்கள் கூட்டுத் தொடரிலாகும் என நிறுவுக. பொது வித்தியாசம் எவ்வளவு?

(5) பக்கம் 10 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

தூரங்களும் உயரங்களும்

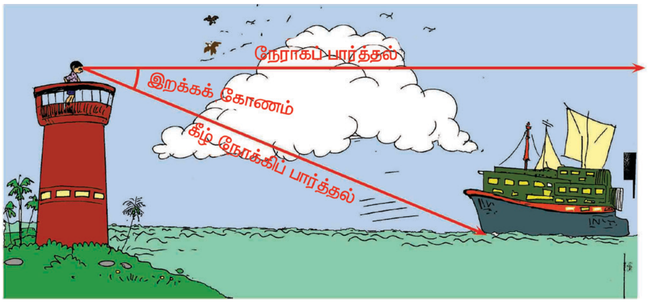
நம்மைவிட உயரத்தில் உள்ளவற்றைக் காண்பதற்குத் தலையைச் சற்று உயர்த்த வேண்டும் அல்லவா; இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:





சாதாரணமாக நமது பார்வையின் பாதை தரைக்கு இணையாகும்; உயரத்தில் உள்ளவற்றைப் பார்க்கும்போது, இது மேல்நோக்கி உயரும். இந்த இரண்டு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை **ஏற்றக்கோணம்(Angle of elevation)** எனக் கூறுவர்.

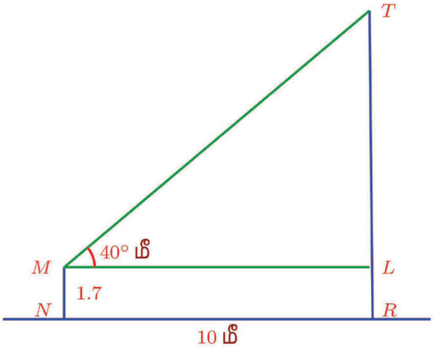
இதுபோல உயரத்தில் நிற்கும்போது கீழே உள்ளவற்றைக் காண பார்வையைக் கீழ்நோக்கி செலுத்த வேண்டும் அல்லவா;



இவ்வாறு உருவாகும் கோணத்தை **இறக்கக் கோணம்** (Angle of depression) என்று கூறுவர். இத்தகைய கோணங்களை அளப்பது **கிளினோமீட்டர்** (Clinometer) என்ற கருவியைப் பயன்படுத்தியாகும். நேரடியாக அளக்க இயலாத தூரங்களும் உயரங்களும் எல்லாம் கிளினோமீட்டரைப் பயன்படுத்திக் கோணத்தை அளந்தும், டான் ஐப் பயன்படுத்திக் கணக்கீடு செய்தும் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்:

ஒரு மரத்தின் அடியில் இருந்து 10 மீட்டர் தூரத்தில் நிற்கின்ற ஒருவர் மரத்தின் உச்சியை 40° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். அவருடைய உயரம் 1.7 மீட்டர். மரத்தின் உயரம் என்ன ?



படத்தில் MN என்ற கோடு பார்க்கின்ற நபரையும், TR மரத்தையும் குறிப்பிடுகின்றன.

படத்திலிருந்து (அட்டவணையும் பயன்படுத்தி),

$$\tan 40° = \frac{TL}{ML}$$

$$TL = ML \tan 40° \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

எனக் காணலாம். அப்போது

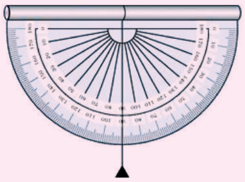
$$TR = TL + LR = TL + MN = 8.391 + 1.7 = 10.091$$

$$TR \approx 10.09$$

அதாவது மரத்தின் உயரம் தோராயமாக 10.09 மீட்டராகும்.

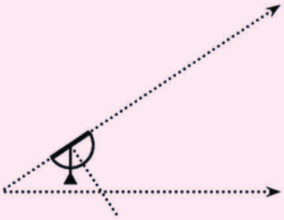
கிளினோமீட்டர்

ஏற்றக் கோணமும் இறக்க கோணமும் அளப்பதற்கான கிளினோமீட்டர் என்ற கருவியின் ஒரு எளிய வடிவத்தை நாமும் உருவாக்கலாம்.



படத்தில் காட்டி இருப்பது போல ஒரு கோணமானியின் நேரான பகுதியின் ஒரு குழாயைப் பொருத்தவும் இதிலிருந்து கோணமானியின் நடுப்பகுதி வழியாக வலுவாகத் தொங்கும் படியாக நூலின் நுனியில் ஒரு எடை கட்டிய நூலை கட்டவும்.

ஒரு மரத்தின் அல்லது கட்டிடத்தின் மேற்பகுதியைக் குழாய் வழியாகப் பார்ப்பதற்காகக் கோணமணியைச் சாய்வாக உயர்த்த வேண்டும். கீழே உள்ள எடையின் காரணமாக நூல் அப்போது தரைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் நூலிற்கும் கோணமானியின் 90° கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணமே, இந்தப் பார்வையில் ஏற்றக்கோணம்.

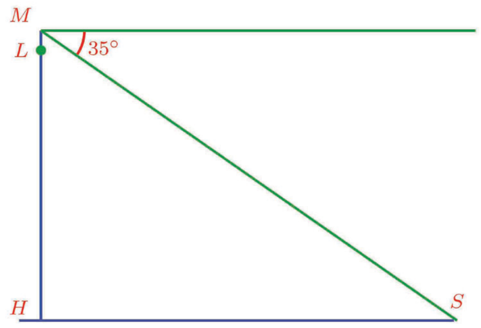


வேறொரு கணக்கு:

1.8 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒருவர் 25 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் மேலிருந்து பார்த்தபோது, 35° இறக்கக் கோணத்தில் ஒரு கப்பலைப் பார்த்தார். அது கலங்கரை விளக்கின் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

ஒரு படம் வரைவோம்:

இதில் LH கலங்கரை விளக்கும், ML அதன் மேல் நிற்கின்ற நபரும் ஆகும். S கப்பல் ஆகும்.



கண்டுபிடிக்க வேண்டியது HS.

கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களின்படி

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

மேலும் $\angle HMS = 55°$

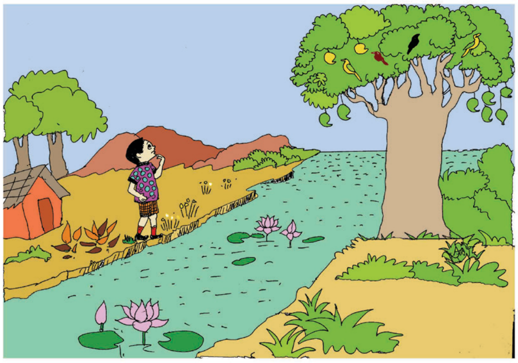
அப்போது MHS என்னும் செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

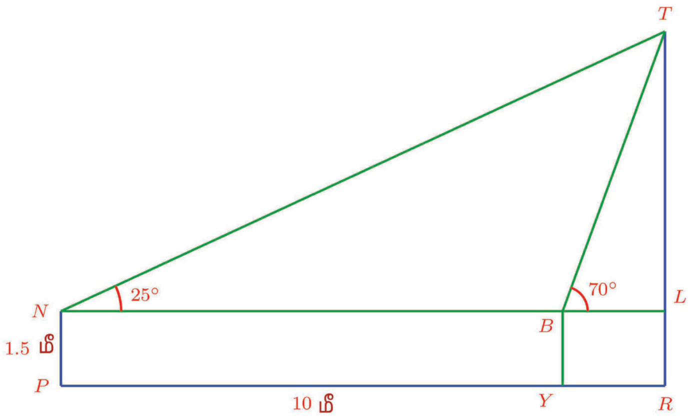
அதாவது, கலங்கரை விளக்கின் அடியிலிருந்து தோராயமாக 38.27 மீட்டர் தூரத்தில் கப்பல் உள்ளது.

மேலும் ஒரு கணக்கு:

ஓர் ஆற்றங்கரையில் நிற்கின்ற ஒரு சிறுவன், ஆற்றின் மறு கரையில் சேர்ந்து நிற்கின்ற ஒரு மரத்தின் மேல் உச்சியை 70° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்த்தான். 10 மீட்டர் பின்னோக்கி நடந்தபோது, அதை 25° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்த்தான். சிறுவனின் உயரம் 1.5 மீட்டர். ஆற்றின் அகலத்தையும் மரத்தின் உயரத்தையும் கணக்கிட வேண்டும்.



கீழ்க்காணும் படத்தில் TR மரம், BY சிறுவன் முதலில் நின்ற இடம், NP சிறுவனின் புதிய இடம்.



கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டியது, YR உம், TR உம்.

படத்திலிருந்து

$$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$$

ஆனதால், BL உம் TL உம் கண்டுபிடித்தால்போதும்.

$$BL = x \quad TL = y$$

என எடுத்தால் BTL என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$y = x \tan 70° \approx 2.7475x$$

என்றும், NTL என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$y = (x + 10)\tan 25^\circ \approx 0.4663(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

என்றும் கிடைக்கும். அப்போது

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

என ஆகும் அல்லவா. இதிலிருந்து

$$x \approx \frac{4.663}{2.2812} \approx 2.044$$

என்று (கணிப்பான் பயன்படுத்தி) கண்டுபிடிக்கலாம். இதைப் பயன்படுத்தி

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

என்றும் காணலாம். அதாவது, ஆற்றின் அகலம் தோராயமாக 2.04 மீட்டரும், மரத்தின் உயரம், தோராயமாக $5.62 + 1.5 = 7.12$ மீட்டரும் ஆகும்.

(1) சூரியன் 40° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்படும்போது, ஒரு மரத்தின் நிழலின் நீளம் 18 மீட்டராகும்.

(i) மரத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

(ii) சூரியன் 80° ஏற்றக் கோணத்தில் காணப்படும்போது, நிழலின் நீளம் எவ்வளவாக இருக்கும்?

(2) ஒரு கட்டிடத்தின் மேல் பகுதியில் நிற்கின்ற ஒருவர் 30 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ள ஒரு கடையின் அடிப்பகுதியை 25° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கிறார். கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு மின் கம்பத்தின் மேல் உச்சியிலிருந்து இரண்டு இரும்பு கம்பிகள் இருபுறமும் இழுத்துத் தரையில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பிகளின் அடிப்பகுதிகள் தரையுடன் உருவாக்குகின்ற கோணங்கள் 55° உம் 40° உம் ஆகும்; கம்பிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 25 மீட்டர் ஆகும். உயரம் எவ்வளவு?

