கணிதம்

பகுதி - 2

வகுப்பு

X

Mathematics
Part - 2
Std X
Tamil Medium

கேரளஅரசு
கல்வித் துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2025

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நவத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

கணிதம்

10

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

அன்பு மாணவர்களே,

அளவுகளை எண்களாக மாற்றுவதும், அளவுகள் சார்ந்த சிக்கல்களை எண்கணிதப் பிரச்சினைகளாகவும், இயற்கணிதப் பிரச்சனைகளாகவும் மாற்றித் தீர்வுகளைக் கண்டடைவதெல்லாம் முந்தைய வகுப்புகளில் நீங்கள் கண்டறிந்துள்ளீர்கள். சார்பு எண்களின் செயல் தொடர்புகளை இயற்கணித கருத்துகளாக வளர்ச்சி அடைய செய்வதும், அவைகளை அளவுகள் தொடர்பான சிக்கல்களில் பயன்படுத்தப்படுவதையும் நீங்கள் புரிந்துகொண்டுள்ளீர்கள். வடிவங்களின் சிறப்புத் தன்மைகளை வடிவியல் கருத்துக்களாக மாற்றுவதற்கான எடுத்துக்காட்டுகளும் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

இந்த வழிமுறைகளிலேயே சற்று கூட முன்னேறுவதற்காக இப்பாடநூலில் செய்யப்பட்டுள்ளது. வெவ்வேறு கிளைகளாக வளர்ந்து வரும் வடிவியலும் இயற்கணிதமும் இணைந்து ஒரு புதிய கணிதக் கிளையை உருவாக்குவதை இங்கே காணலாம். அனைத்து அறிவியல் துறைகளிலும் பயன்படுத்துவதும், இன்று பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் செயற்கை நுண்ணறிவு உருவாக்கத்தில் தவிர்க்க முடியாததாகிய வாய்ப்புகளின் கோட்பாட்டின் முதன்மை பாடங்களும் இதில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

கணிதத்தை நேசித்துத் தொடர்ந்து படிக்க விரும்பும் மாணவர்களுக்குத் தேவையான அடிப்படை அறிவு அனைத்தும் இந்தப் பாடநூலில் உள்ளது. ஆரம்பக் கல்வியின் ஒரு நிலையை முடித்த பிறகு அனைவரும் கண்டிப்பாகக் அறிந்திருக்க வேண்டிய கணித கலாச்சாரம் தான் இந்த நூலின் உள்ளார்ந்த முக்கியத்துவம். காரிய காரண உணர்வுடன் கூடிய பகுப்பாய்வுகளை மேற்கொண்டு, அதன்மூலம் மட்டும் முடிவுகளை வடிவமைக்கத் தேவைப்படும் மனோபாவத்தை இந்தக் கலாசாரம் உருவாக்குகிறது.

அன்பான வாழ்த்துகளுடன்,

முனைவர் ஜெயபிரகாஷ் ஆர்.கெ.
இயக்குநர்
எஸ்.சி.இ.ஆர்.டி கேரளம்

TEXTBOOK DEVELOPMENT TEAM

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. P. Ramesh Kumar
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University of Kerala
Karyavattom, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Shikhi M.
Professor, College of Engineering Trivandrum,
Thiruvananthapuram.

Sumesh S.S.
Assistant Professor of Mathematics,
Dept. of Mathematics & Statistics,
Mar Ivanious College, Thiruvananthapuram.

Participants

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary
School, Pulapatta, Palakkad

Vijayakumaran T.K.
HSST (Retd.),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Pravanadukkam, Kasaragod

C.T. Firoz Babu
HST Mathematics,
GGVHSS Wandoor, Malappuram

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
GHSS, Kadannappally P.O,
Kadannappally, Kannur

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School,
Champad, Kannur

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics, GHSS Madappally,
Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K.
HST Mathematics, Pandallur HSS,
Kadambode Post, Malappuram

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

Firoza Moidu
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS,
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
HST Mathematics,
MGD High School, Puthusserry,
Puthusserry South P.O,
Pathanamthitta

Ayishakutty K.K.
HST Mathematics,
GHS, Beenachi,
Sulthanbethery, Wayanad

Rajesh M.
HST Mathematics,
Kalladi HSS Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

Ullas U.G., (Artist)
HST Physical Science, CBHSS Vallikunnu, Malappuram

Tamil Version

Language Expert

Dr. Hepsy Rose Mary A
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala,
Thiruvananthapruam.

Subject Expert

Venugopal C
Assistant Professor (Retd.)
Govt. IASE, Thrissur.

Members

S.C Edwin Daniel, HM (Retd.), GHS Pambanar, Idukki
Little Linda T R., HST Maths (Retd.), GHSS Anakkara, Idukki.
Domanatha Sarath Kame, HST Maths (Retd.), CPM GHSS Peermade, Idukki
Amirthaselvi S A, HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.
K. Palaniselvam, HST Maths, GHS Chinnakanal, Idukki.
Balson Nesa Raj N L, HST Maths, GHS Chemmannu, Idukki.

Academic Coordinator

Dr. Anilkumar A.K.
Research Officer, SCERT

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

உள்ளடக்கம்

8	தொடுகோடுகள்	159
9	பல்லுறுப்புகளும் சமன்பாடுகளும்	189
10	வட்டங்களும் கோடுகளும்	207
11	வடிவியலும் இயற்கணிதமும்	225
12	கனவடிவங்கள்	255
13	புள்ளிவிவரக் கணக்கு	277

இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காகச் சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணக்குச் செய்து பார்க்கலாம் ஆராய்ச்சி

ICT வாய்ப்பு

இந்திய அரசமைப்பு

முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

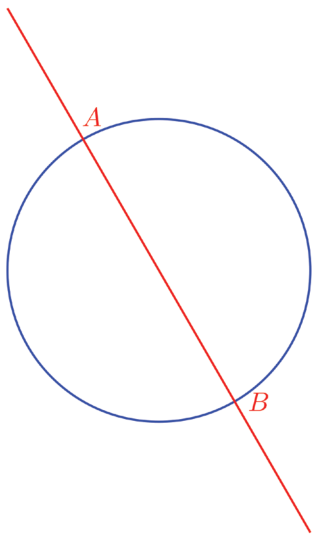
உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

8 தொடுகோடுகள்

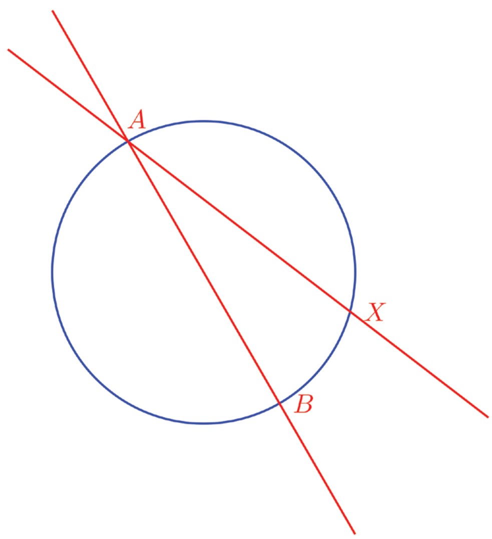
கோடுகளும் வட்டங்களும்

படத்தைப் பார்க்கவும்:

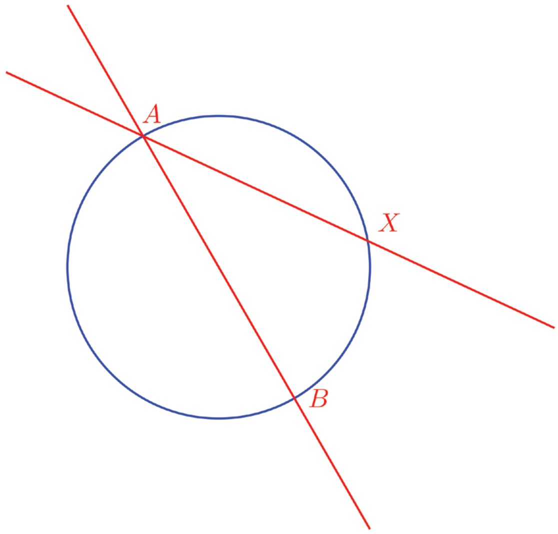


வட்டத்தில் A என்ற புள்ளியின் வழியாக உள்ள விட்டம் AB; இது இருபுறமும் சற்று நீட்டப்பட்டுள்ளது.

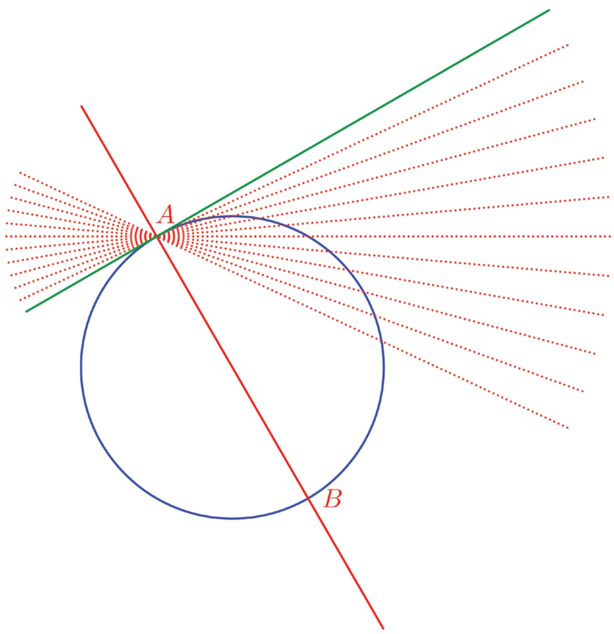
வட்டத்தில் வேறொரு புள்ளி X ஐ எடுத்து, AX என்ற நாணை இது போல நீட்டியதே இந்தப் படம்:



A இன் இடத்தை மாற்றாமல், X ஐ சற்று A ஐ நோக்கி நெருங்கி வரச் செய்தால்?



இவ்வாறு X வட்டத்தின் வழியாக A ஐ நோக்கி அதிகம் நெருங்கி வரச் செய்து கொண்டேயிருந்தால்?



ஜியோஜிப்ராவில் O என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் A, X என்ற இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். O, A என்ற புள்ளிகளையும் A, X என்ற புள்ளிகளையும் இணைத்து Line பயன்படுத்தி கோடுகள் வரையவும். X இன் இடம் A க்கு நெருங்கும் போது AX என்ற கோட்டிற்கு என்ன நிகழும்? X என்ற புள்ளி A ஐ அடையும் போது? O, X இவற்றை இணைக்கவும். X ன் இடம் A க்கு நெருங்கும் போது OAX, AOX என்ற கோணங்களுக்கு என்ன மாற்றம் நிகழும் என்று பார்க்கவும்.

AX என்ற கோடு படத்திலுள்ள பச்சை நிறக் கோட்டை நெருங்கி நெருங்கி வருகிறதல்லவா ?

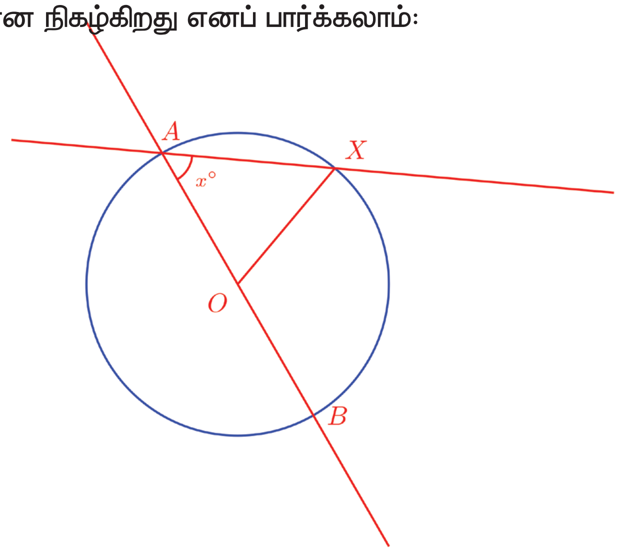
இந்தப் பச்சை நிறக் கோட்டைக் குறித்து என்ன கூறலாம்?

அது வட்டத்தை A இல் மட்டும் தொடுகிறது அல்லவா ?

இந்தக் கோட்டை வட்டத்தில் A என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு **(tangent)** எனக் கூறுவர். படத்தை இன்னும் ஒருமுறை பார்க்கவும்; விட்டத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடையே ஏதேனும்

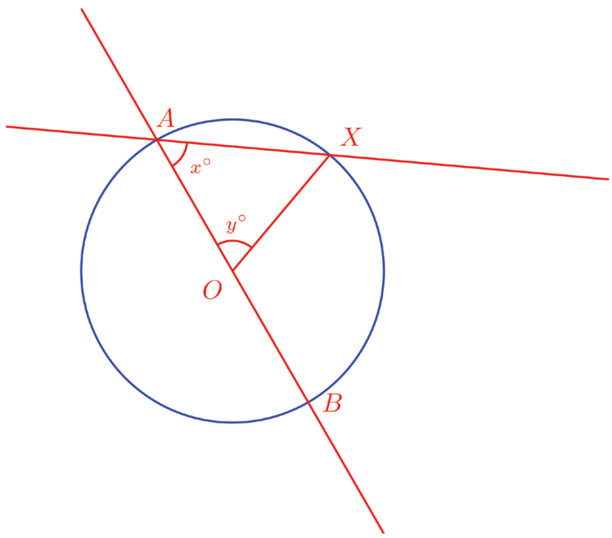
தொடர்பு காணப்படுகிறதா? தொடுகோடு விட்டத்திற்குச் செங்குத்து என தோன்றுகிறதல்லவா ?

இதைப் பரிசோதனை செய்ய, X என்ற புள்ளி வட்டத்தின் வழியாக A என்ற புள்ளியை நெருங்கும் போது இந்த நாணிற்கும் விட்டத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணத்திற்கு என்ன நிகழ்கிறது எனப் பார்க்கலாம்:



X என்ற புள்ளி A என்ற புள்ளியை நெருங்கும் போது படத்தில் $x°$ என்று அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள இந்தக் கோணம் பெரியதாகும். எதுவரைக்கும் பெரியதாகும்?

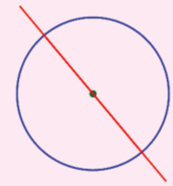
அதைப் புரிந்து கொள்வதற்கு, AX என்ற நாணின் மையக் கோணம் $y°$ என எடுக்கலாம்.



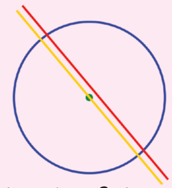
X என்ற புள்ளி A ஐ நெருங்கும்போது, AX என்ற நாணின் நீளமும், அதன் மையக் கோணமும் சிறியதாகும், அதாவது y என்ற எண், பூஜ்யத்தை நெருங்கும்.

நகரும் கோடுகள்

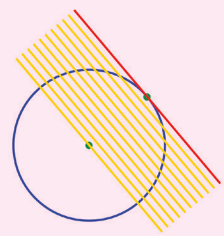
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



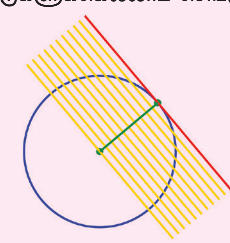
ஒரு வட்டமும், மையம் வழியாக ஒரு கோடும். கோட்டைச் சற்று மேல் நோக்கி நகர்த்தினால்?



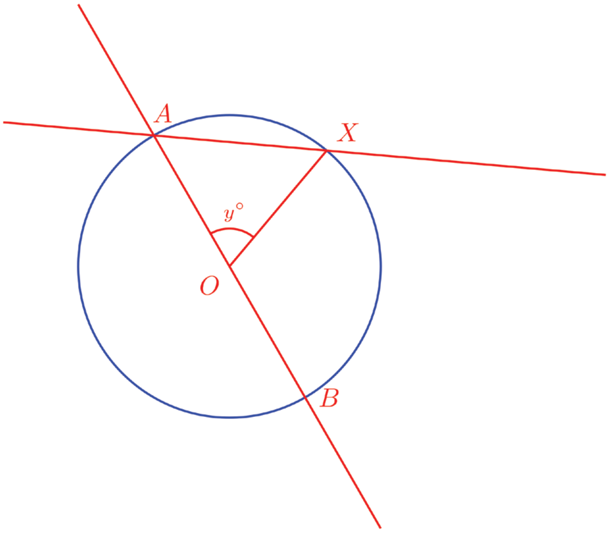
கோட்டை மீண்டும் மீண்டும் நகர்த்திக் கொண்டேயிருந்தால் வட்டத்தில் ஒரேயொரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கோடு ஆகுமல்லவா?