(4) ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியில் நிற்கின்ற 1.75 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு நபர், 40 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ள ஒரு குன்றின் மேல் உச்சியை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்த்தபோது அதை 50° ஏற்ற கோணத்தில் கண்டார். குன்று, கோபுரம் ஆகியவற்றின் உயரங்களைக் கணக்கிடுக.

(5) ஓர் ஆற்றங்கரையில் நிற்கின்ற சிறுவன், மறுகரையுடன் சேர்ந்து நிற்கின்ற ஒரு மரத்தின் மேல் உச்சியை 80° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்த்தான். 15 மீட்டர் பின்னோக்கி நடந்தபோது, அதை 40° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்த்தான். சிறுவனின் உயரம் 1.5 மீட்டர். ஆற்றின் அகலத்தையும் மரத்தின் உயரத்தையும் காண்க.

முக்கோணவியல் அளவுகள்

கோணம்	sin	cos	tan
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.364
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.404
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

கோணம்	sin	cos	tan
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900

7 குறிகாட்டி எண்கள்

இடங்களும் எண்களும்

ஒன்பதாம் வகுப்பில் பல்லுறுப்புகளின் வரைபடங்கள் வரைந்தது நினைவில் உள்ளது அல்லவா? (**பல்லுறுப்புப் படங்கள்** என்ற பாடம்).

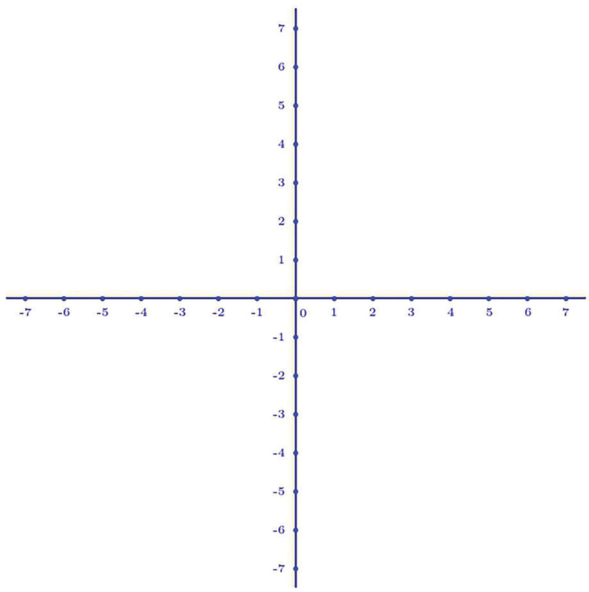
எடுத்துக்காட்டாக $p(x) = 2x + 1$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடைய வரைபடம் வரைந்தது எவ்வாறு?

x ஆகப் பல எண்களை எடுத்து, ஒவ்வொன்றினுடையவும் $p(x)$ கணக்கிட்டோம்.

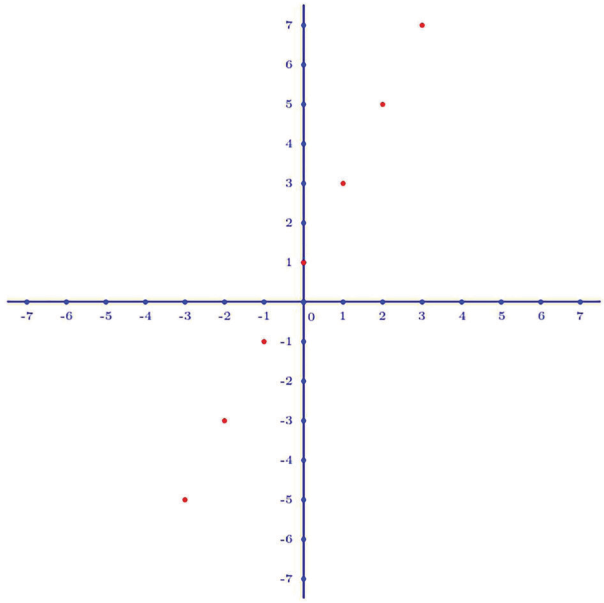
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7

இவற்றை, வரைபடத்தில் புள்ளிகளாக அடையாளப்படுத்துவதற்கு, முதலில் கிடைமட்டமாகவும், செங்குத்தாகவும் இரண்டு கோடுகள் வரைந்து, அவற்றில் சம தூரத்தில் இடைவெளி விட்டு எண்கள் அடையாளப்படுத்தினோம்.

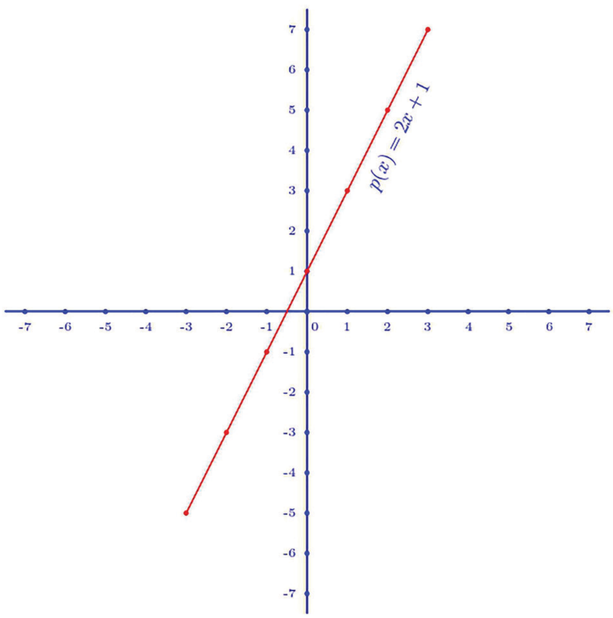
:



தொடர்ந்து, கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டில் x ஆக எடுத்த ஒவ்வொரு எண்ணினுடைய இடத்திலிருந்தும் $p(x)$ ஆகக் கிடைத்த எண்ணை உயரமாக எடுத்துப் புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தப்படுத்தினோம்.

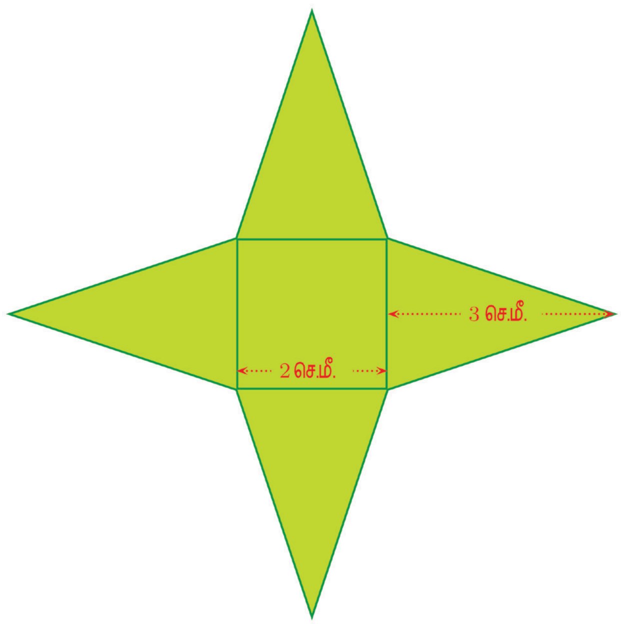


இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்தால் கிடைக்கின்ற கோடு $p(x) = 2x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பின் வரைபட வடிவம்:

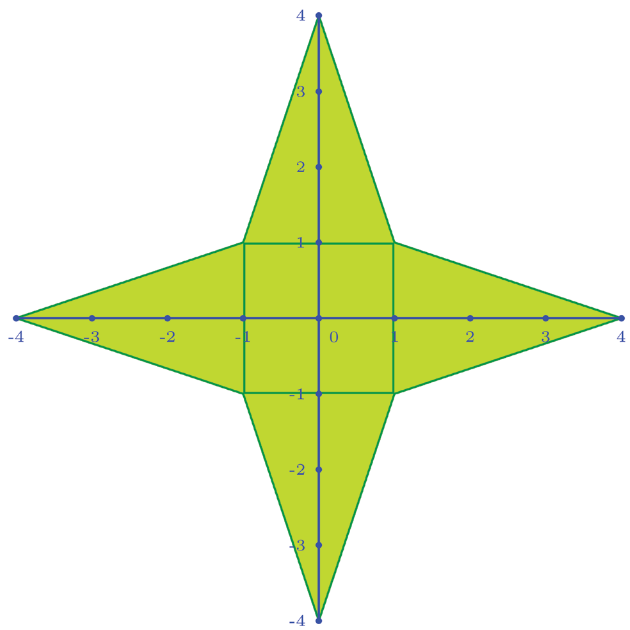


வேறு பல வடிவங்கள் வரைவதற்கும் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தை இதுபோன்று எவ்வாறு வரையலாம் என்று பார்ப்போம்:

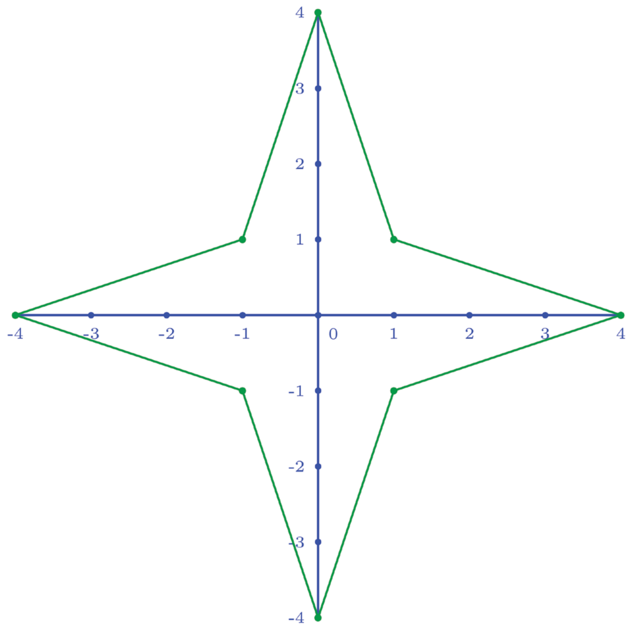


படத்தின் மையம் வழியாகக் கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் கோடுகள் வரைந்து, 1 சென்டிமீட்டர் இடைவெளி விட்டுத் தூரங்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளதாகக் கருதவும்:



அப்போது கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் கோடுகள் வரைந்து, அவற்றில் 1 சென்டிமீட்டர் இடைவெளிவிட்டு தூரங்களை அடையாளப்படுத்தினால், படத்தின் எட்டு உச்சிகளையும் அடையாளப்படுத்தலாம் அல்லவா; அவற்றை இணைத்தால் நட்சத்திரத்தின் வெளிக்கோடுகள் ஆகும்.

படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போலக் கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் கோடுகள் வரைந்து, உச்சிகள் அடையாளப்படுத்தி, இந்தப் படத்தை நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரைந்து பார்க்கவும்:

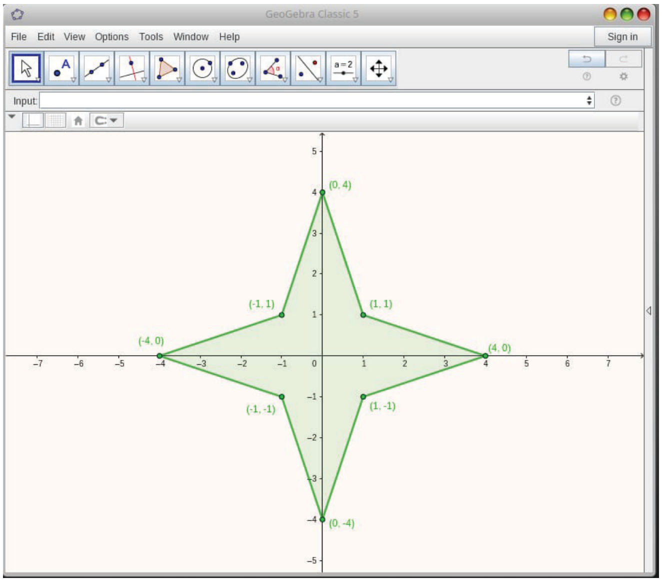


இனி இந்தப் படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் எவ்வாறு வரையலாம் என்று பார்க்கவும். புள்ளிகளின் இடம் இரண்டு எண்களின் ஜோடியாக ஜியோஜிப்ராவில் குறிப்பிட்டது நினைவிருக்கிறதா?

எடுத்துக்காட்டாக, $p(x) = x^2$ என்ற பல்லுறுப்பில், $x = 0.5$ என்றெடுக்கும்போது $p(x) = 0.25$ ஆகும். அப்போது கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டில் 0.5 என்ற இடத்திற்கு மேலே 0.25 உயரத்தில் உள்ள புள்ளி $p(x)$ இன் வரைபட வடிவத்தின் புள்ளியாகும். இதனை அடையாளப்படுத்துவதற்காக, ஜியோஜிப்ராவில் Input ஆக (0.5, 0.25) என்று தட்டச்சு செய்தால் போதும் எனக் கண்டிருக்கிறோம் அல்லவா. (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **பல்லுறுப்புப் படங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இருபடி பல்லுறுப்புக்கள்** என்ற பகுதி).

இதைப் போன்று, மேலே உள்ள படத்தில் வலது மேல் உச்சி, கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டில் 1 சென்டிமீட்டர் அடையாளப்படுத்திய இடத்திலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் உயரத்தில் ஆகும். அப்போது இந்தப் புள்ளியை (1, 1) என அடையாளப்படுத்தலாம் அல்லவா.

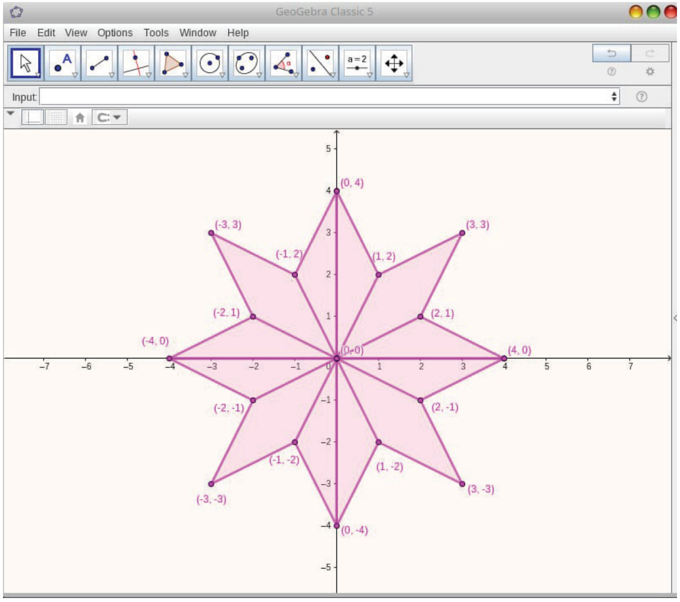
இதைப் போன்று படத்தின் எல்லா உச்சிகளையும் அடையாளப்படுத்தலாம்:



ஜியோஜிப்ராவில் எண் ஜோடிகளைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துவதற்கு Input Bar இல் அவற்றை ஒவ்வொன்றாகக் கொடுத்தால் போதும். இந்தப் புள்ளிகள் உச்சிகள் ஆகுமாறு பலகோணம் வரைவதற்கு, Polygon எனக் கொடுக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, Input Bar இல் இத்தகைய கட்டளையைக் கொடுத்துப் பார்க்கவும்.

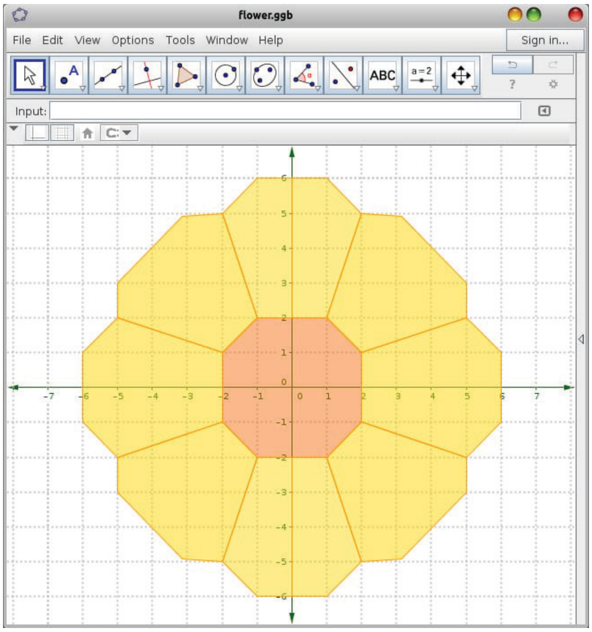
Polygon [(−1, −1), (1, −1), (1, 1), (−1, 1)]

இனி இந்தப் படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரையலாமா?



Geogebra திறந்து Input Bar இல் (0, 0), (4, 0) (2, 1), (3, 3), (1, 2), (0, 4) என்ற எண் ஜோடிகளை ஒவ்வொன்றாக Type செய்து Enter அமர்த்தவும். Polygon Tool ஐ எடுத்து A, B, C, D, E, F, A என்ற புள்ளிகளை வரிசையாகக் கிளிக் செய்து படத்தின் வலது மேல் பாகத்தின் கால் பாகத்தைப் பூர்த்தி செய்யலாம். Segment Tool ஐ எடுத்து A, C என்ற புள்ளிகளில் கிளிக் செய்தும், பின்னர் A, E என்ற புள்ளிகளில் கிளிக் செய்தும் இடையில் இரண்டு கோடுகளையும் வரையலாம். Reflect about line என்ற டூல் ஐ எடுத்து படத்திலும் தொடர்ந்து செங்குத்தாக உள்ள கோட்டிலும் கிளிக் செய்யவும். படத்தின் பிரதிபிம்பம் இடது பக்கம் வந்தது அல்லவா? இதுபோன்று இரண்டு கோடுகளும் Reflect செய்யலாம். படத்தின் கீழ்ப் பகுதி கிடைப்பதற்கு இதே டூலைப் பயன்படுத்தி மேலே உள்ள படத்தின் பாகத்தையும் கிடைமட்டமான கோட்டையும் கிளிக் செய்யவும்.

இந்தப் படமானால் ?



உச்சிகளைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான வசதிக்காகவே இதில் கட்டங்கள் (ஜியோஜிப்ராவில் Grid) வரையப்பட்டுள்ளன.

இந்தப் படங்களை நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரையலாமா ?

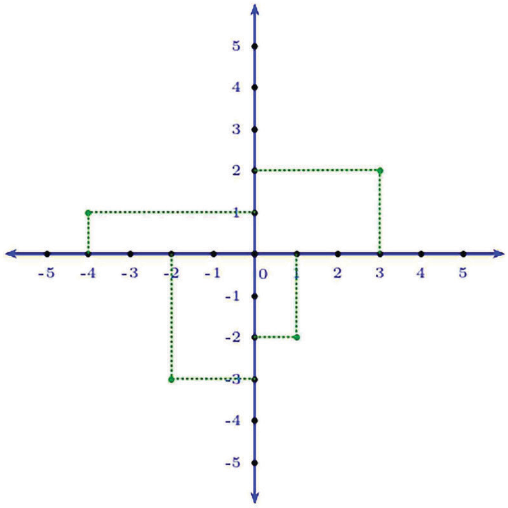
வடிவியலும் எண்களும்

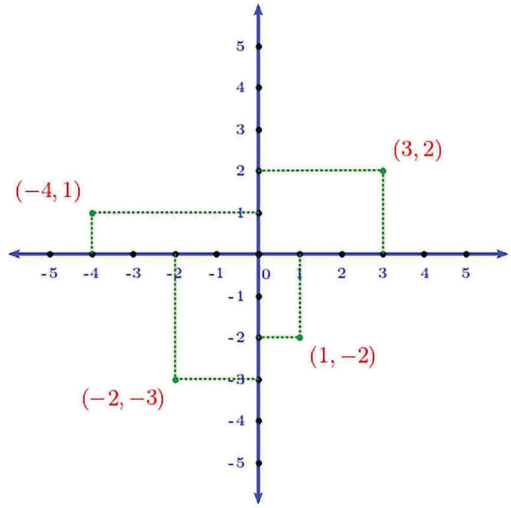
புள்ளிகளின் இடத்தை, இரண்டு எண்களால் குறிப்பிடப்பட்டுப் படங்கள் வரைகின்ற முறையைப் பார்த்தோம் அல்லவா ?

கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் உள்ள கோடுகளைப் பயன்படுத்தியல்லவா இந்த இரண்டு எண்களைக் கணக்கிடுவது. இந்தக் கோடுகளுக்குக் **குறிகாட்டி அச்சுகள் (Axes of co ordinates)** என்று பெயர்; கிடைமட்டமாக உள்ள கோடு **x-அச்சு (x-axis)**, செங்குத்தாக உள்ள கோடு **y-அச்சு (y-axis)**. இந்தக் கோடுகள் வெட்டிச்செல்லும் புள்ளியை **ஆதிப்புள்ளி (Origin)** என்று கூறுகிறோம்.