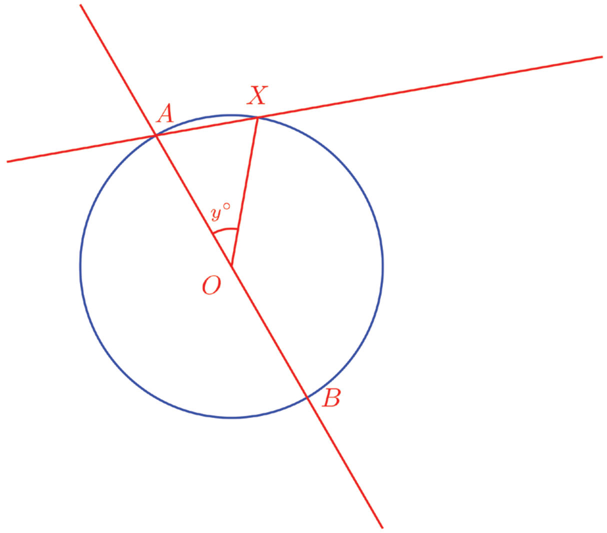


மையத்தையும் கடைசியில் கிடைத்த புள்ளியையும் இணைக்கின்ற கோடு இந்த இணைகோடுகளுக்கெல்லாம் செங்குத்தல்லவா.



ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டத்தையும் அதன் ஒரு ஆரத்தையும் வரையவும். ஆரத்தில் ஒரு புள்ளியை (Point on Object) அடையாளப்படுத்தி அதன் வழியாக ஆரத்திற்குச் செங்குத்துக் கோடு வரையவும். புள்ளியின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். இந்தப் புள்ளி வட்டத்தை அடையும்போது கோட்டிற்கு என்ன நிகழ்கிறது?



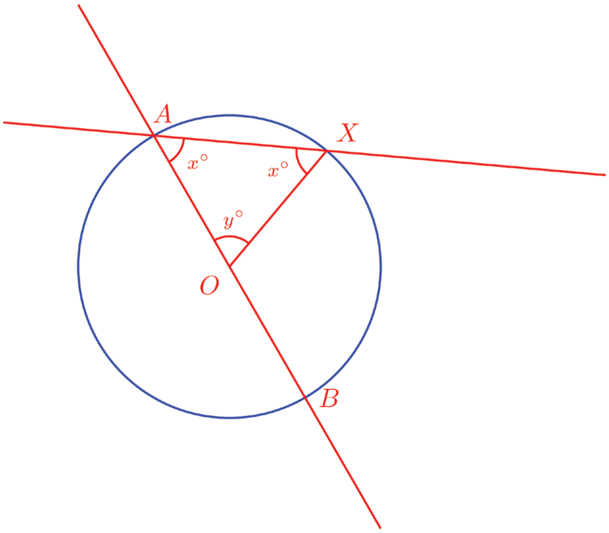


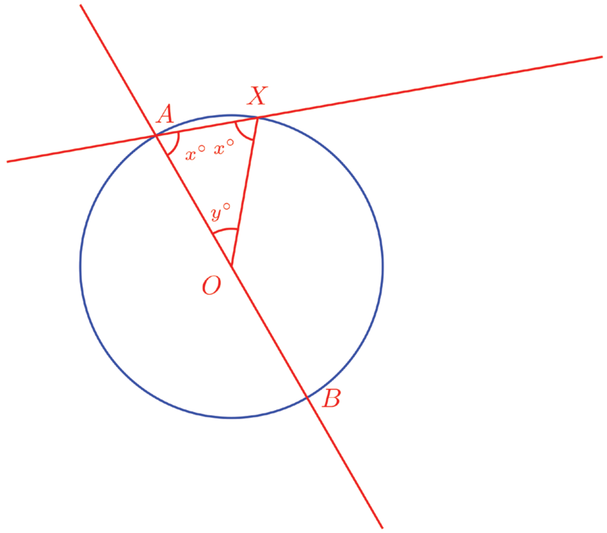
நாம் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியது, x என்ற எண்ணிற்கு என்ன நிகழ்கிறது என்பதல்லவா;

x க்கும் y க்கும் இடையை உள்ள தொடர்பு என்ன ?

OAX என்ற முக்கோணத்தின் OA, OX என்னும் பக்கங்கள் வட்டத்தின் ஆரங்களாகும்; எனவே அவற்றிற்கு ஒரே நீளங்கள் ஆகும். அப்போது முக்கோணத்தில் இவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமமாக வேண்டுமல்லவா (எட்டாம் வகுப்பில் **சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இருசமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது OAX என்ற முக்கோணத்தில் மூன்றாவது கோணம் $x°$ ஆகும்.





முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆனதால்

$$2x + y = 180$$

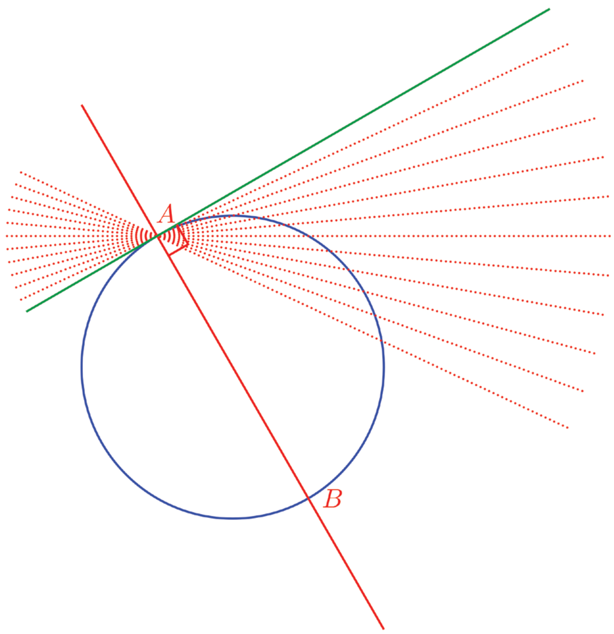
அதாவது,

$$x = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$$

y என்ற எண் பூஜ்யத்தை நெருங்கும்போது, x என்ற எண் 90 ஐ நெருங்கும் என இந்தத் தொடர்பிலிருந்து காணலாமல்லவா.

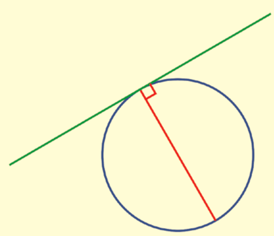
அதாவது, X என்ற புள்ளி A என்ற புள்ளியை நெருங்கும் போது, AX என்ற நாணும் விட்டமும் சேர்ந்து உருவாக்கும் கோணம் $90°$ ஐ நெருங்கி நெருங்கி வரும்;

தொடுகோடாகும் போது சரியாக $90°$ ஆகவும் செய்யும்.



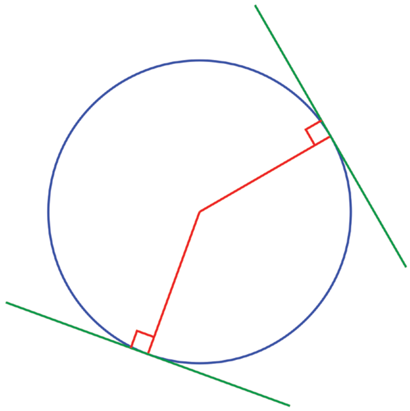
இதை ஒரு பொது கருத்தாகக் கூறலாம்:

வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியாக உள்ள தொடுகோடு, அந்த புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

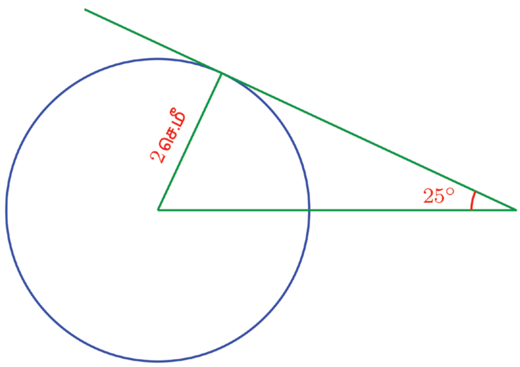


இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு வட்டத்தின் எந்தப் புள்ளி வழியாகவும் தொடுகோடு வரையலாம். அந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்திற்கு அதே புள்ளி வழியாகச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் போதுமல்லவா.

விட்டம் முழுவதும் வரையாமல் அந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள ஆரம் வரைந்தாலும் போதும்:

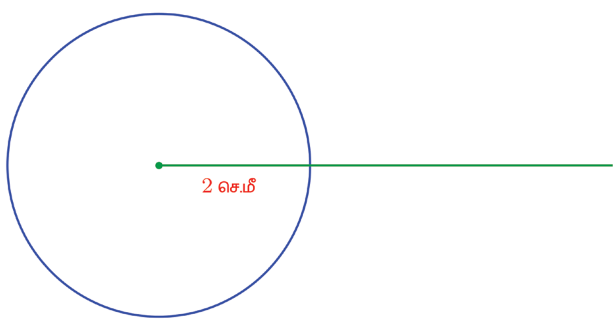


இனி பின்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்:



மேலே காணப்படும் கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆகும். இந்தப் படத்தை நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரையலாமா ?

முதலில் 2 செ.மீ. ஆரத்தில் வட்டம் வரையலாம். மையத்தின் வழியாகக் கிடைமட்டமாக ஒரு கோடும் வரையலாம்:



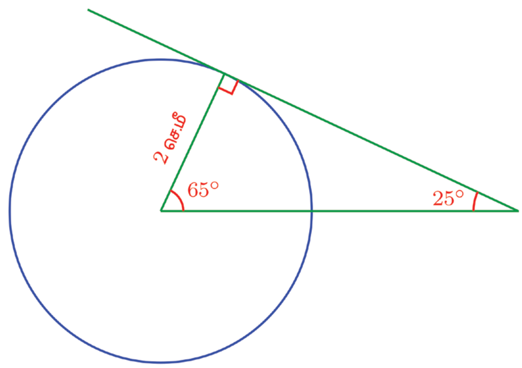
இனி வட்டத்தில் எந்தப் புள்ளி வழியாகத் தொடுகோடு வரைய வேண்டும்? அது முதல் கோட்டை 25° சாய்வில் சந்திக்க வேண்டும் அல்லவா.

முதல் படத்தை இன்னும் ஒரு முறை பார்க்கவும். அதில் முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியிலுள்ள கோணம் செங்கோணமாகும்; வேறொரு கோணம் 25°.

வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைய ஜியோஜிப்ராவில் Tangents ஐ எடுத்து வட்டத்திலும் தொடுகோடு கடந்து செல்ல வேண்டிய புள்ளியிலும் கிளிக் செய்தால் போதும். புள்ளி வட்டத்தில் இருந்தால் ஒரு தொடுகோடு கிடைக்குமல்லவா. வட்டத்திற்கு வெளியே ஆனால்?

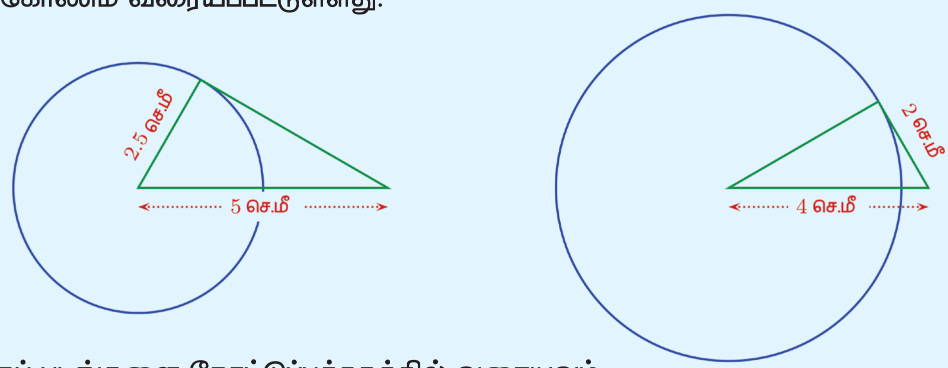
வட்டத்திற்கு அதிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்து அதன் Trace On ஐ கொடுக்கவும். தொடுகோடு வரைந்து புள்ளிக்கும் Animation கொடுத்துப் பார்க்கவும்.

அப்போது மூன்றாவது கோணம் எத்தனை டிகிரி ?



இனி படத்தை முழுமையாக்கலாமல்லவா.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு படங்களிலும் வட்டத்தில் ஒரு தொடுகோடும், தொடுகின்ற புள்ளி வழியாக உள்ள ஆரமும், மையத்திலிருந்துள்ள வேறொருகோடும் சேர்த்து முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.



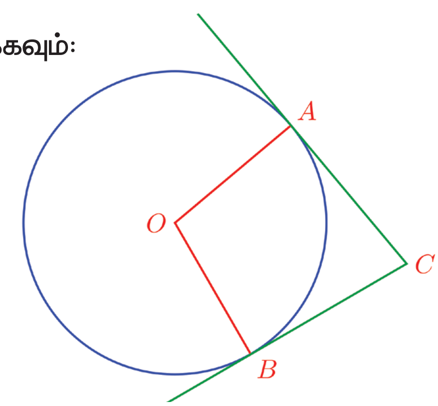
இந்தப் படங்களை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும்.

(2) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் இருமுனைகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இணையானவை என நிரூபிக்கவும்.

(3) ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு விட்டங்களின் முனைகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சேரும்போது உருவாகும் நாற்கரம் எத்தகையது ?

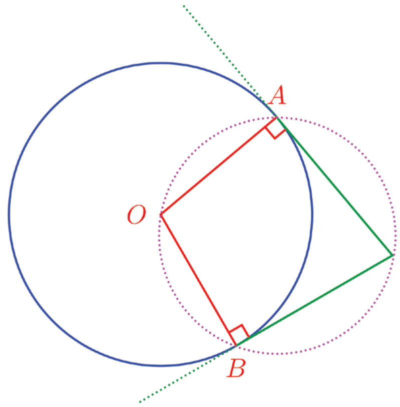
தொடுகோடுகளும் கோணங்களும்

பின்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்:

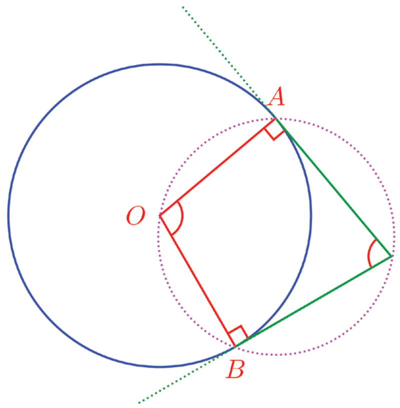


O மையமான வட்டத்தில் A, B என்னும் புள்ளிகள் வழியாக உள்ள தொடுகோடுகள், C என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

$OACB$ என்ற நாற்கரத்தில் A, B என்னும் எதிர் உச்சிகளிலுள்ள கோணங்கள் செங்கோணமாகும். எனவே, அவற்றின் தொகை $180°$. அப்போது இந்த நாற்கரம் வட்டநாற்கரமாகும்.



இத்தகைய ஒரு நாற்கரத்தில் மற்ற இரண்டு கோணங்களின் தொகையும் $180°$ அல்லவா.



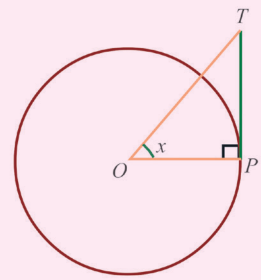
இதை ஒரு பொதுக் கருத்தாகக் கூறலாம்:

ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்கள் இணையும் கோணத்தினுடையவும், இந்தப் புள்ளிகளிலுள்ள தொடுகோடுகள் இணையும் கோணத்தினுடையவும் தொகை $180°$ ஆகும்

பெயர்த் தகவல்

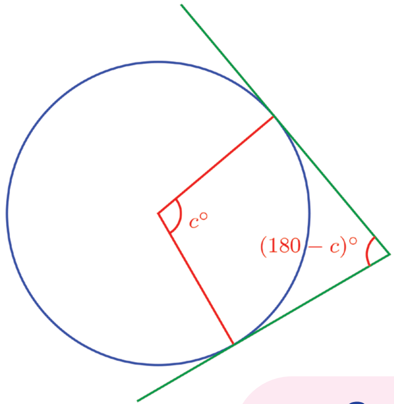
தொடுகோடு என்று அர்த்தமுள்ள tangere என்ற இலத்தீன் சொல்லில் இருந்து தொடுகோட்டிற்கு ஆங்கிலத்தில் tangent என்ற பெயர் வந்தது. முக்கோணவியலில் tan என்ற அளவினுடைய முழுப்பெயர் tangent என்பதல்லவா. இதற்குத் தொடுகோட்டுடன் உள்ள தொடர்பு என்ன ?

பின்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்:

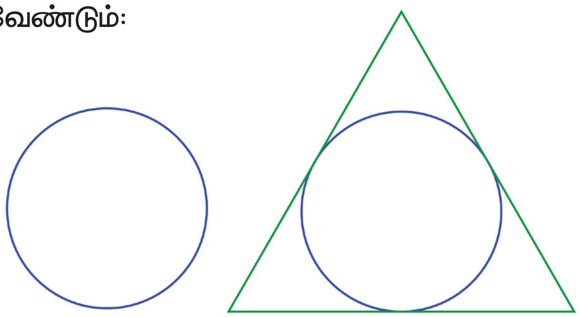


வட்டத்தின் ஆரம் 1 என எடுத்தால், PT என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் $\tan x$ அல்லவா ?