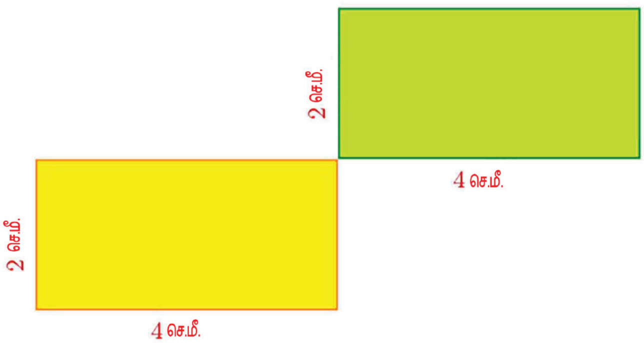
அச்சுகள் வரைந்த பின்னர், முன்பு பார்த்த எடுத்துக்காட்டுகளைப் போல, ஒரு புள்ளியின் இடத்தை எண் ஜோடியாக எழுதலாம். இந்த எண்களைப் புள்ளியின் **குறிகாட்டி எண்கள் (Co ordinates)** என்று கூறுகிறோம். முதலில் உள்ளது **x-குறிகாட்டி எண் (x-co ordinate)** இரண்டாவது உள்ளது **y-குறிகாட்டி எண் (y-co ordinate)**.

ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடுவதற்கு அச்சுகளுக்கு உள்ள செங்குத்துக் கோடுகளை ஊகித்தால் போதுமானது. எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படங்களைப் பாருங்கள்:

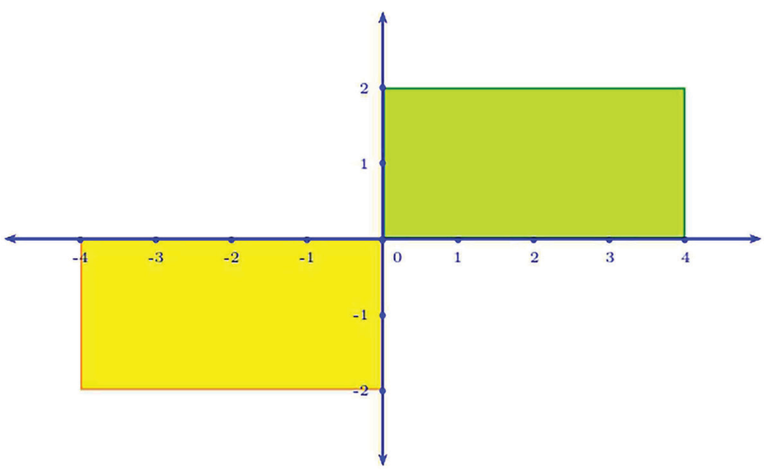




ஒரு படம் வரைவதற்கு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான எந்த இரண்டு கோடுகளையும் அச்சுகளாக எடுக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

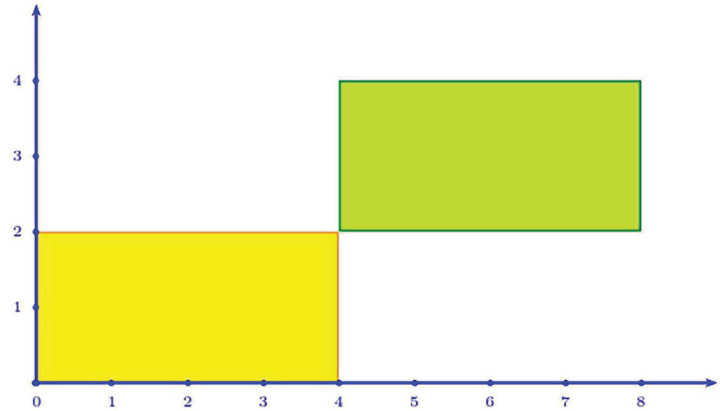


அச்சுகளை இவ்வாறு வரையலாம்:



இரண்டு செவ்வகங்களின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

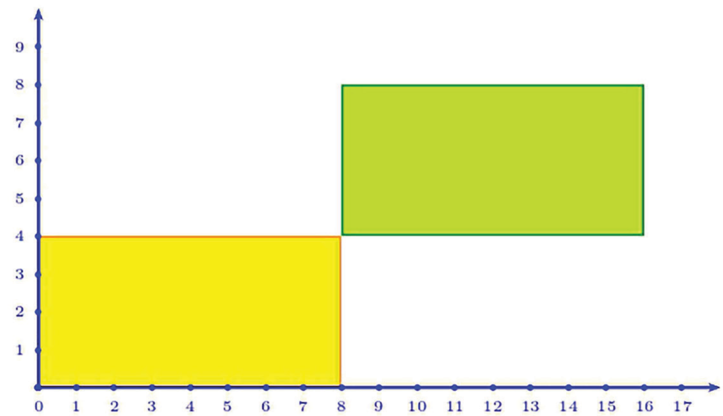
இனி அச்சுகளை இவ்வாறு வரைந்தால் ?



இந்த அச்சுகளின் அடிப்படையில், உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

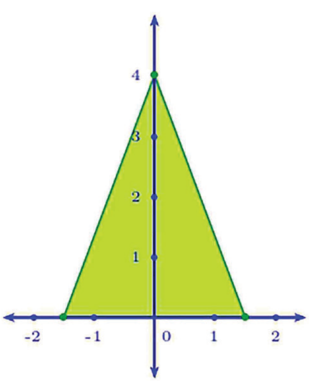
அச்சுகளில் இடங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் ஒரு சென்டிமீட்டர்தான் ஆக வேண்டுமென்றில்லை. வசதிக்கு ஏற்ப எந்தத் தூரமும் ஆகலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, அரை சென்டிமீட்டர் இடைவெளியில் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தினால், மேலே உள்ள படம் இவ்வாறாகும்:



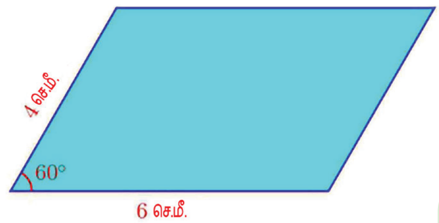
இப்போது உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் என்னவாயிற்று ?

குறிகாட்டி எண்கள் எண்ணல் எண்களாக வேண்டும் என்பதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கம் 3 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 4 சென்டிமீட்டரும் ஆன ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் வரைவதற்கு, அடிப்பக்கத்தின் மைய புள்ளியை ஆதிப்புள்ளியாக்கி படத்தில் காண்பது போல அச்சுகளை எடுக்கலாம்:

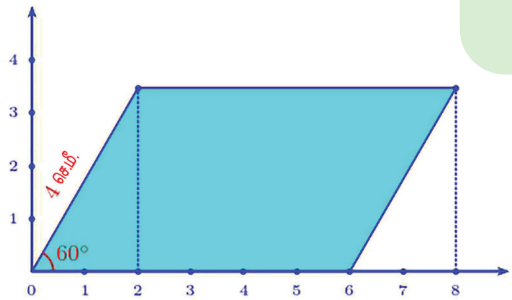


முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

மேலும் இந்த இணைகரம் வரைய வேண்டுமெனில் ?



அச்சுகளை இவ்வாறு வரையலாம்:



குறிகாட்டி எண்கள் $(2,\ 2\sqrt{3})$ என்ற புள்ளி கிடைப்பதற்கு ஜியோஜிப்ராவின் Input Bar இல் (2,2sqrt (3)) எனக் கொடுத்தால் போதும்.

கோணங்கள் $30°, 60°, 90°$ ஆன முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் தெரியும் அல்லவா. அப்போது இடது மேல் உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் $(2, 2\sqrt{3})$.

வலது உச்சியின் ?

அச்சுகளைப் பயன்படுத்திப் படங்கள் வரையும்போது, x-அச்சு (இடப்பக்கத்தில் இருந்து வலப்பக்கம்) $X'X$ என்றும், y-அச்சு (மேலிருந்து கீழ்நோக்கி) YY' என்றும் அடையாளப்படுத்தப்படுகின்றன. ஆதிப்புள்ளியை O எனவும்.

(1) கீழே கூறப்பட்டவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்:

(i) x-அச்சில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் y-குறிகாட்டி எண்கள்

(ii) y-அச்சில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண்கள்

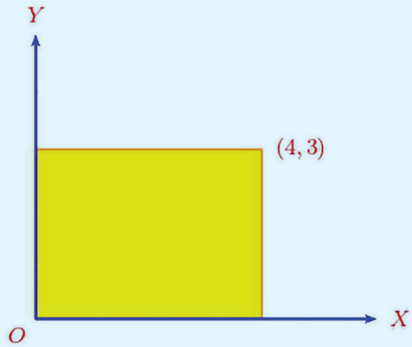
(iii) ஆதிப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள்

(iv) $(0, 1)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக x-அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் y-குறிகாட்டி எண்

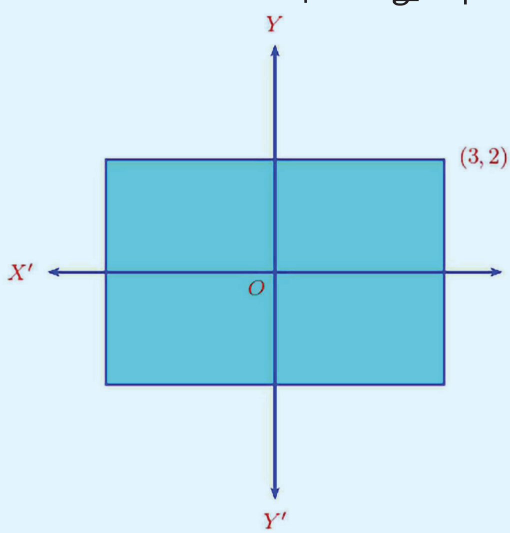
(v) $(1, 0)$ என்ற புள்ளியின் வழியாக y-அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையுவும் x-குறிகாட்டி எண்.

ஜியோஜிப்ராவில் a என்ற பெயரில் ஒரு சிலைடரை உருவாக்கவும். Input Bar இல் (a, 0) எனக் கொடுக்கவும். சிலைடரை மெதுவாக நகர்த்தி a யை மாற்றிப் பார்க்கவும். இந்தப் புள்ளி பயணம் செய்யும் பாதை எது ? இதைப் போன்று (a,2), (a,1), (a,−2), (3,a), (−2,a) இந்தப் புள்ளிகளை எடுத்து a மாறுவதற்கு ஏற்ப ஒவ்வொரு புள்ளியும் பயணம் செய்யும் பாதையின் சிறப்புத்தன்மை என்ன என்றுப் பார்க்கவும். புள்ளிக்கு trace on கொடுத்து பார்க்கவும்.

(2) படத்தில் உள்ள செவ்வகத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்:



(3) கீழேயுள்ள படத்தில் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகும். ஆதிப்புள்ளி செவ்வகத்தின் மையப்புள்ளியாகும் (மூலைவிட்டங்கள் வெட்டிச்செல்லும் புள்ளி).

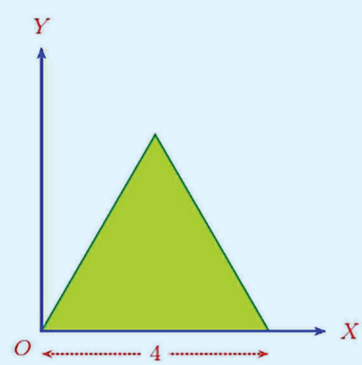


செவ்வகத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முக்கோணத்தின் எல்லா உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

.



ஜியோஜிப்ராவில் Input Bar இல் Sequence[(a,a+1),a,0,5] எனக்கொடுத்துப் பார்க்கவும். a ஆக 0 முதல் 5 வரையுள்ள முழு எண்களைப் பயன்படுத்தி (a, a + 1) என்ற வடிவத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் அடையாளப்படுத்துவதற்கு உரிய அறிவுரையே இது. அதாவது, (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) என்ற புள்ளிகள்.

அறிவுரையில் ஒரு சிறிய மாற்றம் செய்து Sequence[(a,a+1),a,0,5,0.5] எனச் செய்துப் பார்க்கவும். இங்கு a ஆக எடுப்பது பூஜ்ஜியத்திலிருந்து தொடங்கி 0.5 வீதம் கூட்டிக் கிடைக்கும் எண்களாக வேண்டும் என்பதே இறுதியில் 0.5 என்று கொடுப்பதன் நோக்கமாகும். (1 வீதமே கூட்ட வேண்டுமெனில் குறிப்பிட்டு ஒன்றும் கொடுக்க வேண்டியதில்லை) அப்போது (0,1), (0.5,1.5), (1,2), ... என இவ்வாறு (5, 6) வரையுள்ள புள்ளிகளே கிடைக்கின்றன.

கீழே கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு கட்டளைகளிலிருந்துக் கிடைக்கும் புள்ளிகளின் சிறப்புத்தன்மைகளைக் கலந்துரையாடவும்.

Sequence[(a,0),a,0,5,0.5]

Sequence[(a,2a),a,−3, 4,0.25]

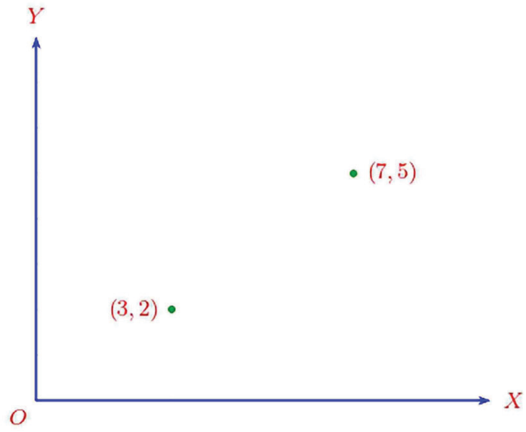
Sequence[(a,a),a,−3,3,0.2]

Sequence[(a,-a),a,−3,3,0.2]

Sequence[(a^2,a),a,−4,4,0.1]

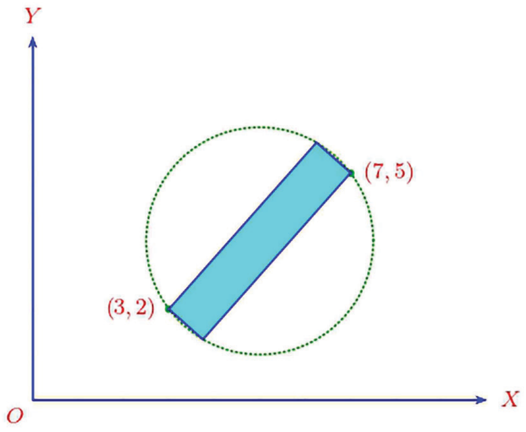
செவ்வகக் கணக்குகள்

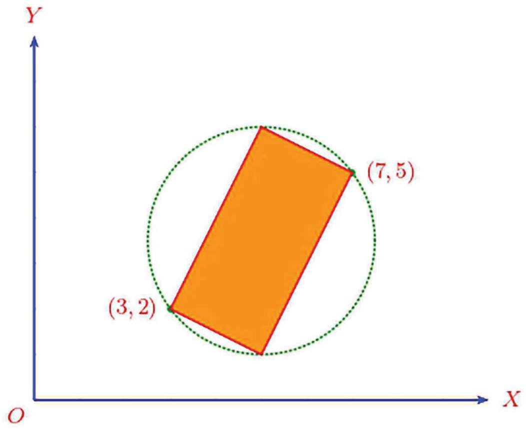
படத்தைப் பார்க்கவும்:



இவை எதிர் உச்சிகளான ஒரு செவ்வகத்தை வரையவும்

எத்தனை வேண்டுமெனிலும் வரையலாம்:



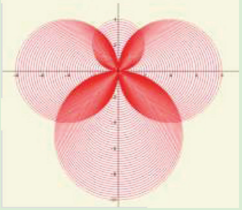


Input Bar இல் circle[(1,3),2] என எழுதினால் ஜியோஜிப்ராவில் மையம் $(1, 3)$ என்ற புள்ளியும் ஆரம் 2 உம் ஆன வட்டமும் கிடைக்கும்.

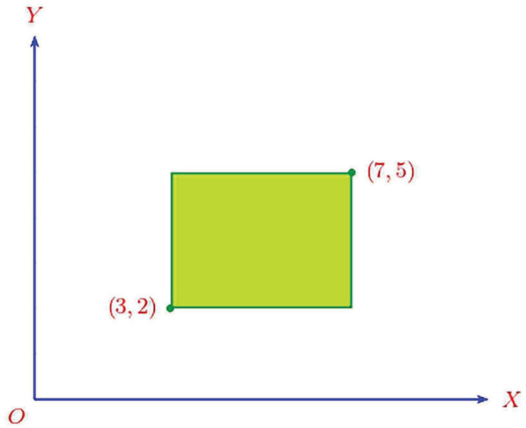
Sequence[circle[(a,0),1],a,0,5,0.2] என்ற கட்டளை கொடுத்தால் $(0, 0)$, $(0.2, 0)$, $(0.4,0),...,(5, 0)$ என்ற புள்ளிகள் மையமாகவும், ஆரம் 1 உம் ஆன வட்டங்களும் கிடைக்கும். இதைப் போன்று கீழே கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு கட்டளையையும் கொடுத்தால் கிடைக்கின்ற படங்களை மனதில் காணவும். அதன்பின்னர் ஜியோஜிப்ராவில் செய்து பார்க்கவும்.

- Sequence[circle[(a, 0),a],a,0,10,0.1]
- Sequence[circle[(a, 0), $\frac{a}{4}$],a,0,10,0.1]

தேவையான கட்டளைகளைக் கொடுத்து இந்தப் படத்தை வரையவும்.



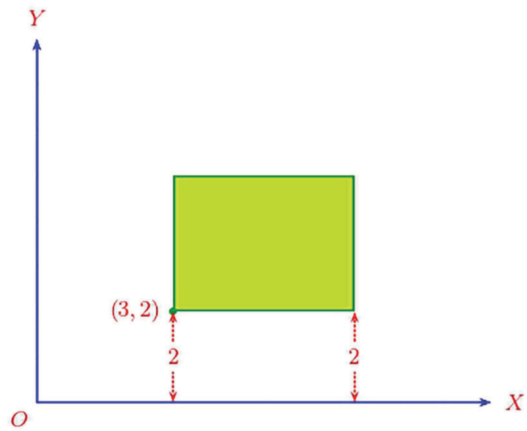
செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாக வேண்டும் என்று கூறினால் ? ஒன்று மட்டும் தான் வரைய முடியும் ?

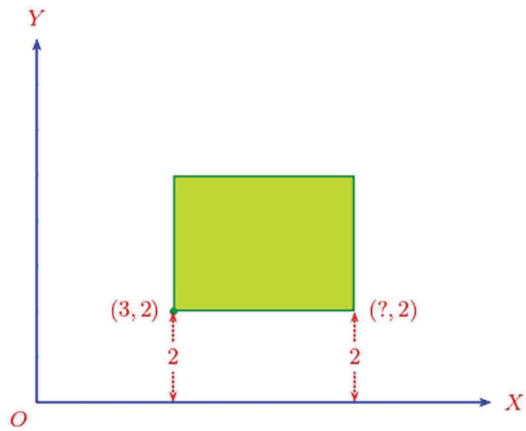


இந்தச் செவ்வகத்தின் பிற இரண்டு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

அதற்குப் படத்திற்கு சற்று கூட விளக்கம் கொடுக்கலாம். கீழ்ப்பக்க இடது உச்சியின் y-குறிகாட்டி எண் 2 ஆனதால், x-அச்சிலிருந்து அதற்குள்ள உயரம் 2 ஆகும்.

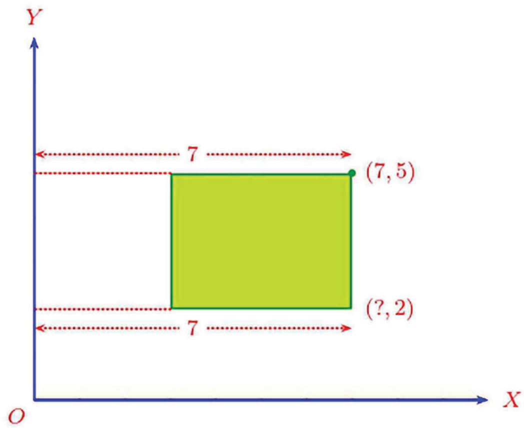
அடிப்பக்கம் x-அச்சிற்கு இணையானதால், இந்தப் பக்கத்தில் மற்றொரு உச்சியும் இதே உயரத்தில் ஆகும்; அதாவது இந்த உச்சியினுடைய y-குறிகாட்டி எண் 2 ஆகும்.