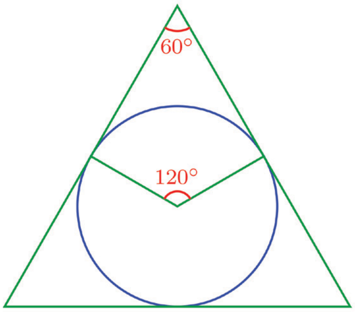
O என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்து அதில் A, B என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் வழியாக வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளி C அடையாளப்படுத்தவும். நாற்கரம் OACB வரைந்து பார்க்கவும். இது வட்ட நாற்கரமா? Circle through Three Points பயன்படுத்தி O, A, B என்ற புள்ளிகள் வழி கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைந்து பார்க்கவும்.. A, B இவற்றின் இடங்களை மாற்றிப் பார்க்கவும். இவை நெருங்கி நெருங்கி வரும் போது C க்கு என்ன நிகழ்கிறது ? அகன்று போகும் போது? இந்தப் புள்ளிகள் ஒரு விட்டத்தின் முனைப் புள்ளிகளாகும் போது என்ன நிகழும் ?



இதைப் பயன்படுத்தி வரையக்கூடிய ஒரு படத்தைப் பார்க்கலாம். ஒரு வட்டத்தை சரியாக உள்ளடக்கிய சமபக்கமுக்கோணம் வரைய வேண்டும்:



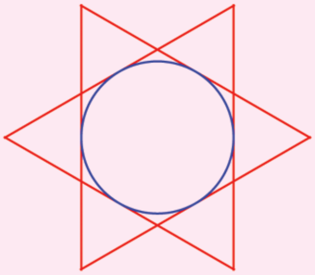
முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தின் தொடுகோடுகளல்லவா. முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமானதால் இவை, இணைகின்ற கோணம் $60°$. இவை வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்கள் சேருகின்ற கோணங்கள்?



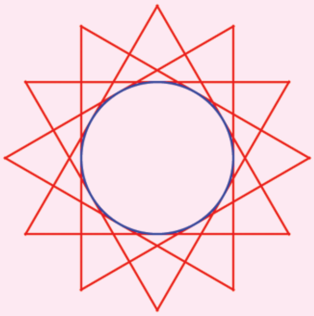
இதுபோல, முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணங்கள் எல்லாம் $120°$ என்று பார்க்கலாம்.

கோடுகளால் ஒரு வட்டம்

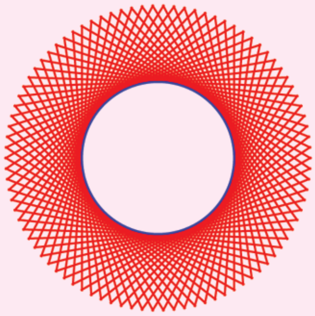
படத்தில் ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஆறு புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் வரைந்து, ஒரு நட்சத்திரம் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

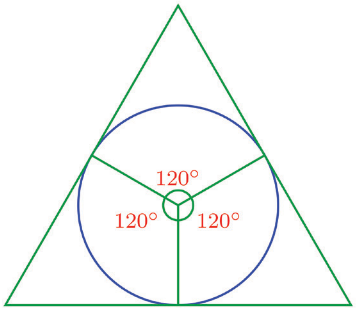


கோடுகளின் எண்ணிக்கையை 12 ஆக்கினால் ?

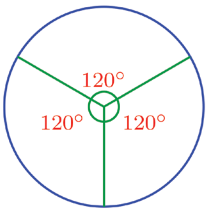


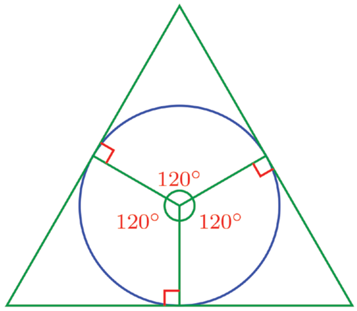
கணினியைப் பயன்படுத்தி, 90 கோடுகள் வரைந்த படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:





அப்போது வட்ட மையத்தில் 120° இடைவெளி விட்டு மூன்று ஆரங்கள் வரைந்து அவற்றின் முனைகளின் வழியாகச் செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால் தொடுகோடுகள் ஆகும். நமக்குத் தேவையான முக்கோணமும் கிடைத்தது.

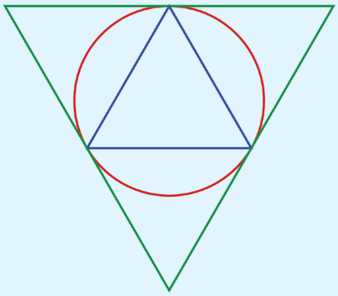




3 சென்டிமீட்டர் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து, இவ்வாறான ஒரு முக்கோணமும் வரைந்து பார்க்கவும்

(1) ஆரம் 2.5 செ.மீ உள்ள ஒரு வட்டம் வரையவும். பக்கங்களெல்லாம் இந்த வட்டத்தைத் தொடுகின்றதும், கோணங்கள் 40°, 60°, 80° உடையதுமான முக்கோணம் வரையவும்.

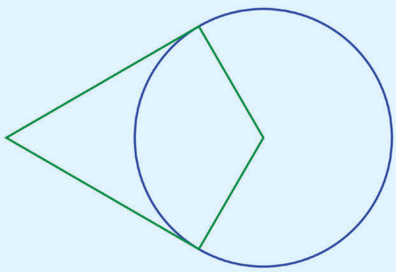
(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் சிறிய (நீலம்) முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாகும். அதன் உச்சிகள் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்கு வரைகின்ற தொடுகோடுகளே பெரிய (பச்சை) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்:



(i) பெரிய முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் எனவும், அதன் பக்கங்கள் சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் இரண்டு மடங்கு எனவும் நிறுவுக.

(ii) சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டராக இந்தப் படத்தை வரையவும்.

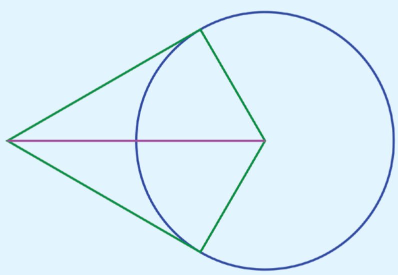
(3) ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு தொடுகோடுகளும், தொடுகின்ற புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்களும் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமென நிறுவுக.

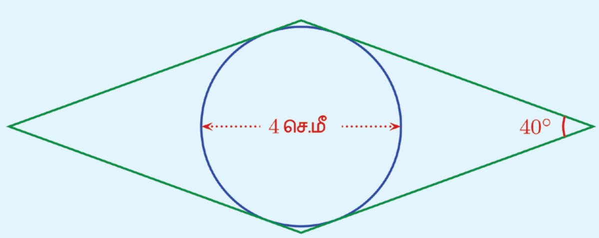
(ii) வட்டமையத்தையும் தொடுகோடுகள் இணைகின்ற புள்ளியையும் இணைக்கின்ற கோடு, ஆரங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டி என நிறுவுக.

ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தவும். Angle with Given Size பயன்படுத்தி இந்தப் புள்ளியிலும் வட்ட மையத்திலும் வரிசையாக கிளிக் செய்து கோணத்தின் அளவு 120° என கொடுத்தால் வட்டத்தில் வேறொரு புள்ளி கிடைக்கும். இந்தப் புள்ளியிலும் வட்ட மையத்திலும் கிளிக் செய்து 120° எனக் கொடுத்தால் மேலும் ஒரு புள்ளி வட்டத்தில் கிடைக்கும். இந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகவும் வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை இணைகின்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Segment பயன்படுத்தி இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையவும். இனித் தொடுகோடுகளை மறைத்து வைக்கலாம். முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு Trace on அளித்துப் பின் வட்டத்தில் முதலில் எடுத்த புள்ளிக்கு Animation அளித்துப் பார்க்கவும்.



(iii) இந்தக் கோடு தொடுகின்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் செங்குத்து இரு சமவெட்டி என நிறுவுக.

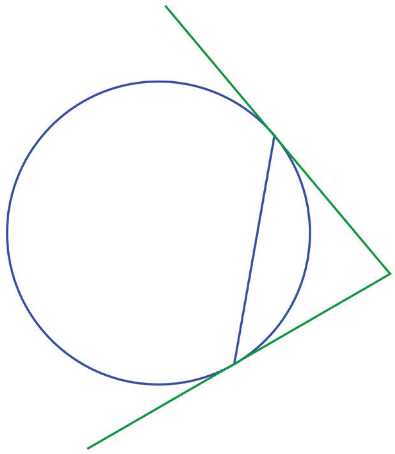
(4) படத்தில் சாய்வு சதுரத்தின் பக்கங்களெல்லாம் வட்டத்தின் தொடுகோடுகளாகும்.



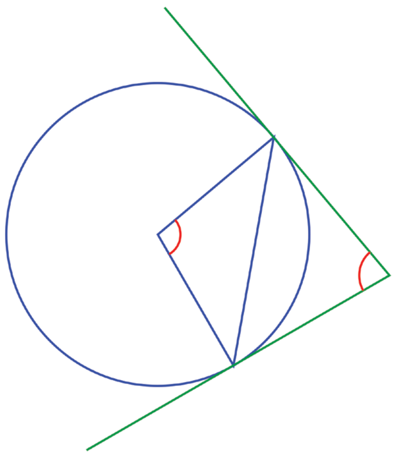
இந்தப் படத்தை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும்.

நாணும் தொடுகோடும்

வட்டத்தின் ஒரு நாணின் இரண்டு முனைகளிலுமுள்ள தொடுகோடுகள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

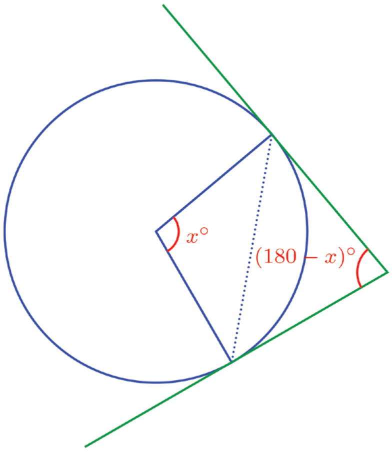


நாணின் மையக்கோணத்திற்கும், தொடுகோடுகள் இணைகின்ற கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு?



A என்ற புள்ளியை மையமாக வைத்து ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டத்தில் B, C என்ற இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் வழியாகத் தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை இணைகின்ற புள்ளி D என அடையாளப்படுத்தவும். AB, AC என்ற கோடுகளும் BC என்ற நாணும் வரையவும். BAC, BDC என்ற கோணங்களுக்கிடையில் உள்ள தொடர்பு என்ன ? B, C ஆகிய புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

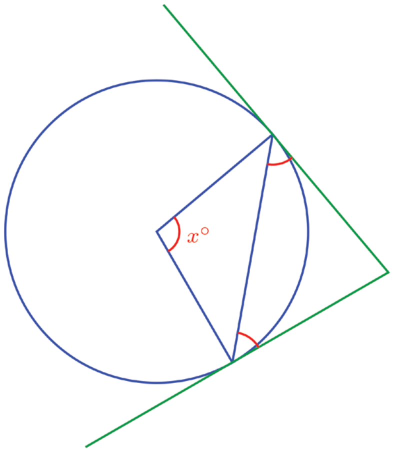
முன்பு பார்த்ததன்படி இவற்றின் தொகை $180°$ அல்லவா.



அப்போது முன்பு பார்த்த கருத்தைப் பின்வருமாறும் கூறலாம்:

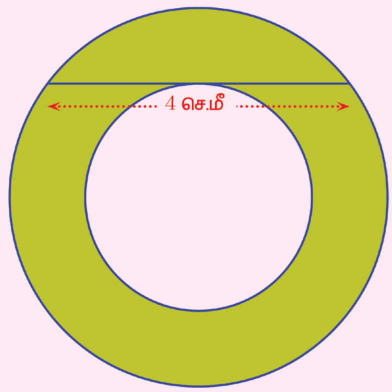
வட்டத்தின் ஒரு நாணின் இரண்டு முனைகளிலுள்ள தொடுகோடுகள் இணையும் கோணம் 180° யிலிருந்து நாணின் மையக் கோணத்தைக் கழித்ததாகும்.

இனி நாணின் முனைகளிலுள்ள தொடுகோடுகள் நாணுடன் உருவாக்குகின்ற கோணங்களுக்கு நாணின் மையக்கோணத்துடன் என்ன தொடர்பு எனப் பார்க்கலாம்:

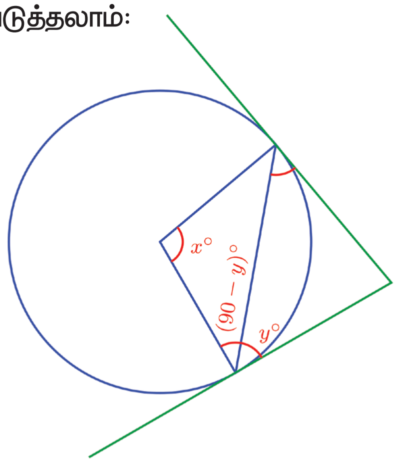


பரப்பளவு பிரச்சினை

கீழேயுள்ள படத்தில் பச்சைப் பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவு?



கீழ்ப்பக்கத்திலுள்ள தொடுகோடு நாணுடன் உருவாக்குகின்ற கோணம் y° என எடுக்கலாம். இந்தத் தொடுகோட்டிற்கும் தொடுகின்ற புள்ளியின் வழியாக உள்ள ஆரத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணம் 90° ஆனதால் கோணங்களை பின்வருமாறு அடையாளப்படுத்தலாம்:



ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் ஒரு நானும், நாணின் இரண்டு முனைகள் வழியாகவும் தொடுகோடுகளும் வரையவும். நாணின் மையக் கோணத்தையும், நாண் தொடுகோட்டுடன் உருவாக்கும் கோணத்தையும் அடையாளப்படுத்தவும். இந்தக் கோணங்களுக்கிடையே என்ன தொடர்பு? நாணின் முனைப்புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பல நாண்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.

வட்டத்தின் உள்ளேயுள்ள (நீலம்) முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் வட்டத்தின் ஆரங்களானதால், அவற்றிற்கு ஒரே நீளமாகும்; அப்போது முக்கோணத்தின் அதே பக்கங்களுக்கெதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

அதாவது முக்கோணத்தின் மூன்றாவது கோணமும் $(90 - y)^\circ$ ஆகும். முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 180° ஆனதால்

$$x + (90 - y) + (90 - y) = 180$$

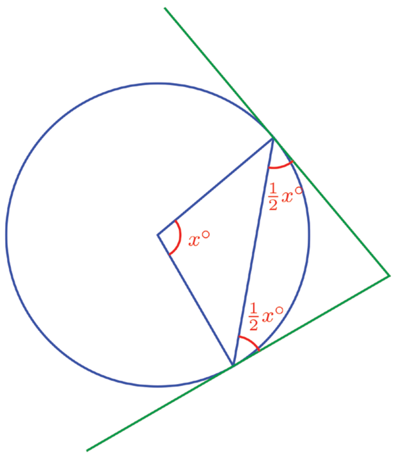
இதிலிருந்து

$$x - 2y = 0$$

எனக் காணலாமல்லவா. அதாவது,

$$y = \frac{1}{2}x$$

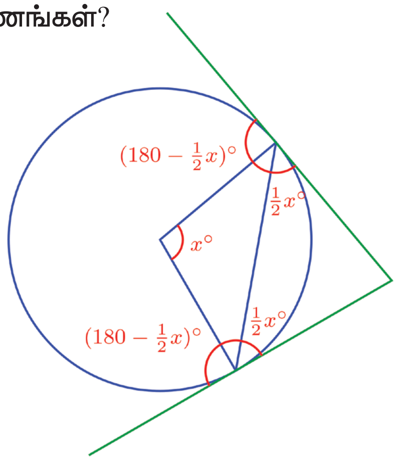
இதுபோல மேல்பக்கத்தில் உள்ள தொடுகோடு நாணுடன் உருவாக்குகின்ற கோணமும் $\frac{1}{2}x^\circ$ எனக் கணக்கிடலாம்:



அதாவது

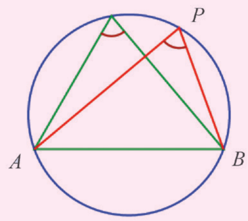
வட்டத்தில் ஒரு நாணின் இரண்டு முனைகளின் வழியாக உள்ள தொடுகோடுகள் நாணுடன் ஒரு பக்கத்தில் உருவாக்குகின்ற கோணங்கள் இரண்டும், நாணின் மையக்கோணத்தின் பாதியாகும்.

நாணின் மறுபக்கத்தில் உருவாக்குகின்ற கோணங்கள்?

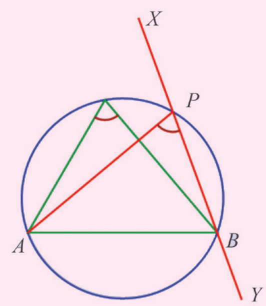


மாறாத கோணம்

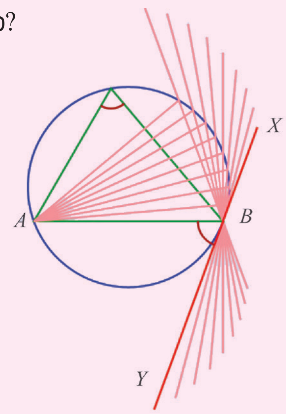
ஒரு வட்டப் பகுதியிலுள்ள கோணங்களெல்லாம் சமம் அல்லவா.