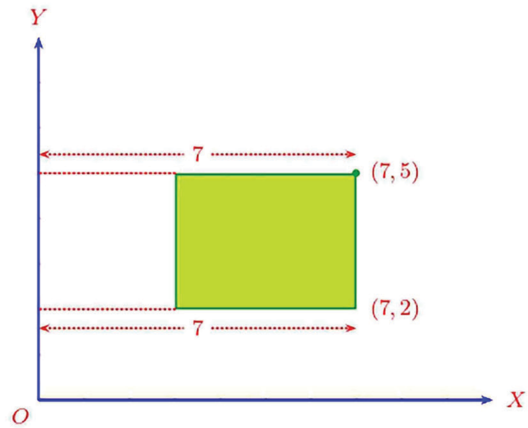




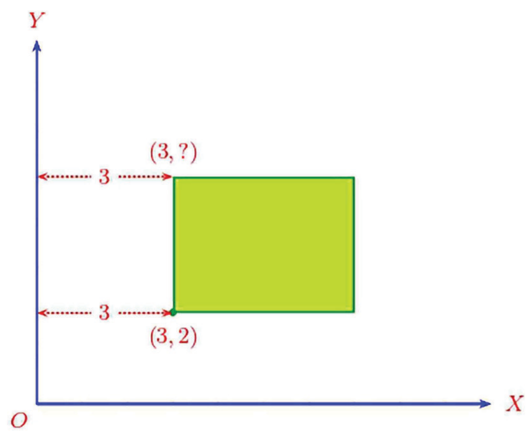
இந்த உச்சியின் x-குறிகாட்டி எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க, மேலே உள்ள வலது உச்சியைப் பார்க்கவும். இதன் x-குறிகாட்டி எண் 7 ஆனதால், y-அச்சிலிருந்து இந்த உச்சிக்கு உள்ள தூரம் 7 ஆகும்.

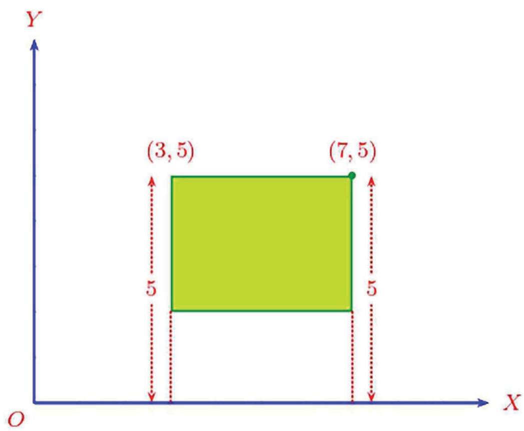
செவ்வகத்தின் வலது பக்கம், y-அச்சிற்கு இணையானதால், இந்தப் பக்கத்தின் அடுத்த உச்சியும் இதே தூரத்திலாகும்; அதாவது, அதன் x-குறிகாட்டி எண்ணும் 7 ஆகும்.





இதைப் போன்று செவ்வகத்தின் இடது மேல் உச்சியையும் கண்டுபிடிக்கலாம்:





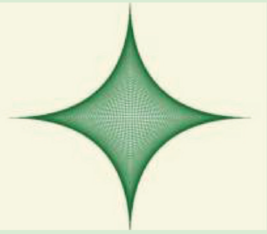
ஜியோஜிப்ராவில்

Segment[(2,-1), (3,5)]

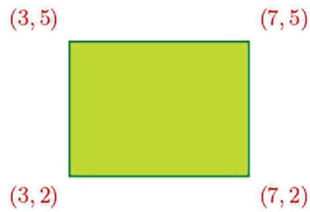
என்ற கட்டளை கொடுத்தால் (2, −1), (3, 5) என்ற புள்ளிகள் இணையும் கோட்டுத்துண்டு கிடைக்கும். கீழே தரப்பட்டுள்ள கட்டளைகளை உருவாக்கும் கோடுகளின் சிறப்புத் தன்மை களைக் கலந்துரையாடவும்.

- Sequence[segment[(a, 0),(a, 3)],a,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(a, 0),(a, a)],a,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(0, 3),(a, 0)],a,−4,4,0.1]
- Sequence[segment[(a,0),(0, a)],a, −3,3,0.2]
- Sequence[segment[(a, 0),(0,5 − a)],a,0,5,0.1]

தேவையான கட்டளைகளைக் கொடுத்து இந்தப் படத்தை வரையவும்.



செவ்வகத்தின் நான்கு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களை ஒன்றாகப் பார்க்கவும்:



குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடித்த வழிமுறையை மேலும் ஒருமுறை பார்க்கவும். பயன்படுத்திய கருத்து என்ன ?

x-அச்சிற்கு இணையாக நகரும்போது y-குறிகாட்டி எண் மாறுவதில்லை; y-அச்சிற்கு இணையாக நகரும்போது x-குறிகாட்டி எண் மாறுவதில்லை;

பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையான வேறொரு செவ்வகத்தைப் பார்க்கவும்:

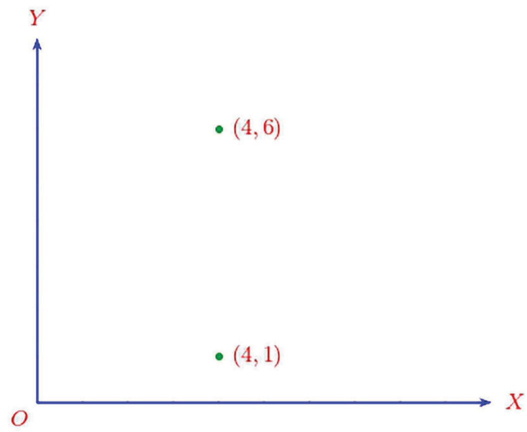
இதன் பிற இரண்டு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது ?

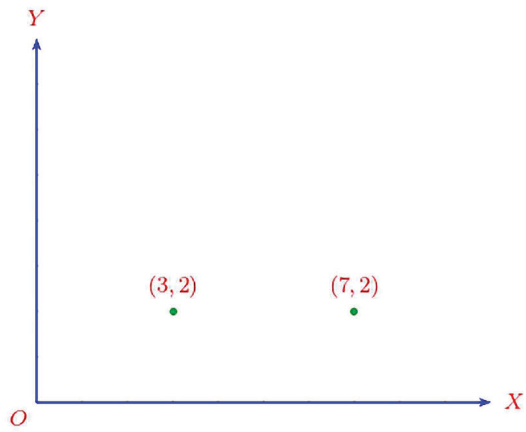
முதலில் இடது பக்கத்தில் கீழ் உச்சியைப் பார்ப்போம். இடதுபக்கத்தின் மேல் உச்சியின் x-குறிகாட்டி எண் 2; இந்தப் பக்கம் y-அச்சிற்கு இணையானதால், கீழ் உச்சியின் x-குறிகாட்டி எண்ணும் 2 ஆகும்.

இந்த உச்சி கீழ்ப்பக்கத்திலும் அல்லவா. கீழ்ப்பக்கத்தின் வலது உச்சியின் y-குறிகாட்டி எண் 1; இந்தப் பக்கம் x-அச்சுக்கு இணையானதால், இடது உச்சியின் y-குறிகாட்டி எண்ணும் 1 ஆகும்.

இதைப் போன்று சிந்தித்து, வலது மேல் உச்சியையும் கணக்கிடலாம்:

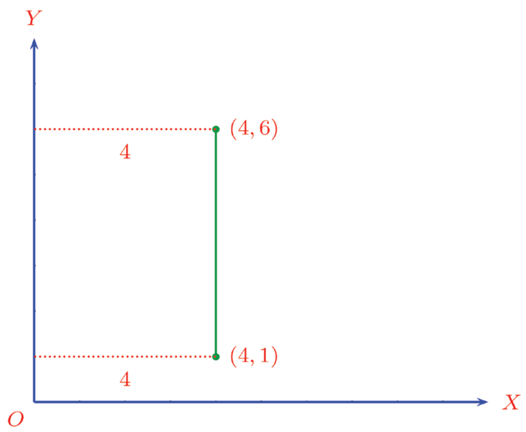
எந்த இரண்டு ஜோடி புள்ளிகளுடைய குறிகாட்டி எண்களைக் கொடுத்தாலும், இவை எதிர் உச்சிகளான செவ்வகம் வரைய இயலுமா? புள்ளிகள் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் முறையில் ஆனால் ?

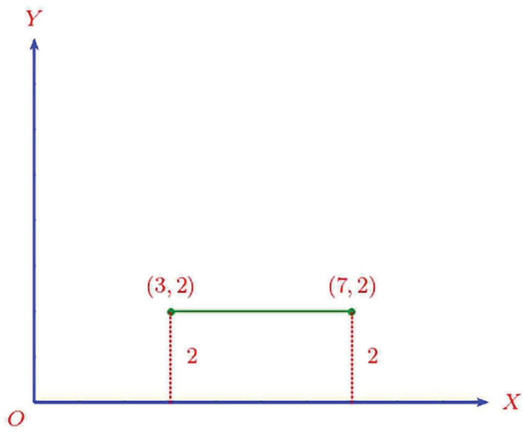




இவ்விரண்டு படங்களிலும் புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாகவும், பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் உள்ள செவ்வகம் வரைய இயலாதது ஏன் ?

முதல் படத்தின் புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோடு y-அச்சிற்கும், இரண்டாவது படத்தின் புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோடு x-அச்சிற்கும் இணையானவை அல்லவா ?





பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையான எந்தச் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டமும், அச்சுகளுக்கு இணையாகாது அல்லவா?

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

- இரண்டு புள்ளிகளின் x-குறிகாட்டி எண்கள் சமமெனில், அவற்றை இணைக்கின்ற கோடு y-அச்சிற்கு இணையாகும்.

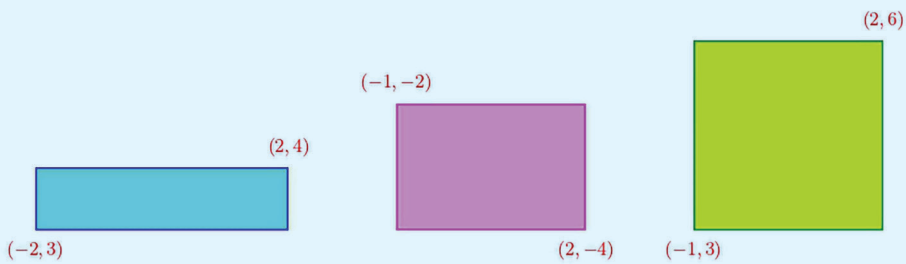
- இரண்டு புள்ளிகளின் y-குறிகாட்டி எண்கள் சமமெனில், அவற்றை இணைக்கின்ற கோடு x-அச்சிற்கு இணையாகும்.

இந்த இரண்டு வகையிலும் உள்ள புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாகவும், பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் செவ்வகம் வரைய இயலாது.

அப்போது இவ்வாறான செவ்வகம் வரைய இயலும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாகவும் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் செவ்வகம் வரைய இயலுமெனில், புள்ளிகளின் x-குறிகாட்டி எண்கள் வெவ்வேறானவை ஆக வேண்டும்; y-குறிகாட்டி எண்களும் வெவ்வேறானவை ஆக வேண்டும்.

(1) கீழே உள்ள செவ்வகங்களின் பக்கங்கள் எல்லாம் அச்சுகளுக்கு இணையாகும். ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பிற இரண்டு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்:



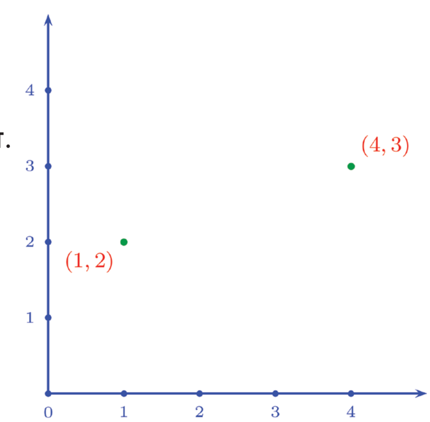
(2) அச்சுகள் வரையாமல் கீழே கூறப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் ஜோடிகளை, இடது – வலது, மேல்–கீழ் இடங்கள் சரியாக அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாவும் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் வரையும் செவ்வகங்களின் பிற உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) (3,5), (7,8) (ii) (6,2), (5, 4) (iii) (−3, 5), (−7,1) (iv) (−1, −2), (−5, −4)

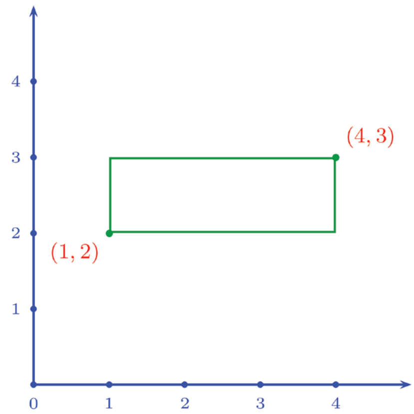
நீளங்களும் தூரங்களும்

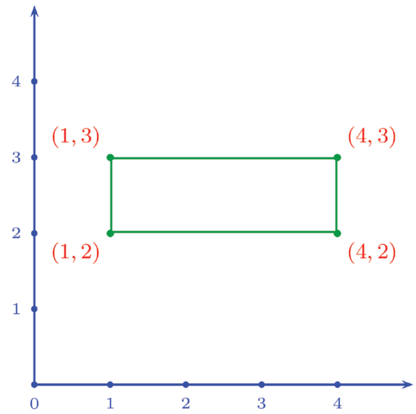
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

இரண்டு புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.



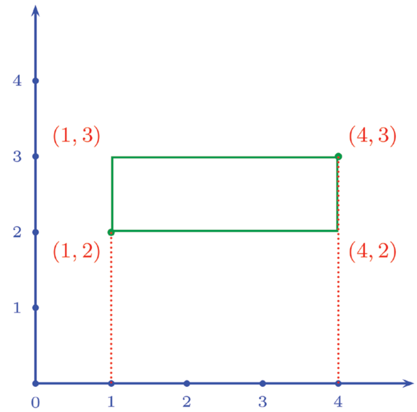
இந்தப் புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாகவும், பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் உள்ள செவ்வகம் வரையலாம் அல்லவா; அதன் பிற இரண்டு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும் செய்யலாம்:





இனி இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் கணக்கிடலாமா ?

கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் x-அச்சில் $1, 4$ என அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் அல்லவா ?



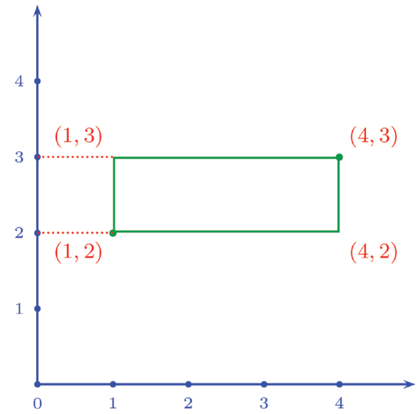
இந்தப் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் எவ்வளவு ?

அச்சுகளில் தூரங்களை அடையாளப்படுத்துவதற்கு எந்த நீளத்தையும் ஓர் அலகாக எடுக்கலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா. அப்போது, நீளங்களையும் தூரங்களையும் எல்லாம் இந்த அலகின் மடங்காக மட்டுமே கூற இயலும்.

அப்போது x-அச்சில் $1, 4$ என அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம், இந்த அலகின் 3 மடங்கு ஆகும்.

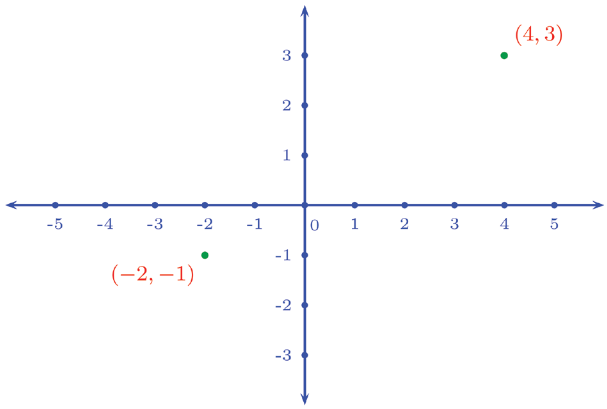
சாதாரணமாக, இத்தகைய அளவுகள் அலகுகள் ஒன்றும் இல்லாமல் எண்களாக மட்டுமே கூறப்படுகிறது. அப்போது, செவ்வகத்தின் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளம் 3 ஆகும்.

இடது, வலது பக்கங்களின் நீளம் ?

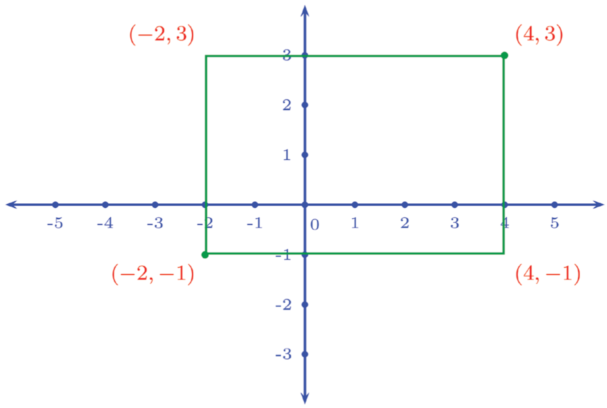


y-அச்சில் 2, 3 என அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்; அதாவது 1.

இனி எதிர் உச்சிகள் பின்வருமாறு ஆனால் ?



செவ்வகம் வரைந்து, பிற உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களையும் கணக்கிடலாம்:



கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளம், x-அச்சில் எந்த இரண்டு எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும் ?

இந்தத் தூரம் எவ்வளவு ?

இதுபோன்று, செவ்வகத்தின் இடது வலது பக்கங்களின் நீளம் கணக்கிடலாமா ?

பொதுவாக, எதிர் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆனதும் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையானதுமான செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை எவ்வாறு கூறலாம் ?

- கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளம், x-அச்சில் x_1, x_2 என்ற எண்களை அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும்.
- இடது வலது பக்கங்களின் நீளம், y-அச்சின் y_1, y_2 என்ற எண்களை அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும்.

இந்த நீளங்களை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ?

அச்சுகள் ஒவ்வொன்றினையும் ஓர் எண்கோடாகப் பார்க்கலாம். அப்போது ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றதிலிருந்து, ஒவ்வொரு நீளமும் அடையாளப்படுத்திய எண்களில் பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்ததாகும்; இந்தச் செயலை மட்டளவாக(சார்பு விலை) எழுதவும் செய்யலாம். (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **மெய்யெண்கள்** என்ற பாடத்தில் **தூரங்கள்** என்ற பகுதி).

மேலே கூறிய கருத்துக்களை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்:

எதிர் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ உம் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையானதுமான செவ்வகத்தின்

- கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளம் $|x_1 - x_2|$
- இடது வலது பக்கங்களின் நீளம் $|y_1 - y_2|$

இனி எதிர் உச்சிகளைத் தெரிந்து கொண்டால் அச்சுகள் வரையாமலே செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

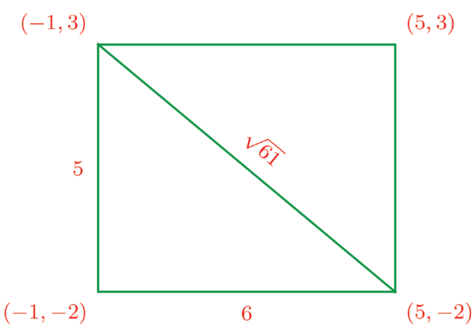
எடுத்துக்காட்டாக, எதிர் உச்சிகள் $(-1, 3), (5, -2)$ என ஆனால் ?

கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளம் $5 - (-1) = 6$

இடது, வலது பக்கங்களின் நீளம் $3 - (-2) = 5$

எதிர் உச்சிகளை இணைத்தால் கிடைப்பது, செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் அல்லவா. அதனுடைய நீளம் எவ்வளவு ?

$$\sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

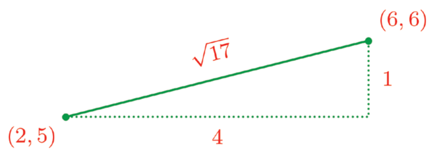


x-குறிகாட்டி எண்களும், y-குறிகாட்டி எண்களும் வெவ்வேறான எந்த இரண்டு புள்ளிகளும் ஒரு செவ்வகத்தின் எதிர் உச்சிகள் ஆகலாமல்லவா.

அப்போது அத்தகைய எந்த இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தையும் இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக (2, 5), (6, 6) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ? இவை எதிர் உச்சிகளாக வருகின்ற செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் $6-2=4$ உம் $6-5=1$ உம் ஆகும்; அப்போது மூலைவிட்டத்தின் நீளம்

$$\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$



இந்தக் கருத்தைப் பொதுவாக எவ்வாறு கூறலாம் ?

(i) குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆன இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு செவ்வகத்தின் எதிர் உச்சிகள் ஆக வேண்டுமெனில் $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ என இருக்க வேண்டும்.

(ii) செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் $|x_1-x_2|, |y_1-y_2|$

(iii) புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளமானதால், இந்தத் தூரம் $\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}$

எந்த எண்ணினுடையவும் அதன் மட்டளவினுடையவும் வர்க்கம் ஒரே எண் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா (**மெய்யெண்கள்** என்ற பாடத்தில் மட்டளவு என்ற பகுதி).