PB ஐ சற்று நீட்டி வரையலாம்:



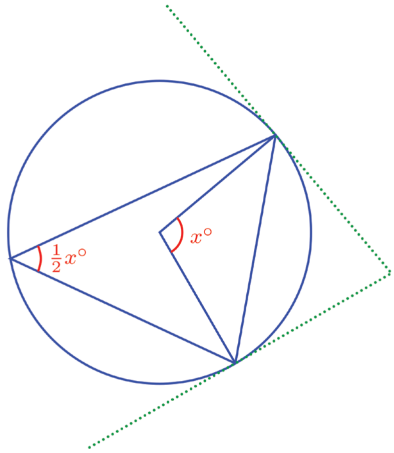
இனி P வட்டத்தின் வழியாக நகர்ந்து, B ஐ அடைந்தால்?

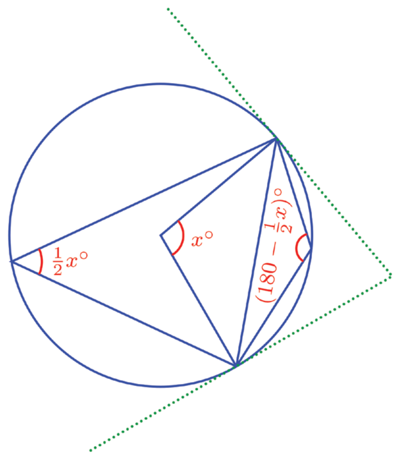


XY என்ற கோடு B இன் தொடுகோடாகும், கோணம் சற்றும் மாறவில்லை.

இங்கு வட்டங்களும் கோணங்களும் என்ற பாடத்தில் பார்த்த ஒரு கருத்தை நினைவு கூரலாம்.

மையக்கோணம் x° ஆன வில்லின் முனைகள் மறுவில்லில் உருவாக்குகின்ற கோணம் $\frac{1}{2}x^\circ$ யும் அதே வில்லில் உருவாக்குகின்ற கோணம் $\left(180-\frac{1}{2}x\right)^\circ$ யும் அல்லவா ?



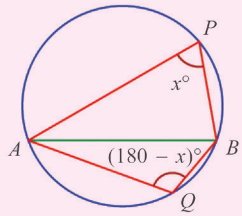


வேறொரு முறையில் கூறினால், இங்கு தொடுகோடுகள் நாணுடன் வலது பக்கத்தில் உருவாக்குகின்ற கோணங்கள் $\frac{1}{2}x^\circ$ ஆகும். நாணின் இடது பக்கத்திலுள்ள வட்டத்துண்டில் எந்தக் கோணம் எடுத்தாலும் $\frac{1}{2}x^\circ$ ஆகும்.

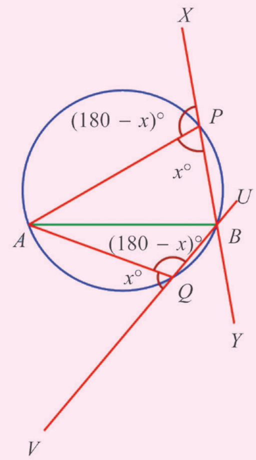
தொடுகோடுகள் நாணின் இடது பக்கத்தில் உருவாக்கும் $\left(180-\frac{1}{2}x\right)^\circ$ கோணங்கள் ?

திருப்பும் கோணங்கள்

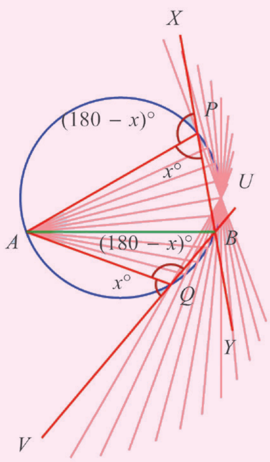
வட்டத்தில் இரு பாகங்களிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை 180° அல்லவா.



முன்பு செய்தது போல கோடுகளை நீட்டி வரையலாம்,



P வட்டத்தின் வழியாக Q இல் நீங்கினால்?

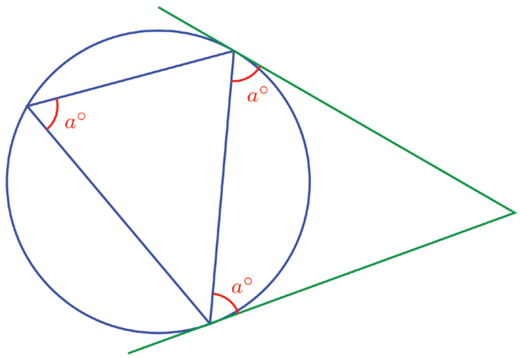


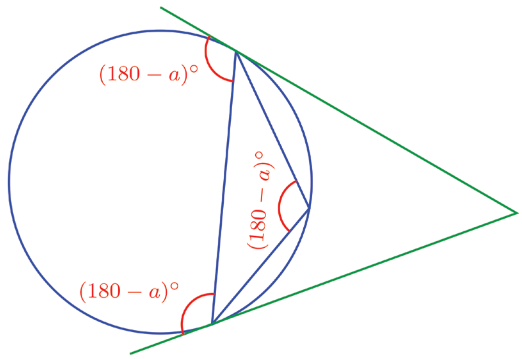
AP இன் கீழ் x° உம் மேல் $(180-x)^\circ$ உம் ஆகும். இடப்பெயர்ச்சியின் நீளம் அவ்வாறு அல்லவா?

அப்போது பொதுவாக வட்டத்திலுள்ள நாணுடன் அதன் முனைகளிலுள்ள தொடுகோடுகள் உருவாக்கும் கோணங்களைக் குறித்து பின்வருமாறு கூறலாம்:

வட்டத்திலுள்ள ஒரு நாணின் முனைகளில் வரையும் தொடுகோடுகள் நாணுடன் உருவாக்கும் கோணங்களில் ஒரு பக்கத்திலுள்ள கோணங்கள் இரண்டும் மறுபக்கத்தில் வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணங்களுக்குச் சமமாகும்.

A என்ற புள்ளியை மையமாக வைத்து ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B, C என்ற நாண் வரையவும். இந்த நாண் தொடுகோடுகளுடன் ஒரு பக்கத்தில் உருவாக்கும் கோணங்களும் நாணின் மையக்கோணமும் அடையாளப்படுத்தவும். இவற்றிற்கிடையில் என்ன தொடர்பு? நாணின் மறுபக்கத்தில் வட்டத் துண்டில் D அடையாளப்படுத்தவும். BD, CD என்ற கோடுகள் வரைந்து கோணம் D அடையாளப்படுத்தவும். தொடுகோடுகள் நாணுடன் ஒரு பக்கத்தில் உருவாக்கும் கோணத்திற்கும் மறுபக்கத்தில் வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணத்திற்கும் (கோணம் D) உள்ள தொடர்பு?

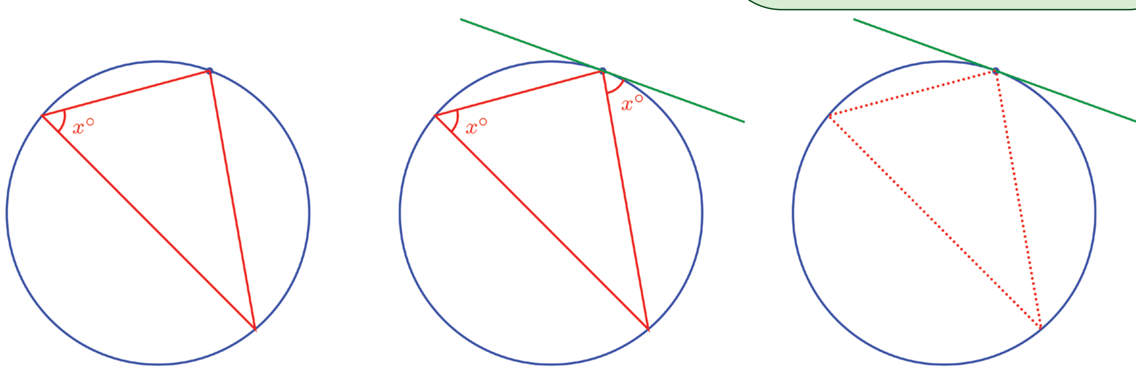




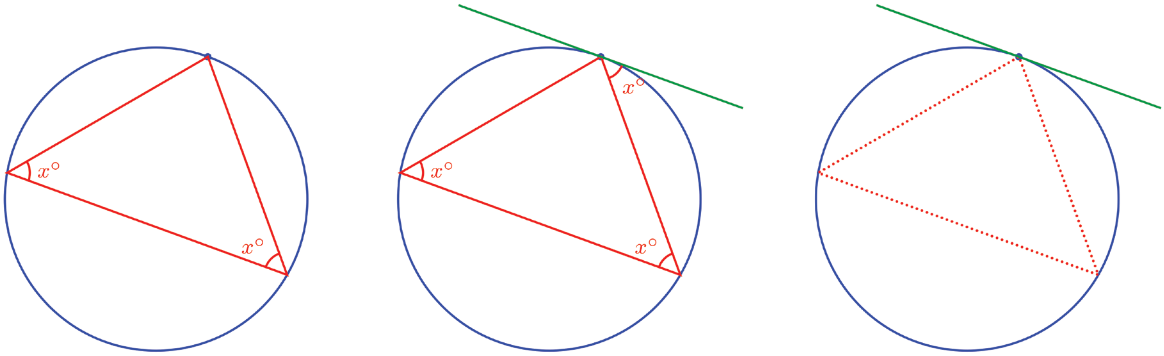
வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி வழியாக உள்ள தொடுகோடு வரைவது இந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து அல்லவா. மையம் தெரியாவிட்டாலும் தொடுகோடு வரைய மேற்கூறிய கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

புள்ளி வழியாக ஒரு நாண் வரைந்து அது வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் உருவாக்குகின்ற கோணம், நாணின் மறுபக்கத்தில் உருவாக்கினால் போதும்.

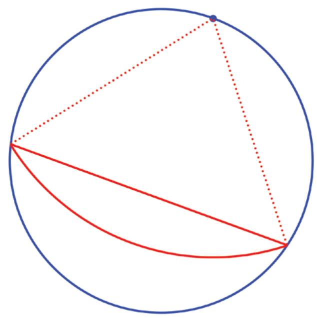
ஒரு வட்டம் வரையவும். AB புள்ளிகள் வரையவும் A, B என்ற புள்ளிகள் வழியாகத் தொடுகோடுகள் வரைந்து தொடுகோட்டிற்கும் நாணிற்கும் இடையிலுள்ள கோணங்களை அடையாளப்படுத்தவும். வட்டத்தில் C என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி AC, BC இவற்றை வரைந்து ∠ACB அடையாளப்படுத்தவும். இந்தக் கோணங்களுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பு என்ன? A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



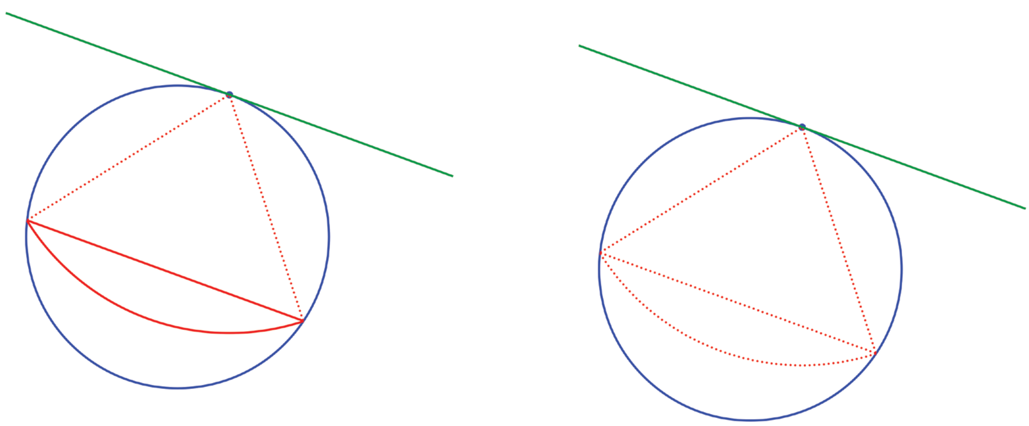
இதில் முக்கோணத்தை இருசமபக்க முக்கோணமாக வரைவதற்கு அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக மேலே உள்ள புள்ளி வழியாக கோடு வரைந்தால் போதும்.



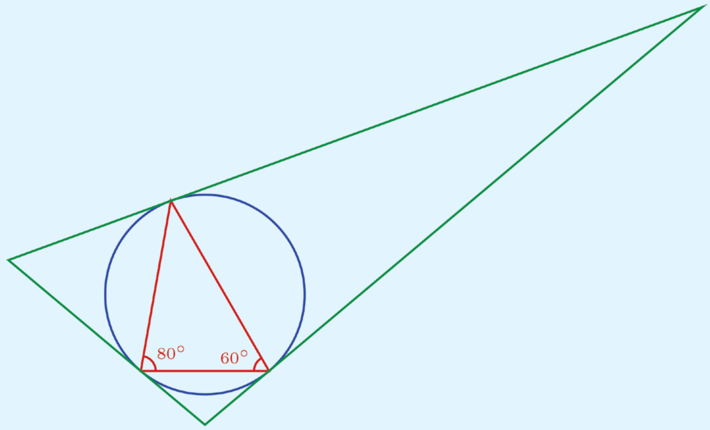
அப்போது ஒரு வட்டத்தில் ஏதேனும் புள்ளி வழியாகத் தொடுகோடு வரைய, முதலில் இந்தப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வில் வரைந்து அது முதல் வட்டத்தை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளை இணைக்கவும்:



இனி தொடுகோடு வரைய வேண்டிய புள்ளி வழியாக, இந்தக் கோட்டிற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்தால் போதும்.

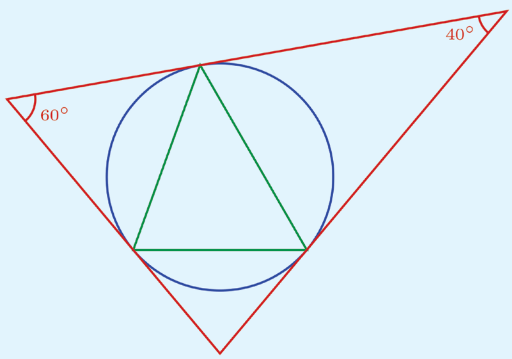


(1) படத்தில் சிறிய முக்கோணத்தின் உச்சிகள் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்கு வரைகின்ற தொடுகோடுகள், பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஆகும்.



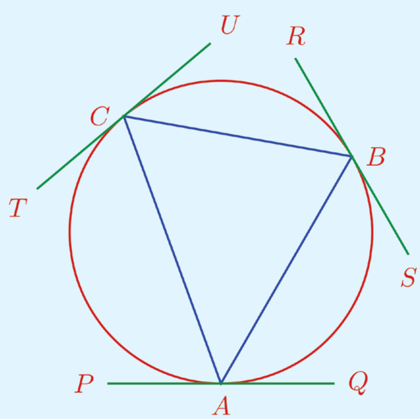
பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

(2) படத்தில் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தின் தொடுகோடுகளாகும். அவை வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளிகளே சிறிய முக்கோணத்தின் உச்சிகள்.



சிறிய முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

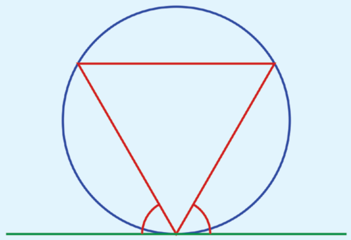
(3) படத்தில், ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகள் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்கு வரைந்த தொடுகோடுகள் PQ, RS, TU என்ற கோடுகளாகும்:

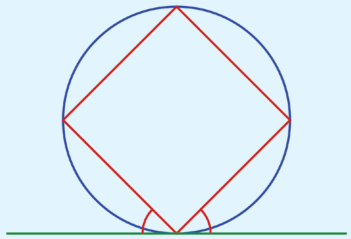


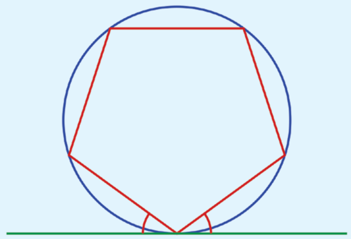
படத்திலுள்ள கோணங்களில் சமமானவற்றை வகைப்படுத்தி எழுதுக.

(4) கீழேயுள்ள படங்களில் சில ஒழுங்கு பல கோணங்களின் ஒரு உச்சியின் வழியாக அதன் சுற்றுவட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு படத்திலும் தொடுகோட்டிற்கும் தொடுகின்ற புள்ளி வழியாக உள்ள பலகோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் இடையேயுள்ள கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

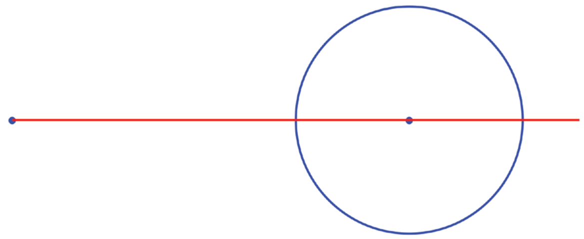






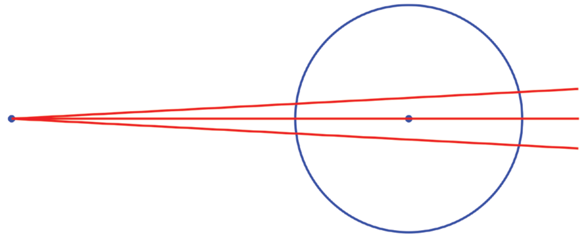
வெளியிலிருந்தும் தொடுகோடு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

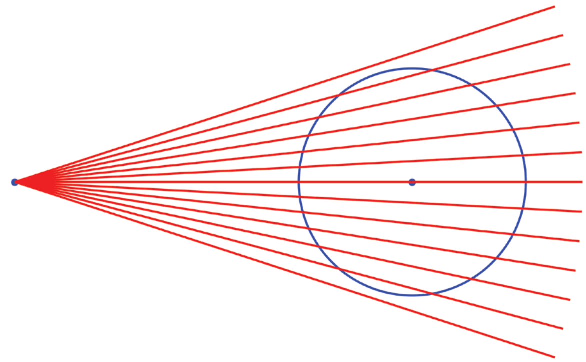


வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைத்து ஒரு கோடு நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது. அது வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்கிறது. இந்தப் புள்ளிகள், ஒரு விட்டத்தின் முனைகளும் ஆகும்.

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள இந்தப் புள்ளியையே, வட்டத்திற்கு உள்ளே சற்று மேலேயோ அல்லது கீழேயோ உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்து வரைந்தால் ?

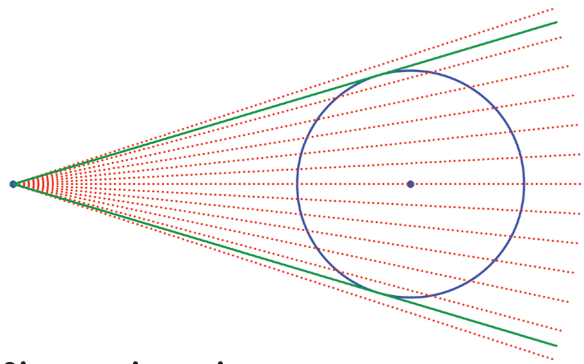


கோடு வட்டத்தை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் சற்று கூட அருகில் ஆனது, இவ்வாறு தொடர்ந்தால் ?



நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற இரண்டு புள்ளிகளில் வட்டத்தை வெட்டிச் செல்லும் கோடுகள் ஒரு நிலைக்குப் பின்பு வட்டத்துடன் எந்தவொரு தொடர்பும் இல்லாமல் ஆகிறது.

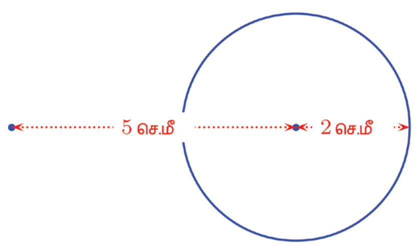
ஆனால் அதற்கிடையில் எங்கோ, மேலேயும், கீழேயுமாக இரண்டு கோடுகள் வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுகிறதல்லவா ?



இதிலிருந்து என்ன புரிந்து கொள்ளலாம் ?

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

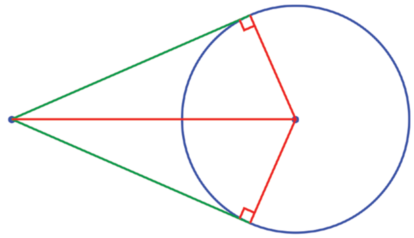
வரையலாம் என கூறியதல்லாமல் இந்தத் தொடுகோடுகளை எவ்வாறு வரையலாம் எனக் கூறவில்லையல்லவவா, கீழேத் தரப்பட்டுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.



ஆரம் 2 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

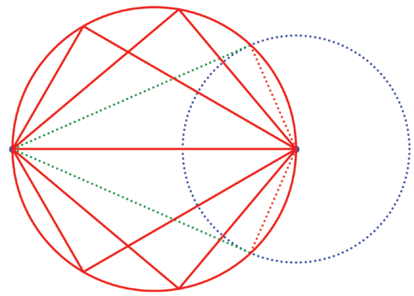
இந்தப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைவது எவ்வாறு ?

வரைந்து முடிந்த பின் எவ்வாறிருக்கும் என சிந்தித்தால், வரைவதற்கான முறை ஒரு வேளை தெளிவாகி வரும். தொடுகோடுகள் தொடுகின்ற புள்ளிகள் வழியாக உள்ள ஆரங்களுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் என்பதை நினைவு கூரவும்:



வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்தும் வட்டமையத்திலிருந்தும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு நேர்கோடுகளே தேவை.

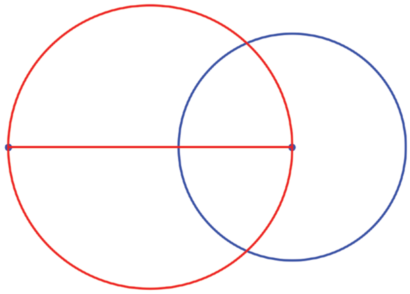
இத்தகைய கோடுகள் வரைய, இந்த இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வரைகின்ற வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால் போதுமல்லவா.



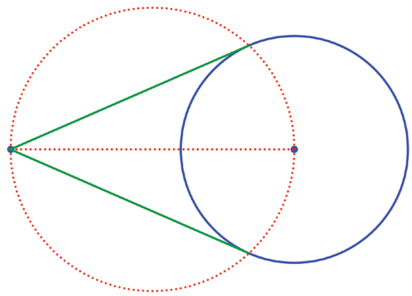
(அரைவட்டத்திலுள்ள கோணங்கள் செங்கோணம் என **வட்டங்களும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் கற்றதை நினைவு கூரவும்).

நமக்குத் தேவையான செங்குத்துக் கோட்டு ஜோடியில், ஒரு கோடு முதல் வட்டத்தின் ஆரம் ஆக வேண்டும், அதாவது கோடுகள் சந்திப்பது முதல் வட்டத்தில் ஆக வேண்டும். அதற்குப் பழைய வட்டமும் புதிய வட்டமும் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் வழியாக வரைந்தால் போதுமல்லவா ?

இனி வரையலாமல்லவா, முதலில், வெளியேயுள்ள புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாக உடைய ஒரு வட்டம் வரையவும்.



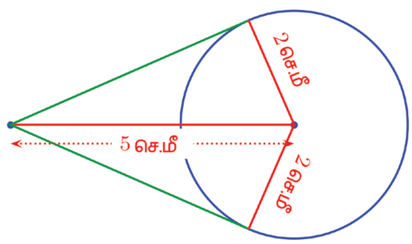
இந்த வட்டமும் முதலாவது வட்டமும் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளை, வெளியேயுள்ள புள்ளியுடன் இணைத்தால் நமக்குத் தேவையான தொடுகள் ஆகும்.



(1) ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டம் வரையவும். வட்டமையத்திலிருந்து 7 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரையவும்.

(2) ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டம் வரையவும். வட்ட மையத்திலிருந்து 7.5 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரையவும்.

முன்பு பார்த்த எடுத்துக்காட்டில், வட்டத்தின் ஆரம் 2 சென்டிமீட்டரும், வெளியேயுள்ள புள்ளி வட்ட மையத்திலிருந்து 5 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுமல்லவா.



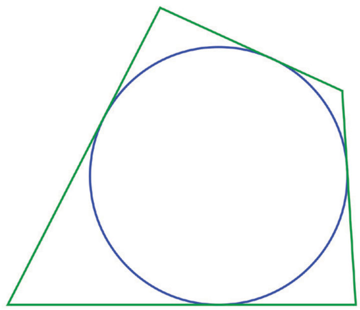
அப்போது பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தித் தொடுகோடுகளின் நீளம் (வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து தொடுகின்ற புள்ளி வரையுள்ள நீளம்) கணக்கிடலாம்:

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ செ.மீ}$$

வட்டத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் வழியாகத் தொடுகோடுகள் வரைந்தால், தொடுகின்ற புள்ளியிலிருந்து இணைகின்ற புள்ளி வரையுள்ள தொடுகோட்டின் நீளம் சமம் என முன்பு கற்றிருக்கிறோம் (**தொடுகோடுகளும் கோணங்களும்** என்ற பாகத்தில் மூன்றாவது வினா) அதைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

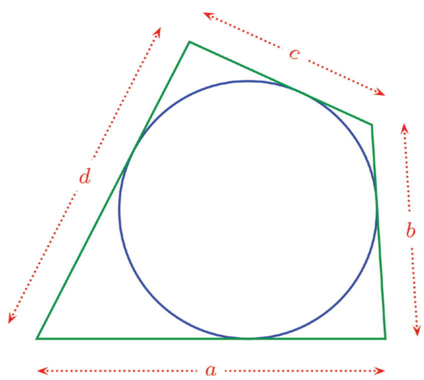
வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள இரண்டு தொடுகோடுகளுக்கும் ஒரே நீளமாகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கைப் பார்க்கலாம். கீழேயுள்ள படத்தில் ஒரு வட்டத்தின் நான்கு புள்ளிகளிலுள்ள தொடுகோடுகளை பக்கங்களாகக் கொண்டு ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.

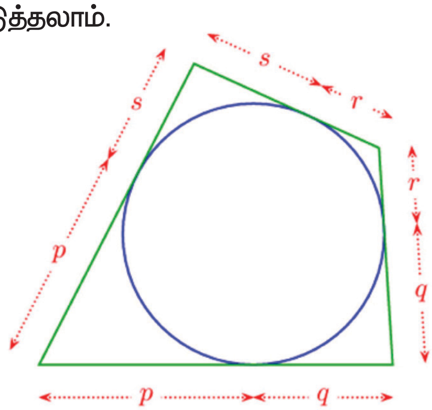


நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை a, b, c, d என எடுக்கலாம்:

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் நான்கு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். இந்த நான்கு புள்ளிகள் வழியாகவும் வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் உச்சிகளாக வருகின்ற நாற்கரம் வரையவும். இனி தொடுகோடுகளை மறைத்து வைக்கலாம். நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை அடையாளப்படுத்தி அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பை உற்றுநோக்கவும். வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளின் இடத்தைப் மாற்றிப் பார்க்கவும்.



ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் உள்ள தொடுகோடுகளின் நீளங்களை, p, q, r, s என எடுத்தால் இந்த நீளங்களை கீழ்வருமாறு அடையாளப்படுத்தலாம்.



இந்தப் படங்களிலிருந்து நாற்கரத்தின் பக்கங்களுடையவும் தொடுகோடுகளுடையவும் நீளங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்:

$$a = p + q$$
$$b = q + r$$
$$c = r + s$$
$$d = s + p$$

இதிலிருந்து a, b, c, d இவற்றிற்கிடையே ஏதேனும் தொடர்பு காணப்படுகிறதா ?

$$a + c = p + q + r + s$$

$$b + d = q + r + s + p$$

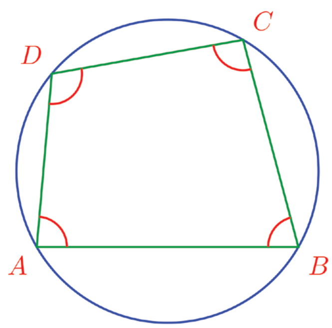
அதாவது,

$$a + c = b + d$$

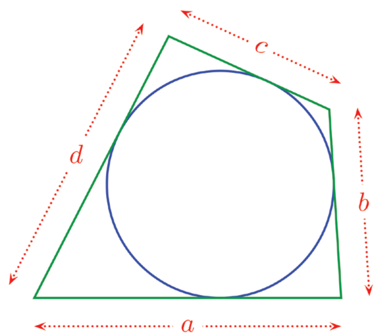
பக்கங்களின் நீளங்களாகக் கூறினால்?

ஒரு வட்டத்திலுள்ள நான்கு புள்ளிகள் வழியாக உள்ள தொடுகோடுகள் சேர்ந்து உருவாகும் நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளங்களின் தொகை சமமாகும்.

வட்டத்திலுள்ள நான்கு புள்ளிகளை இணைத்து வரைகின்ற நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர்கோணங்களுடையவும் தொகை $180°$ என **வட்டங்களும் கோணங்களும்** என்ற பாடப்பகுதியில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. அதாவது, எதிர்கோணங்களின் தொகை சமமாகும்.

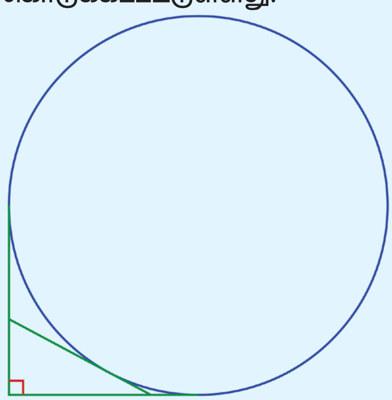


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$



$a + c = b + d$

(1) ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு தொடுகோடுகளும், வேறொரு தொடுகோடும் சேர்ந்து ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கிய படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

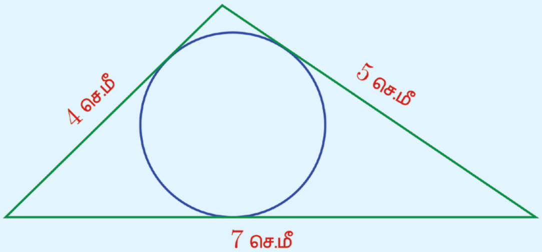


(i) முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான தொடுகோடுகளின் நீளங்களின் தொகை என நிறுவுக.

(ii) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான தொடுகோடுகள் ஒவ்வொன்றினுடையவும் நீளம், வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு சமமென நிறுவுக.

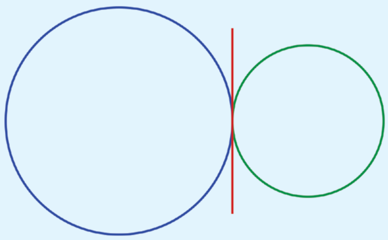
(iii) முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, வட்டத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமென நிறுவுக.

(2) கீழே காண்பது ஒரு வட்டத்திலுள்ள மூன்று தொடுகோடுகள் சேர்ந்த முக்கோணமாகும்.

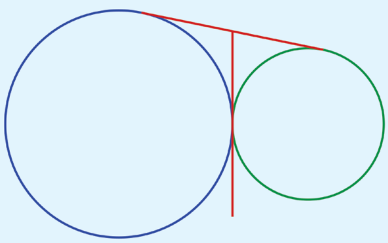


ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் தொடுகின்ற புள்ளிவரையுள்ள தொடுகோடுகளின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

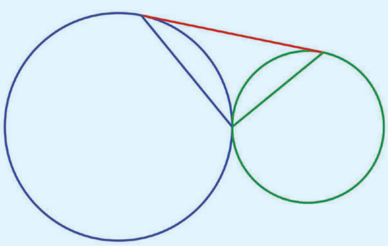
(3) படத்தில் ஒரு புள்ளியில் தொடுகின்ற இரண்டு வட்டங்களுக்கு அந்தப் புள்ளியின் வழியாகப் பொதுவான தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது.



(i) இந்த வட்டங்களுக்குப் பொதுவான வேறொரு தொடுகோட்டை முதல் தொடுகோடு சமபாகம் செய்யுமென நிறுவுக.



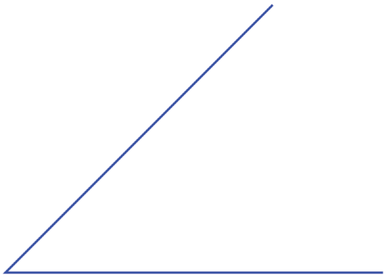
(ii) இந்த இரண்டு தொடுகோடுகளும் வட்டங்களைத் தொடும்புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைப்பது செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.

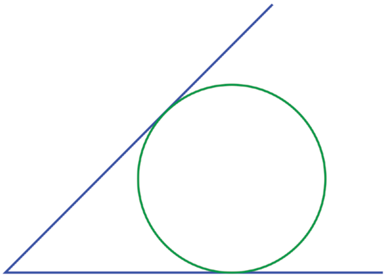


கோட்டைத் தொடுகின்ற வட்டம்

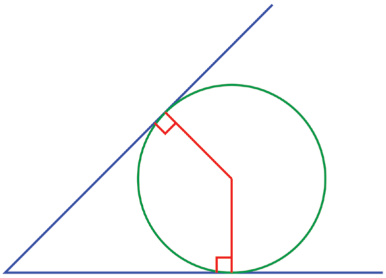
ஒரு வட்டத்தைத் தொடுகின்ற இரண்டு கோடுகள் வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையலாம் என்றும் எவ்வாறு வரைய வேண்டுமென்றும் கற்றோம்.