அப்போது

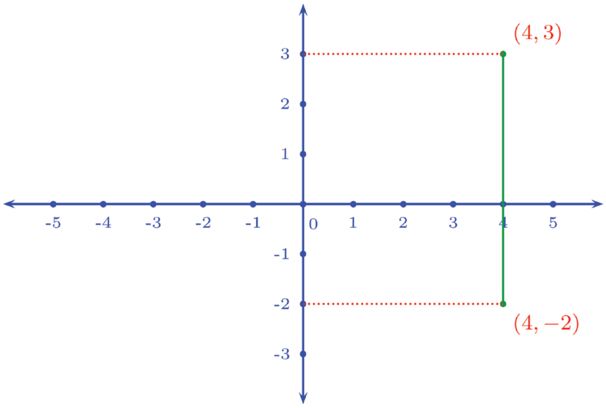
$$\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

இவற்றையெல்லாம் சேர்த்து இவ்வாறு கூறலாம்:

இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனவும், இவற்றில் $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ எனவும் ஆனால், இந்தப் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$

இனி ஏதேனும் குறிகாட்டி எண்கள் சமமான இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ?

எடுத்துக்காட்டாகக் குறிகாட்டி எண்கள் $(4, -2)$ உம் $(4, 3)$ உம் ஆன புள்ளிகளை எடுக்கலாம்:



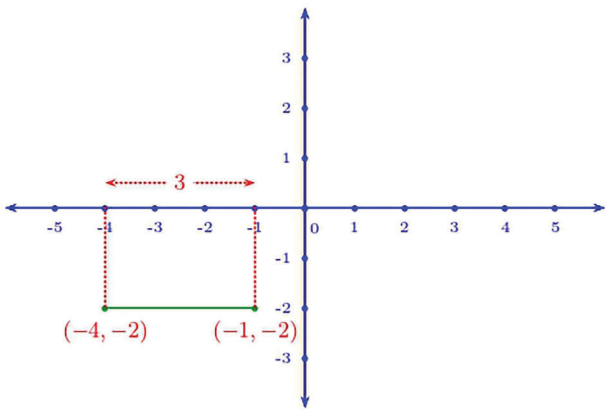
இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரம், y-அச்சில் 3, –2 என அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் அல்லவா ?

அதாவது $3 - (-2) = 5$

பொதுவாகக் கூறினால்

இரண்டு புள்ளிகளுக்கு ஒரே x குறிகாட்டி எண்கள் எனில், அவற்றை $(x, y_1), (x, y_2)$ என எடுக்கலாம்; அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் $|y_1 - y_2|$.

ஒரே y-குறிகாட்டி எண்களையுடைய புள்ளிகளானால் ?



இரண்டு புள்ளிகளுக்கு ஒரே y-குறிகாட்டி எண்கள் எனில் அவற்றை $(x_1, y), (x_2, y)$ என எடுக்கலாம்; அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் $|x_1 - x_2|$.

இனி, குறிகாட்டி எண்கள் வேறுபட்ட புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடப் பயன்படுத்திய $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$ என்ற இயற்கணித வடிவத்தில் $x_1 = x_2$ என எடுத்தால் ?

$$\sqrt{|y_1 - y_2|^2} = |y_1 - y_2|$$

$y_1 = y_2$ என எடுத்தால் ?

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2} = |x_1 - x_2|$$

அப்போது ஏதேனும் குறிகாட்டி எண்கள் சமமான புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடவும் இந்தச் செயலைப் பயன்படுத்தலாம்:

குறிகாட்டி எண்கள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆன எந்த இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

எடுத்துக்காட்டாக, குறிகாட்டி எண்கள் $(4, -2), (-3, -1)$ ஆன புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம்

$$\sqrt{(4-(-3))^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

குறிகாட்டி எண்கள் $(-2, 1)$ என்ற புள்ளிக்கும் ஆதிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் ?

$$\sqrt{(-2-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{5}$$

பொதுவாகக் கூறினால்

குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) ஆன புள்ளிக்கும், ஆதிப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $\sqrt{x^2+y^2}$

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

குறிகாட்டி எண்கள் $(-1, 2), (3, 5), (9, -3)$ ஆன புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டிலா ?

மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் எனில், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரங்களில் மிகப்பெரியது, பிற இரண்டு தூரங்களின் தொகையாக இருக்க வேண்டும்.

கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளுக்கு A, B, C எனப் பெயரிடுவோம். அப்போது

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2+(5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

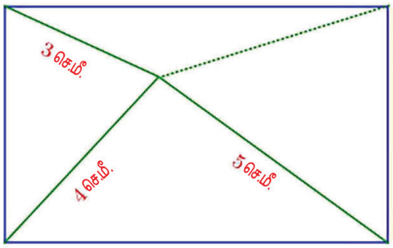
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2+(2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

இவற்றில் மிகப்பெரியது AC (அது எவ்வாறு கிடைத்தது?). இனி AB, BC என்பனவற்றின் நீளத்தைக் கூட்டினால் 15; இது AC இன் நீளம் அல்ல அப்போது A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அல்ல.

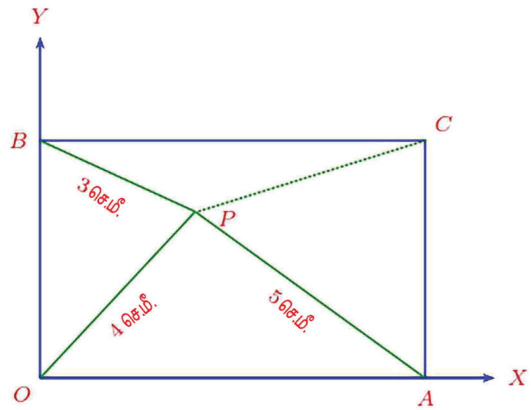
வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு செவ்வகத்தின் உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து செவ்வகத்தின் மூன்று உச்சிகளுக்கு உள்ள தூரம் 3 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர் என இவ்வாறாகும். நான்காவது உச்சிக்கு உள்ள தூரம் என்ன ?

ஒரு படம் வரையலாம்:



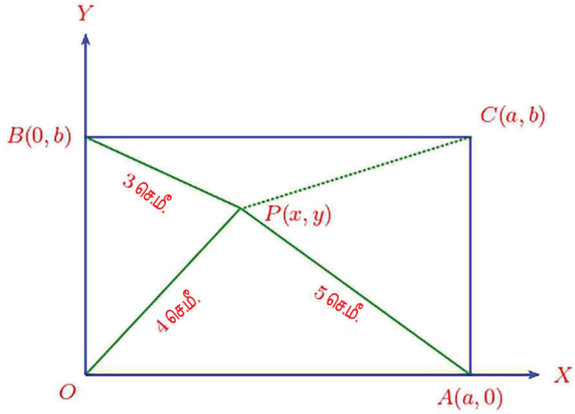
செவ்வகத்தின் கீழே இடதுபக்க உச்சியைப் ஆதிப்புள்ளியாகவும், அதன் வழியாக உள்ள இரண்டு பக்கங்களை அச்சுகளாகவும் எடுக்கலாம்:



படத்தில் A என்ற புள்ளி x-அச்சில் ஆனதால், அதன் y-குறிகாட்டி எண் 0 ஆகும்; அதன் x-குறிகாட்டி எண் a என எடுத்தால், A இன் குறிகாட்டி எண்கள் $(a, 0)$

இதைப் போன்று B இன் y-குறிகாட்டி எண்ணை b என எடுத்தால், அதன் குறிகாட்டி எண்கள் $(0, b)$, அப்போது C இன் குறிகாட்டி எண்கள் (a, b) ஆக வேண்டும்.

P இன் குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) என எடுக்கலாம்:



இனி தெரிந்த நீளங்களை எல்லாம் குறிகாட்டி எண்களைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டியது PC அல்லவா; அதன் வர்க்கம்

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

மேலே எழுதிய மூன்று சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி இதைக் கணக்கிட இயலுமா ?

இதில் முதல் மற்றும் மூன்றாம் சமன்பாட்டைக் கூட்டினால்

$$(x^2 + (y - b)^2) + (x - a)^2 + y^2 = 9 + 25$$

அதாவது,

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டில் இருந்து, $x^2 + y^2 = 16$ ஆகும் அல்லவா. இதனை இப்போது கிடைத்த சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தினால்,

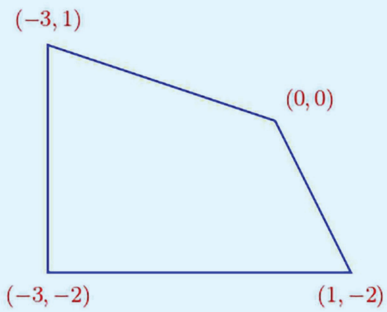
$$16 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

அப்போது,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 34 - 16 = 18$$

எனவே PC இன் நீளம் $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர்.

(1) படத்திலுள்ள நாற்கரத்தின் பக்கங்களின், மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.



(2) $(2, 1), (3, 4), (-3, 6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைத்தால், ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

(3) ஆதிப்புள்ளி மையமும், ஆரம் 10 உம் ஆன ஒரு வட்டம் வரையப்படுகிறது,

(i) குறிகாட்டி எண்கள் $(6, 9), (5, 9), (6, 8)$ ஆன புள்ளிகள் இந்த வட்டத்தின் உள்ளேயா, வெளியேயா, வட்டத்திலா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(ii) இந்த வட்டத்தில் உள்ள 8 புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எழுதுக.

(4) மையத்தின் குறிகாட்டி எண்கள் $(1, 1)$ உம், ஆரம் $\sqrt{2}$ உம் ஆன வட்டம் x-அச்சை வெட்டிச்செல்லும் புள்ளிகளுடையவும், y-அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளுடையவும் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(0, 0), (4, 0), (1, 3)$ என்ற புள்ளிகளாகும். இதன் சுற்று வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்..

இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

பாகம் 4 அ

இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

51 அ பிரிவுக்கூறு

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதிநான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

குழந்தைகளின் உரிமைகள்

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:

கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்
ஸ்ரீ கணேஷ், TC. 14/2036, வான்ரோஸ் ஜங்ஷன்,
கேரளா பல்கலைகழகம் P.O, திருவனந்தபுரம்–34, தொலைபேசி : 0471–2326603

இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்–1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்–1090, நிர்பயா–1800 425 1400
கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் – 0471–324300/44000/45000

*Online **R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***