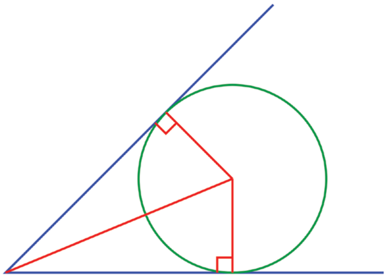
அப்போது மாறாக ஒரு வினா, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்ற இரண்டு கோடுகளைத் தொடுகின்ற வட்டம் வரையலாமா? கீழேயுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்:



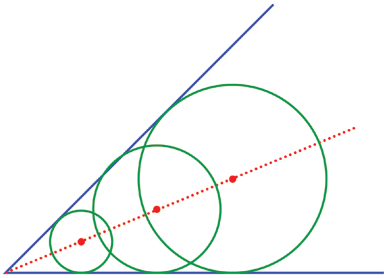


வட்ட மையத்திலிருந்து இந்தக் கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள், வட்டத்தின் ஆரங்களல்லவா, எனவே இந்தச் செங்குத்துக்கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமாகும். திருப்பிக் கூறினால் இந்தக் கோடுகளிலிருந்து வட்ட மையம் ஒரே செங்குத்து தூரத்தில் ஆகும். அப்போது வட்ட மையம், இந்தக் கோடுகள் சேர்ந்து உருவாக்குகின்ற கோணத்தின் இரு சம வெட்டியில் இருக்க வேண்டுமல்லவா (எட்டாம் வகுப்பில் **சமவெட்டிகள்** என்ற பாடத்தில் **கோணத்தின் இருசமவெட்டி** என்ற பாகம்).

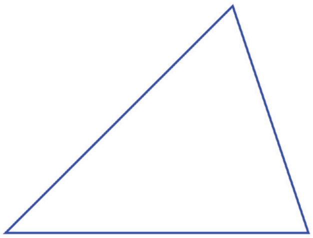


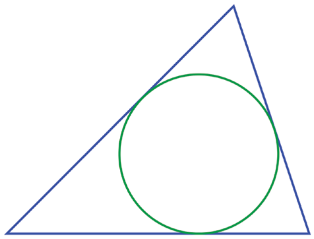


கோணத்தின் இரு சமவெட்டியில் மையத்தை எங்கு எடுத்தாலும், இந்த இரண்டு கோடுகளையும் தொடுகின்ற வட்டம் வரையலாம்.



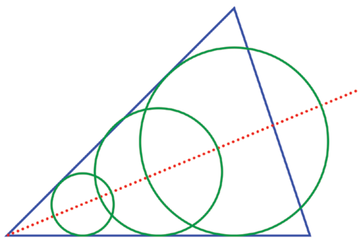
அப்போது ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் தொடுகின்ற வட்டம் வரைய இயலுமா என்பது அடுத்த வினா.



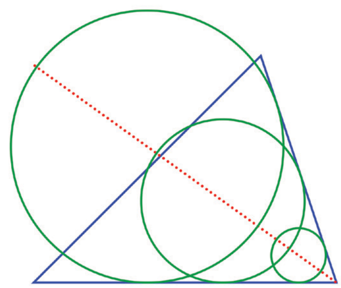


அடிப்பக்கமும், இடது பக்கமும் இணைகின்ற கோணத்தின் இரு சமவெட்டியிலுள்ள எந்தப் புள்ளியை மையமாக எடுத்தாலும், அந்த இரண்டு பக்கங்களைத் தொடுகின்ற வட்டங்கள் வரையலாம்.

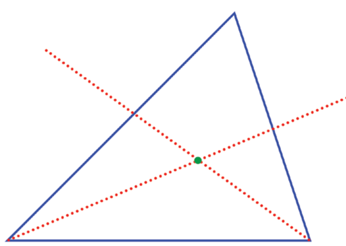
ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு கோணமும் அதன் இருசமவெட்டியும் வரையவும். இரு சமவெட்டியில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி அந்தப் புள்ளியிலிருந்து கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து செங்குத்துக் கோடும் பக்கமும் சந்திக்கும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். இரு சமவெட்டியிலுள்ள புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு பக்கத்திலுள்ள புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையவும் இந்த வட்டம் கோணத்தின் இரண்டாவது பக்கத்தையும் தொடுகிறதல்லவா வட்ட மையத்தை இரு சமவெட்டி வழியாக மாற்றிப் பார்க்கவும்.



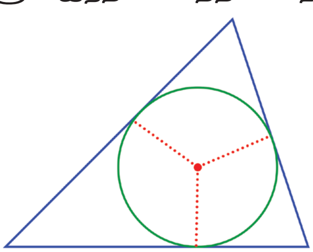
அடிப்பக்கமும் வலது பக்கமும் இணைகின்ற கோணத்தின் இரு சமவெட்டியிலுள்ள புள்ளிகளை எடுத்தால் அந்த இரண்டு பக்கங்களைத் தொடுகின்ற வட்டங்களும் வரையலாம்.

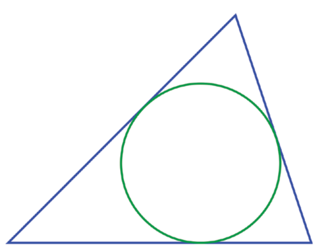


அப்போது இந்த இரண்டு இருசம வெட்டிகளிலுமுள்ள புள்ளியை எடுத்தால்? அதாவது அவை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளி.



இந்தப் புள்ளியிலிருந்து மூன்று பக்கங்களுக்குமுள்ள செங்குத்துக் கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமல்லவா? அப்போது இந்த நீளத்தை ஆரமாகவும், இந்தப் புள்ளியை மையமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைந்தால் மூன்று பக்கங்களும் இந்த வட்டத்தின் தொடுகோடுகளாகும்:





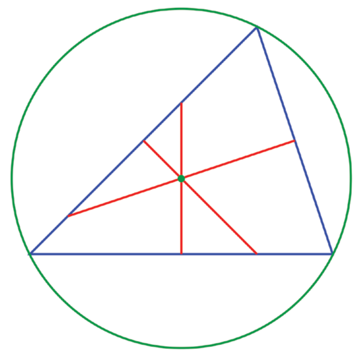
இவ்வாறு ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் தொட்டு அதன் உள்ளே அமையும் வட்டத்திற்கு உள்வட்டம் **(incircle)** என்று பெயர்.

ஜியோஜிப்ராவில் முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரையவும்.

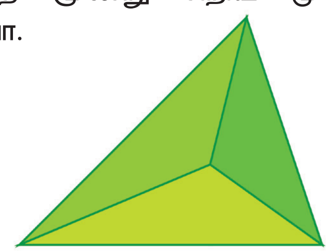
இங்கு வேறொரு கருத்தையும் பார்க்கலாம். உள்வட்டம் முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் தொடுவதால், அதன் மையத்திலிருந்து மூன்று பக்கங்களுக்குமுள்ள செங்குத்துக்கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமாகும். அதாவது வட்டமையம், முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுடையவும் இரு சமவெட்டிகளிலுள்ள புள்ளியாகும். வேறொரு முறையில் கூறினால், முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுடையவும் இரு சமவெட்டிகள் உள்வட்டத்தின் மையம் வழியாகக் கடந்து செல்லும். இந்தப் புள்ளியை உள்வட்ட மையம் (incentre) எனக் கூறலாம்.

எந்த முக்கோணத்திலும், கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் எல்லாம் ஒரே புள்ளி வழியாக வெட்டிச் செல்லும்.

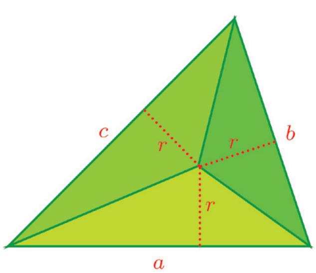
எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்களின் இருசமவெட்டிகள் எல்லாம் ஒரே புள்ளி வழியாக வெட்டிச் செல்கிறது எனவும் இந்தப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையலாமென்று எட்டாம் வகுப்பில் கற்றதை நினைவு கூரலாம். (**வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் சுற்றுவட்டம் என்ற பகுதி)



உள்வட்டத்தின் ஆரத்திற்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்குமிடையே தொடர்பு உள்ளது. முக்கோணத்தின் உச்சிகளை உள்வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைத்தால், முக்கோணத்தை மூன்று சிறிய முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாமல்லவா.



இந்த முக்கோணம் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு பக்கம், முதல் முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமே ஆகும். அதிலிருந்துள்ள உயரம் உள்வட்டத்தின் ஆரமும் ஆகும். அப்போது முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c என்றும் உள்வட்டத்தின் ஆரம் r என்றுமெடுத்தால் இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவு,

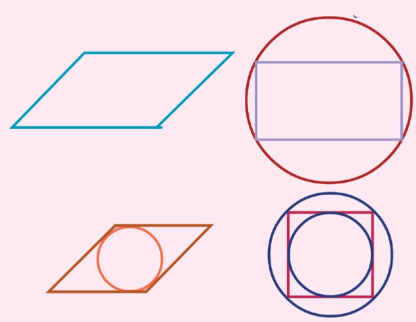


$$\frac{1}{2}ar,\ \frac{1}{2}br,\ \frac{1}{2}cr$$

என்றிவ்வாறு ஆகும்.

சுற்றுவட்டமும் உள்வட்டமும்

எந்த முக்கோணத்திற்கும் சுற்றுவட்டமும் உள்வட்டமும் வரையலாம். ஆனால், நாற்கரங்கள் எடுத்தால் சிலவற்றிற்கு இரண்டும் வரைய இயலாது. சிலவற்றிற்கு ஏதேனும் ஒன்று மட்டும் சிலவற்றிற்கு இரண்டும் வரையலாம்.



இவற்றின் தொகை மொத்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவாகும், இதை A என எடுத்தால்

$$A=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

இதில் $\frac{1}{2}(a+b+c)$ என்பது முக்கோணத்தின் சுற்றளவின் பாதியாகும். இந்த அளவை சாதாரணமாக s என குறிப்பிடப்படுகிறது என ஒன்பதாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா. (**விகிதமுறா எண் பெருக்கல்** என்ற பாடத்தில் **முக்கோணப் பரப்பு** என்ற பகுதி) அப்போது முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் உள்வட்டத்தின் ஆரத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$A=sr$$

இதை இவ்வாறும் எழுதலாம்:

$$r=\frac{A}{s}$$

ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தின் ஆரம் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை சுற்றளவின் பாதியால் வகுத்துக் கிடைப்பதாகும்.

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c என எடுத்தால் பரப்பளவு

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றோமல்லவா. இதைச் சுற்றளவின் பாதியான s ஆல் வகுத்ததே உள்வட்டத்தின் ஆரம் ஆகும்; அதாவது

$$r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$$

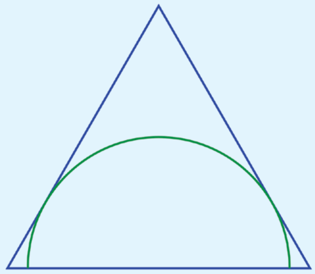
இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

(1) பக்கங்களின் நீளம் 7 செ.மீ, 8 செ.மீ, 9 செ.மீ உள்ள முக்கோணம் வரைந்து, அதன் உள்வட்டம் வரையவும்.

(2) பக்கங்களின் நீளம் 5 செமீட்டரும், ஒரு கோணம் 50° உம் உள்ள சாய்வு சதுரம் வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரையவும்.

(3) ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து, அதன் இரண்டு பக்கங்களைத் தொடுகின்ற ஒரு அரைவட்டம் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல வரையவும்.



(4) பக்கங்களின் நீளம் 12 சென்டிமீட்டர் உள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிடவும்.

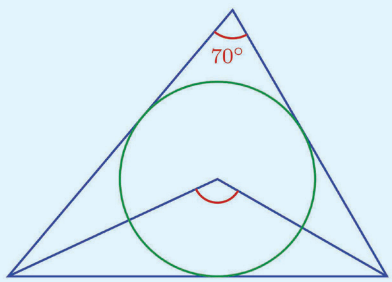
(5) பக்கங்களின் நீளம் 13, 14, 15 சென்டிமீட்டர் உள்ள முக்கோணத்தின் உள்வட்ட ஆரம் கணக்கிடவும்.

(6) எந்தச் சமபக்க முக்கோணத்தினுடையவும் உள்வட்ட ஆரம், அதன் சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தின் பாதி என நிறுவுக.

(7) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் h உம் உள்வட்டத்தின் ஆரம் r உம் எனில், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $r(h+r)$ என நிறுவுக.

(8) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோணப் பக்கங்களின் நீளம் a யும் b யும், கர்ணத்தின் நீளம் c யும் ஆகும். அதன் உள்வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{1}{2}(a+b-c)$ என நிறுவுக.

(9) படத்தில் முக்கோணத்தின் இரண்டு உச்சிகள் உள்வட்டமையத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணம் கணக்கிடுக.

(ii) எந்த முக்கோணத்திலும் ஓர் உச்சியிலுள்ள கோணத்திற்கும் மற்ற உச்சிகளை உள்வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைக்கும் கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன ?

(iii) இந்த இரண்டு கோணங்களில் ஒன்று மற்றொன்றின் பாதி எனில் முக்கோணத்தின் கோணம் எவ்வளவு ?

9 பல்லுறுப்புகளும் சமன்பாடுகளும்

பெருக்கல் செயல்கள்

இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலனைக் கணக்கிடுவதற்குப் பல எளிய வழிமுறைகளைப் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. இந்தப் பெருக்கல் செயலை மனக்கணக்காகச் செய்ய இயலுமா?

$$38 \times 32$$

38 ஐ $30 + 8$ எனவும், 32 ஐ $30 + 2$ எனவும் எழுதினால் ?

இரண்டு தொகைகளின் பெருக்கற்பலனைக் குறித்து ஒன்பதாம் வகுப்பில் உள்ள **பெருக்கல் சமன்பாடுகள்** என்ற பாடத்தில் கற்றது நினைவில் இருக்கிறதா ?

> தொகையைத் தொகையால் பெருக்குவதற்கு, முதல் தொகையில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் இரண்டாவது தொகையில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணாலும் பெருக்கி, பெருக்கற்பலன்களையெல்லாம் கூட்ட வேண்டும்.

இதைச் சுருக்கி இயற்கணித வாக்கியமாகவும் எழுதினீர்கள் அல்லவா ?

x, y, u, v என்ற எந்த நான்கு மிகை எண்களை எடுத்தாலும்

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

இதன்படி,

$$\begin{aligned} 38 \times 32 &= (30 + 8) \times (30 + 2) \\ &= (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2) \end{aligned}$$

இதன் நடுவில் உள்ள $(30 \times 2) + (8 \times 30)$ என்பதனை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம் அல்லவா.

$$\begin{aligned} (30 \times 2) + (8 \times 30) &= (30 \times 2) + (30 \times 8) \\ &= 30 \times (2 + 8) \\ &= 30 \times 10 \\ &= 300 \end{aligned}$$

அப்போது

$$38 \times 32 = (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2)$$
$$= 900 + 300 + 16$$
$$= 1216$$

இதைப் போன்று 48×42 ஐ செய்யலாமா ?

$$48 \times 42 = 40^2 + (40 \times (8 + 2)) + (8 \times 2)$$
$$= 1600 + 400 + 16$$
$$= 2016$$

78×72 ஆனால் ?

$$78 \times 72 = 4900 + 700 + 16 = 5616$$

இந்த மூன்று கணக்குகளிலும் செய்த செயல்களை ஒரு பொதுக் கருத்தாக எழுதலாம் அல்லவா:

x எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும்

$$(x + 2)(x + 8) = x^2 + (8 + 2)x + 16$$
$$= x^2 + 10x + 16$$

இதில் 2 க்கும் 8 க்கும் பதிலாக, வேறு ஏதாவது எண்களை எடுத்தால் ?

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு குழுவிலும் உள்ள பெருக்கல்களை மனக்கணக்காகச் செய்யவும். ஒவ்வொரு குழுவில் இருந்தும் கிடைக்கும் பொதுக்கருத்தை இயற்கணித சமன்பாடாக எழுதவும்.

(1) (i) 43×47 (ii) 63×67 (iii) 103×107

(2) (i) 51×52 (ii) 81×82 (iii) 301×302

பல்லுறுப்புப் பெருக்கல்

முன்பு செய்த இரண்டாவது குழுவிலுள்ள பெருக்கற்பலன்களில் இருந்து கிடைக்கும் பொதுக் கருத்து என்ன ?

x எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும்

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

தொகைகளின் பெருக்கலைக் குறித்து ஆரம்பத்தில் கூறியதற்கு ஏற்ப, x ஆக எண்ணல் எண்ணிற்குப் பதிலாக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் இது சரியாகும் அல்லவா, அதாவது

x எந்த எண் ஆனாலும் $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

இதில் x ஆக பல எண்களை எடுக்கும் போது $x + 1$, $x + 2$, $x^2 + 3x + 2$ ஆகவும் பல எண்கள் கிடைக்கின்றன. அவற்றிற்கு இடையில் உள்ள தொடர்பே இந்தச் சமன்பாடு.

இந்த இயற்கணித வாக்கியங்களை எல்லாம் பல்லுறுப்புகளாகக் காணலாம் அல்லவா. அப்போது மேற்கூறிய சமன்பாட்டை இவ்வாறு பார்க்கலாம்.

$x + 1$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடையவும் $x + 2$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடையவும் பெருக்கற்பலன் $x^2 + 3x + 2$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்பாகும்.

இதைப் போல முதல் இரண்டு பெருக்கற் பலன்களில் இருந்து கிடைத்த இயற்கணித சமன்பாட்டைப் பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாகக் கூறலாமா ?

இங்கு செய்த கணக்குகளில் இருந்து கிடைத்த இயற்கணித சமன்பாடுகளை எல்லாம் பார்க்கலாம்:

- $(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16$
- $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 10x + 21$
- $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

இவற்றில் எல்லாம் பெருக்கிக் கிடைத்த இருபடி பல்லுறுப்புகளில் உள்ள எண்களுக்கு, பெருக்கிய ஒருபடி பல்லுறுப்புகளில் உள்ள எண்களுடன் இருக்கும் தொடர்பு என்ன ?

அப்போது இவ்வாறான பெருக்கல்களை எல்லாம் உட்படுத்தும் விரிவான ஒரு பொதுக் கருத்தை இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதலாமா ?

x, a, b எந்த எண்களானாலும்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

பல்லுறுப்புகளைப் பயன்படுத்திக் கூறினால் ?

$x + a$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடையவும் $x + b$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடையவும் பெருக்கற்பலன் $x^2 + (a + b)x + ab$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்பாகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி, $(x + 5)(x + 3)$ ஐ எவ்வாறு எழுதலாம்?

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

தொகைகளுக்கு இடையே உள்ள பெருக்கற்பலன் மட்டுமல்ல, தொகைக்கும் வித்தியாசத்திற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கற்பலனினுடையவும் பொதுவடிவங்களை ஒன்பதாம் வகுப்பில் உள்ள **பெருக்கல் சமன்பாடுகள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்தோம் அல்லவா:

- $(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$
- $(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி, வேறு சில ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்களை எழுதலாம்:

- $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

எடுத்துக்காட்டாக

$$(x+4)(x-1) = x^2+3x-4$$

இதை வேறொரு முறையிலும் காணலாம்.

$$x-1 = x+(-1)$$

என எழுதலாம் அல்லவா. அப்போது

$$(x+4)(x-1) = (x+4)(x+(-1))$$

இனி தொகைகளின் பெருக்கற்பலனின் சமன்பாடாகிய

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

என்ற சமன்பாட்டில் a ஆக 4 ஐயும் b ஆக -1 ஐயும் எடுத்தால் ?

$$(x+4)(x+(-1)) = x^2+(4+(-1))x+(4\times(-1))$$

$$= x^2+3x-4$$

அதாவது, முன்பு பார்த்ததைப் போல்

$$(x+4)(x-1) = x^2+3x-4$$

என்றுதான் கிடைக்கும்.

இதைப் போன்று $(x-4)(x-1)$ என்ற பெருக்கற்பலனை இரண்டு முறைகளில் கணக்கிடலாம்.

வித்தியாசங்களின் பெருக்கற்பலனின் சமன்பாடாகிய

$$(x-a)\,(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$$

என்ற சமன்பாட்டில் a ஆக 4 ஐயும் b ஆக 1 ஐயும் எடுத்து

$$(x-4)(x-1) = x^2-5x+4$$

என எழுதலாம் ; $x-4$ என்ற வித்தியாசத்தை $x+(-4)$ என்ற தொகையாகவும் $x-1$ என்ற வித்தியாசத்தை $x+(-1)$ என்ற தொகையாகவும் மாற்றி எழுதினால் ?

$$(x-4)(x-1) = (x+(-4))(x+(-1))$$

இனி இதனைக் கணக்கிட தொகையின் பெருக்கற் பலனாகிய

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

என்பதில் $a=-4$ எனவும் $b=-1$ எனவும் எடுத்தால் போதுமல்லவா.

$$(x-4)(x-1) = (x+(-4))(x+(-1))$$

$$= x^2+((-4)+(-1))x+((-4)\times(-1))$$

$$= x^2-5x+4$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள பெருக்கற்பலன்களைக் கணக்கிடுக.

(i) $(x+2)(x+5)$ (ii) $(x+2)(x-5)$ (iii) $(x-2)(x+5)$ (iv) $(x-2)(x-5)$

பல்லுறுப்புக் காரணிகள்

இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளைப் பெருக்கி இருபடி பல்லுறுப்பாக மாற்றும் சில கணக்குகளைச் செய்தோம் அல்லவா. அப்போது மாறாக ஒரு வினா:

$x^2 + 5x + 6$ ஐ இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலுமா ?

இங்கு பெருக்கற்பலன் தரப்பட்டுள்ளது. பெருக்கும் பல்லுறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அதாவது, வினா இவ்வாறாகலாம்:

$(x+a)(x+b) = x^2 + 5x + 6$ ஆவதற்கு, a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

$(x+a)(x+b)$ என்ற பெருக்கற்பலனை இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

அப்போது வினா இவ்வாறாகலாம்:

$x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + 5x + 6$ ஆவதற்கு, a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும்?

இதில் சமன்பாடு சரியாவதற்கு $a+b=5$ எனவும் $ab=6$ எனவும் ஆனால் போதுமல்லவா. அப்போது வினா இவ்வாறாகும்:

$a+b=5$ உம் $ab=6$ உம் ஆவதற்கு a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

சாதராண மொழியிலாக்கினால், வினா இதுவாகும்:

தொகை 5 உம் பெருக்கல் பலன் 6 உம் ஆன இரண்டு எண்கள் எவை ?

சற்று சிந்தித்தால், எண்கள் 2 உம் 3 உம் எனக் கிடைக்கும் அல்லவா. அப்போது முதல் வினாவின் விடையை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

வினாவைச் சற்று மாற்றி இவ்வாறாக்கினால் ?

$x^2 - 5x + 6$ ஐ இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

முதல் கணக்கைப் போல் வினாவைப் பல நிலைகளில் மாற்றி எழுதலாம்:

(i) $(x+a)(x+b) = x^2 - 5x + 6$ ஆவதற்கு, a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

(ii) $x^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 5x + 6$ ஆவதற்கு a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

இதிலிருந்து $a + b$, ab இவற்றைக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

அப்போது சிந்தனையை இவ்வாறு தொடரலாம்:

(iii) $a + b = -5$ உம் $ab = 6$ உம் ஆவதற்கு a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

(iv) தொகை -5 உம் பெருக்கற்பலன் 6 உம் ஆன இரண்டு எண்கள் எவை ?

முன்பு செய்ததைப் போன்று பெருக்கற்பலன் 6 ஆன இரண்டு எண்கள் 2 உம், 3 உம் எடுத்தால், தொகை -5 ஆகாது அல்லவா.

6 ஐ குறை எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவது எவ்வாறு ?

$$6 = (-2) \times (-3)$$

(ஒன்பதாம் வகுப்பில் **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **நேரமும் வேகமும்** என்ற பகுதி)

மட்டுமல்ல,

$$(-2) + (-3) = -2 - 3 = -5$$

(ஒன்பதாம் வகுப்பில் **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **இடமும் எண்ணும்** என்ற பகுதி)

அப்போது நமது இறுதி வினாவின் எண்கள், -2 உம் -3 உம்.

தொடங்கிய வினாவின் விடை

$$x^2 - 5x + 6 = (x + (-2))(x + (-3))$$
$$= (x - 2)(x - 3)$$

இனி வினாவிலுள்ள பல்லுறுப்பை இவ்வாறு மாற்றினால் ?

$x^2 + 5x - 6$ ஐ இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

வினா படிப்படியாக எவ்வாறு மாறுகிறது ?

(i) $(x + a)(x + b) = x^2 + 5x - 6$ ஆனால் a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

(ii) $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 5x - 6$ ஆவதற்கு a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

(iii) $a + b = 5$ உம் $ab = -6$ உம் ஆவதற்கு a, b எந்த எண்கள் ஆக வேண்டும் ?

(iv) தொகை 5 உம், பெருக்கற்பலன் -6 உம் ஆன இரண்டு எண்கள் எவை ?

இனி $-6 = (-2) \times 3$ என்றோ $-6 = 2 \times (-3)$ என்றோ எழுதினால் பெருக்கிய எண்களின் தொகை 5 ஆகாது அல்லவா.

அப்போது 6 ஐ வேறு இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுத வேண்டும்.

$6 = 1 \times 6$ என்பதில் இருந்து

$$-6 = (-1) \times 6$$
$$-6 = 1 \times (-6)$$

என்றெல்லாம் எழுதலாம் அல்லவா. இவற்றில் முதலில் உள்ளதை எடுத்தால், பெருக்கிய எண்களின் தொகை 5 உம் ஆகும். அதாவது, மேலே உள்ள நான்காவது வினாவிற்கான விடை 6 உம் -1 உம் ஆகும்; பல்லுறுப்புகளைக் குறித்துள்ள பிரச்சினைகளுக்கான தீர்வு.

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

இனி அதிகம் சிந்திக்காமல் இந்த வினாவிற்கான விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா.

$x^2 - 5x - 6$ ஐ இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

ஒருங்கிணைத்தல்

$x^2 + 5x + 6$ என்ற பல்லுறுப்பானாலும் $x^2 - 5x + 6$ என்ற பல்லுறுப்பானாலும் ஒருபடி காரணிகளைக் கணக்கிடுவதற்குப் பல்லுறுப்பை

$$(x + a)\,(x + b)$$

என்ற ஒரே வடிவத்தில் எழுதி, a யையும் b யையும் கணக்கிட்டோம் அல்லவா.

முதல் கணக்கில், $a = 2, b = 3$ என இரண்டும் மிகை எண்களாகக் கிடைத்தது.

இரண்டாவது கணக்கில் $a = -2,\ b = -3$ என இரண்டு குறை எண்களாக் கிடைத்தது.

மூன்றாவது கணக்கில், $a = 6$ என்ற மிகை எண்ணும், $b = -1$ குறை எண்ணும் கிடைத்தது. நான்காவது கணக்கில் $a = -6$ குறை எண்ணும் கிடைத்தது. நான்காவது கணக்கில்; $b = 1$ என்ற மிகை என்னும் கிடைத்தது. சுருக்கிக் கூறினால், ஒரே ஓர் இருபடி சமன்பாட்டின் ஒருபடி காரணிகளைக் கணக்கிடுவதற்கு,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

என்ற ஒரேயொரு சமன்பாட்டை மட்டும் பயன்படுத்தினால் போதுமானது இவ்வாறு கிடைப்பது குறை எண்களையும் பயன்படுத்துவதினால் அல்லவா.

கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடி பல்லுறுப்புகளை இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதிப் பார்க்கவும்:

(i) $x^2 + x - 6$ (ii) $x^2 - x - 6$ (iii) $x^2 + 7x + 6$ (iv) $x^2 - 7x + 6$

இந்தக் கணக்குகளில் எல்லாம் ஒருபடி பல்லுறுப்புகளிலுள்ள எண்களை மனக்கணக்காகவே கண்டுபிடித்தோம். எல்லா கணக்குகளிலும் இது சாத்தியமாக வேண்டுமென்றில்லை. எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

$x^2 + 27x + 180$ ஐ இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

இதைச் செய்வதற்கு முதலில்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 27x + 180$$

என எழுதலாம், அதாவது,

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 27x + 180$$

இதிலிருந்து

$$a + b = 27$$
$$ab = 180$$

எனவும் கிடைக்கும்.

இதுவரை செய்த கணக்குகளைப் போன்று 180 ஐ இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலனாகப் பல முறைகளில் எழுதி, அவற்றில் எந்த ஜோடியின் தொகை 27 ஆகும் எனக் கணக்கிடுவது அவ்வளவு எளிதல்ல அல்லவா. வேறொரு வழிமுறையைப் பார்ப்போம்.

இரண்டு எண்களின் தொகையும் பெருக்கற்பலனும் தெரியும். தொகையும் வித்தியாசமும் தெரியும் எனில் எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **சமன்பாட்டு ஜோடிகள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு சமன்பாடுகள்** என்ற பகுதியின் இறுதியில்).

இதை எவ்வாறு செய்தோம் ?

தொகையின் வர்க்கத்தையும், பெருக்கற்பலனையும் பயன்படுத்தி வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா (**வர்க்க சமன்பாடுகள்** என்ற பாடத்தில் வித்தியாச **வர்க்கம்** என்ற பகுதி).

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

இதை இங்கு பயன்படுத்தினால்

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= 27^2 - (4 \times 180)\\ &= (400+280+49) - (72 \times 10)\\ &= 729 - 720\\ &= 9\end{aligned}$$

அப்போது $a - b$ எந்த எண்களாகும் ?

$$a - b = 3 \text{ அல்லது } a - b = -3$$

இதில் $a - b = 3$ என எடுத்தால்

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= 3\end{aligned}$$

எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\\ b &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\end{aligned}$$

எனவும் கிடைக்கும்.

$a - b = -3$ என எடுத்தால்

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= -3\end{aligned}$$

என்றாகும். இதிலிருந்து

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\\ b &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\end{aligned}$$

என்றும் கிடைக்கும்.

எவ்வாறாயினும் இவற்றைப் பயன்படுத்தி

$$x^2 + 27x + 180 = (x + 12)(x + 15)$$

என எழுதலாம்.

பொதுவாக $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை $q(x)$, $r(x)$ என்ற பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக $p(x) = q(x)r(x)$ என எழுத இயலும் எனில் $q(x), r(x)$ என்ற பல்லுறுப்புகளை $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணிகள் எனக் கூறுகிறோம். (எண்ணல் எண்களிலும் காரணிகள் என்பதன் பொருள், இதைப் போன்று அல்லவா; எடுத்துக்காட்டாக $10 = 2 \times 5$ ஆனதால் 2 உம் 5 உம் 10 இன் காரணிகள் எனக் கூறுகிறோம்).

அப்போது இங்கு செய்த கணக்குகளில் எல்லாம் சில இருபடி பல்லுறுப்புகளை ஒருபடி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதினோம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளை இரண்டு ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

(i) $x^2 + 30x + 221$ (ii) $x^2 + 4x - 221$ (iii) $x^2 + x - 156$

காரணிகளும் தீர்வுகளும்

இருபடிச் சமன்பாடுகள் என்ற பாடத்தில் **இரண்டு விடைகள்** என்ற பகுதியில் செய்த ஒரு கணக்கை மீண்டும் பார்க்கலாம்:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்னவாக வேண்டும் ?

இதை எவ்வாறு செய்தோம் ?

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 4 = 1$

(iii) $(x - 2)^2 = 1$

(iv) $x - 2 = 1$ அல்லது $x - 2 = -1$

(v) $x = 3$ அல்லது $x = 1$

இதை வேறொரு முறையிலும் செய்யலாம். அதற்கு, முதலில் வினாவிலுள்ள $x^2 - 4x + 3$ என்ற பல்லுறுப்பை ஒருபடி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவேண்டும்.

மனக்கணக்காகச் செய்யலாம் அல்லவா:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

அப்போது முதல் வினாவை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$(x-1)(x-3)=0$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்னவாக வேண்டும் ?

இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலன் பூஜ்ஜியம் ஆக வேண்டும் எனில், அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜியம் ஆக வேண்டும் அல்லவா. அப்போது $(x-1)(x-3)=0$ ஆக வேண்டும் எனில் $x-1=0$ அல்லது $x-3=0$ ஆக வேண்டும்.

அதாவது $x=1$ ஆகவேண்டும், அல்லது $x=3$ ஆக வேண்டும்.

இந்த முறையை இவ்வாறு சுருக்கி எழுதலாம்.

(i) $x^2-4x+3=0$

(ii) $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

(iii) $(x-1)(x-3)=0$

(iv) $x-1=0$ அல்லது $x-3=0$

(v) $x=1$ அல்லது $x=3$

கணக்கைச் சற்று மாற்றி இவ்வாறு எழுதினால் ?

$x^2-5x+6=0$ ஆகவேண்டுமெனில் x என்னவாக வேண்டும் ?

முன்பு செய்த கணக்கைப் போன்று இதைக் கண்டுபிடிக்க முதலில் என்ன செய்ய வேண்டும் ?

x^2-5x+6 ஐ ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவது எவ்வாறு ?

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

இனி விடையைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையை எவ்வாறு எழுதலாம் ?

(i) $x^2-5x+6=0$

(ii) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(iii) $(x-2)(x-3)=0$

(iv) $x-2=0$ அல்லது $x-3=0$

(v) $x=2$ அல்லது $x=3$

முதல் கணக்கில், $x^2-4x+3=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை, 1, 3 எனக் கணக்கிட்டோம் அல்லவா; இரண்டாவது கணக்கில், $x^2-5x+6=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், 2, 3 எனவும் ஆகும்.

அப்போது எந்த இருபடிச் சமன்பாட்டையும் முன்பு வர்க்கத்தை முழுமையாக்கித் தீர்வு கணக்கிட்டதற்குப் பதிலாக, இப்போது செய்ததைப் போன்று, பல்லுறுப்பைக் காரணிப்படுத்தியும் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கம் மற்ற பக்கத்தைவிட 3 மீட்டர் அதிகமாகும். அதன் பரப்பளவு, 270 சதுரமீட்டரும் ஆகும். இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவை?

செவ்வகத்தின் சிறிய பக்கத்தின் நீளம் x மீட்டர் என எடுத்தால், பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $x + 3$ மீட்டர்; பரப்பளவு

$$x(x + 3) = x^2 + 3x \text{ சதுர மீட்டர்}$$

அப்போது வினாவை இவ்வாறு இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதலாம்:

$x^2 + 3x = 270$ ஆக வேண்டும் எனில் x என்னவாக இருக்க வேண்டும் ?

இதை முன்பு செய்ததைப் போல் வர்க்கத்தை முழுமையாக்கிச் செய்ய வேண்டும் எனில், சமன்பாட்டின் இருபுறமும் $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

பதிலாகக் காரணிப்படுத்தல் முறையில் முயற்சி செய்து பார்ப்போம். இதற்கு வினாவைச் சற்று மாற்றி எழுதலாம்:

$x^2 + 3x - 270 = 0$ ஆகவேண்டுமெனில் x என்னவாக இருக்க வேண்டும் ?

இனி $x^2 + 3x - 270$ ஐ காரணிகளாக்க வேண்டும்

$$x^2 + 3x - 270 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

என எழுதினால், இதில் இருந்து $a + b$ உம் ab உம் கிடைக்கும்.

$$a + b = 3$$

$$ab = -270$$

இதிலிருந்து $a - b$ ஐக் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 9 - (4 \times (-270)) = 9 - (-1080) = 9 + 1080 = 1089$$

இனி $a - b$ கண்டுபிடிப்பதற்கு 1089 இன் வர்க்க மூலம் கணக்கிட வேண்டும். காரணிப்படுத்தி வர்க்க மூலம் கணக்கிடும் முறையை ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா. (**சதுரங்களும் செங்கோண முக்கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **சதுரப் பரப்பளவு** என்ற பகுதி).

1089 இன் இலக்கங்களின் தொகை 18 ஆனால், 1089 என்ற எண் 9 இன் மடங்காகும் (ஆறாம் வகுப்பில் உள்ள **எண் தொடர்கள்** என்ற பாடத்தில் **இலக்கங்களின் தொகை** என்ற பகுதி).

$1089 \div 9$ எவ்வாறு கணக்கிடலாம் என ஐந்தாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா ?

	9	
	1089−	
100	900	$9 \times 100 = 900$
	189−	
20	180	$9 \times 20 = 180$
	9−	
1	9	$9 \times 1 = 9$
$1089 \div 9 = 121$	0	$9 \times 121 = 1089$

அப்போது

$$1089 = 9 \times 121$$

இதை இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா.

$$1089 = 3^2 \times 11^2 = (3 \times 11)^2 = 33^2$$

(ஏழாம் வகுப்பில் உள்ள **மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கல்** என்ற பாடத்தில் மடங்கும் அடுக்கும் என்ற பகுதி).

$(a - b)^2 = 33^2$ என்பதிலிருந்து $a - b$ ஐக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

$$a - b = 33 \text{ அல்லது } a - b = -33$$

$a - b = 33$ என எடுத்தால்,

$$a + b = 3$$
$$a - b = 33$$

என்று காணலாம். இதிலிருந்து

$$a = \frac{1}{2}(3 + 33) = \frac{1}{2} \times 36 = 18$$
$$b = \frac{1}{2}(3 - 33) = \frac{1}{2} \times (-30) = -15$$

எனவும் கணக்கிடலாம்

அதாவது

$$x^2 + 3x - 270 = (x - 15)(x + 18)$$

அப்போது நமது வினா இவ்வாறானது.

$(x - 15)(x + 18) = 0$ ஆகவேண்டுமெனில் x என்னவாக இருக்க வேண்டும் ?

முன்பு பல கணக்குகளில் பார்த்தது போல, இதன் விடை $x = 15$ அல்லது $x = -18$ என அல்லவா. நமது கணக்கில் x என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கத்தின் நீளமானதால் குறை எண் அல்ல. அப்போது இந்தக் கணக்கில் செவ்வகத்தின் சிறிய பக்கத்தின் நீளம் 15 மீட்டர்.

பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $15 + 3 = 18$ மீட்டர்.

இந்தக் கணக்கில், $a - b = 33$ என்பதற்குப் பதிலாக $a - b = -33$ என எடுத்தால் என்ன கிடைக்கும் எனச் செய்து பார்க்கவும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஓர் எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டியபோது அந்த எண்ணின் வர்க்கம் கிடைத்தது. எண் எது ?

எண்ணை x என எடுத்தால், வினாவின் இயற்கணித வடிவத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$x + 1 = x^2$ ஆக வேண்டுமெனில், x எந்த எண் ஆக வேண்டும் ?

$x + 1 = x^2$ ஆக வேண்டுமெனில், $x^2 - (x + 1) = 0$ ஆக வேண்டும் அல்லவா. இதில்

$$x^2 - (x + 1) = x^2 - x - 1$$

(தொகையைக் கழிப்பதற்குப் பதிலாக ஒவ்வொன்றாகக் கழிக்கலாம் என ஏழாம் வகுப்பிலுள்ள **கணக்கில் சுருக்கெழுத்து** என்ற பாடத்தில் **ஒவ்வொன்றாகவும் மொத்தமாகவும்** என்ற பகுதியில் பார்த்தோம்). அப்போது வினாவை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$x^2 - x - 1 = 0$ ஆக வேண்டுமெனில், x எந்த எண் ஆக வேண்டும் ?

இனி $x^2 - x - 1$ என்ற பல்லுறுப்பைக் காரணிகளாக்கலாம்:

$$x^2 - x - 1 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

என எழுதினால்,

$$a + b = -1$$
$$ab = -1$$

எனக் காணலாம். இதிலிருந்து

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (-1)^2 - (4 \times (-1))$$
$$= 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

எனவும் கிடைக்கும். அப்போது

$a - b = \sqrt{5}$ அல்லது $a - b = -\sqrt{5}$

$a - b = \sqrt{5}$ என எடுத்தால்

$$a + b = -1$$
$$a - b = \sqrt{5}$$

எனக் கிடைக்கும். இனி a யையும் b யையும் கணக்கிடலாம்:

$$a = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$b = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right) = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

அதாவது

$$x^2 - x - 1 = \left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

அப்போது வினாவை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$\left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) = 0$ ஆக வேண்டுமெனில், x எந்த எண் ஆக வேண்டும் ?

நேராகவும் மாறாகவும்

$p(x)$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்பை இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற் பலனாக

$$p(x) = (x + a)(x + b)$$

என்றெழுதி a யையும் b யையும் கணக்கிட்டோம் அல்லவா.

இதைப் போன்ற கணக்குகளில் முதலில் கிடைப்பது $a + b$ உம் தொடர்ந்து $(a - b)^2$ உம் ஆகும், அவை

$$a + b = h$$
$$(a - b)^2 = k^2$$

என்று எனில், $a - b$ ஆக k அல்லது $-k$ என எடுக்கலாம்.

$a - b = k$ என எடுத்தால் a, b இவ்வாறு கிடைக்கும்:

$$a = \frac{1}{2}(h + k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h - k)$$

$a - b = -k$ என எடுத்தால் ?

$$a = \frac{1}{2}(h - k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h + k)$$

அதாவது, a, b என்ற எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று மாறும் எவ்வாறானாலும் காரணிகள் மாறுவதில்லை.

இதன் தீர்வு

$$x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ அல்லது } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

அதாவது, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ என்ற மிகை எண்ணினுடையவும் $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ என்ற குறை எண்ணினுடையவும் சிறப்பியல்புகள் என்னவென்றால், இந்த இரண்டு எண்களில் ஏதேனும் ஒன்றுடன் 1 ஐக் கூட்டினாலும், அந்த எண்ணின் வர்க்கம் கிடைக்கும் என்பதாகும்.

(1) ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கம் மற்ற பக்கத்தைவிட 2 மீட்டர் அதிகமாகும். அதன் பரப்பளவு 48 சதுரமீட்டரும் ஆகும். இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.

(2) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கிலிருந்து ஒரு சென்டிமீட்டர் கழித்ததே அதன் செங்குத்துப் பக்கம்; இரண்டு மடங்குடன் ஒரு சென்டிமீட்டர் கூட்டியதே அதன் கர்ணம். பக்கங்களின் நீளம் எவை ?

(3) 1 முதலுள்ள தொடர்ச்சியான எண்ணல் எண்களை எது வரைக்கூட்டினால் 300 கிடைக்கும்?

(4) $x^2 - 2x - 1$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம், x அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் எவை ?

பொது தீர்வு

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

$2x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம், x அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் எவை ?

வினாவை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ ஆக வேண்டுமெனில் } x \text{ என்னவாக வேண்டும் ?}$$

இதுவரை செய்த இதைப் போன்ற கணக்குகளிலிருந்து இதற்கு ஒரு வேறுபாடு உள்ளது. முன்பு செய்த கணக்குகளில் எல்லாம் x^2 மட்டும் இருந்தது; இதில் $2x^2$ ஆகும்.

அப்போது முதலில் $2x^2 + 3x - 2$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$$

இதிலிருந்து $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ பூஜ்ஜியமாகும் எந்த x ஐ எடுத்தாலும், இந்தப் பல்லுறுப்பின் இரண்டு மடங்கான $2x^2 + 3x - 2$ உம் பூஜ்ஜியமாகவே இருக்கும் எனக் காணலாம் அல்லவா; மாறாக $2x^2 + 3x - 2$ பூஜ்ஜியமாகும் எந்த x ஐ எடுத்தாலும், இந்தப் பல்லுறுப்பின் பாதியான $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ உம் பூஜ்ஜியமாகவே இருக்கும் எனக் காணலாம்.

அப்போது வினாவை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ ஆக வேண்டுமெனில் x எந்த எண் ஆக வேண்டும் ?

இனி முன்பு செய்ததைப் போன்று காரணிப்படுத்துதல் முறையில் x ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

என எழுதினால்

$$a + b = \frac{3}{2}$$

$$ab = -1$$

இதில் இருந்து

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = \frac{9}{4} - (4 \times (-1)) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

எனக் கிடைக்கும். அப்போது

$a - b = \frac{5}{2}$ அல்லது $a - b = -\frac{5}{2}$

$a - b = \frac{5}{2}$ என எடுத்தால்

$$a + b = \frac{3}{2}$$

$$a - b = \frac{5}{2}$$

எனவும் அதிலிருந்து

$$a = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$b = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

எனவும் கிடைக்கும். அதாவது

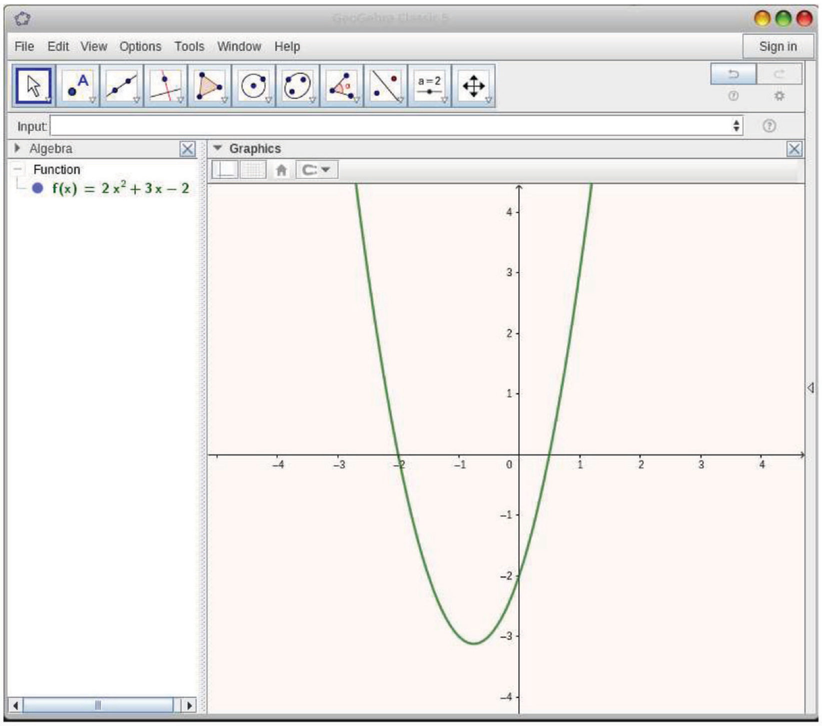
$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

அப்போது வினாவை இவ்வாறாகலாம்:

$(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ ஆக வேண்டுமெனில் x எந்த எண் ஆக வேண்டும் ?

இதன் விடை $x = -2$ அல்லது $x = \frac{1}{2}$.

அதாவது, $2x^2+3x-2$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம் x-அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் $(-2,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ஆகும்.



இனி இந்த முறையை பொதுவாகப் பார்க்கலாம்:

எந்த இருபடி பல்லுறுப்பையும் ax^2+bx+c என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம் அல்லவா. அப்போது எந்த இருபடி சமன்பாட்டையும் இந்த வடிவத்தில் எழுதலாம்:

$$ax^2+bx+c=0$$

இதைப் போன்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கான பல நிலைகளாக இவ்வாறு எழுதலாம்:

(1) சமன்பாட்டை இவ்வாறு மாற்றி எழுதவும்: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

(2) இதன் பல்லுறுப்பை ஒருபடி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

(i) இந்தக் காரணிகள் $x+p$ எனவும் $x+q$ எனவும் எடுத்தால்

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$$

(ii) இதிலிருந்து $p+q=\frac{b}{a}$ எனவும் $pq=\frac{c}{a}$ எனவும் கிடைக்கும்.

(iii) $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $p-q$ வைக் கணக்கிடவும்.

(iv) முன்பு கண்டுபிடித்த $p+q$ உம் $p-q$ உம் ஆக கிடைக்கும் எண்களில் ஏதாவது ஒன்றைப் பயன்படுத்தி p, q இவற்றைக் கணக்கிடவும்.

(3) அப்போது தீர்வு காண வேண்டிய சமன்பாட்டை இவ்வாறு எழுதலாம் : $(x + p)(x + q) = 0$

(4) இதன் தீர்வு $x = -p$ அல்லது $x = -q$

மேலும் $p - q$ உம் தொடர்ந்து p, q இவற்றையும் கணக்கிடுவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்:

$$(p-q)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$p - q = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \text{ அல்லது } p - q = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$p - q$ ஆக இதில் ஏதாவது ஒன்றை எடுத்து p, q வைக் கணக்கிடலாம்:

$$p + q = \frac{b}{a} \qquad p - q = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

அப்போது சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ அல்லது } x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ அல்லது } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ஒரு எண்ணைக் கூட்டவோ கழிக்கவோ செய்ய வேண்டும் என்பதைச் சுருக்கி எழுதுவதற்கு $\pm$ என்ற அடையாளம் பயன்படுத்துவதுண்டு. அப்போது தீர்வுகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

எனச் சமன்பாட்டு பிரச்சினையின் தீர்வுகள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

எடுத்துக்காட்டாக முதலில் செய்த கணக்கை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கலாம்:

$2x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம், x-அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் எவை ?

இங்கே தீர்வு காண வேண்டிய சமன்பாடு

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

அப்போது மேலே எழுதிய தீர்வுகளைப் பொதுவடிவத்தில்

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$$

என எடுத்து இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - (4 \times 2 \times (-2))}}{2 \times 2}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm 5}{4}$$

அதாவது

$$x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

அல்லது

$$x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

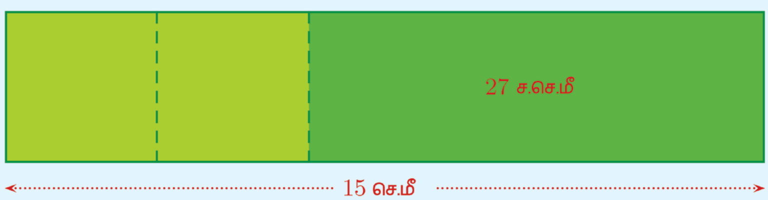
x அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-2, 0)$.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளின் படங்கள் x-அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளைக் கணக்கிடவும்:

(i) $2x^2 - 7x - 1$ (ii) $2x^2 + 7x - 1$ (iii) $9x^2 + 12x + 4$

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 42 மீட்டரும், அதன் மூலைவிட்டம் 15 மீட்டரும் ஆகும். அதன் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு ?

(3) செவ்வக வடிவத்திலுள்ள ஒரு காகிதத்திலிருந்து கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளதைப் போன்று இரண்டு சதுரங்கள் வெட்டி மாற்றப்படுகிறது:



மீதி உள்ள பகுதியின் பரப்பளவு 27 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும். செவ்வகத்தின் மற்ற பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு ?

(4) 1, 5, 9, ... என்ற கூட்டுத் தொடரின் முதல் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 91 கிடைக்கும் ?

(5) 28 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை வளைத்து செவ்வகம் உருவாக்க வேண்டும்.

(i) மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர் உள்ள செவ்வகம் உருவாக்க இயலுமா?

(ii) மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 10 சென்டிமீட்டர் ஆனால் ?

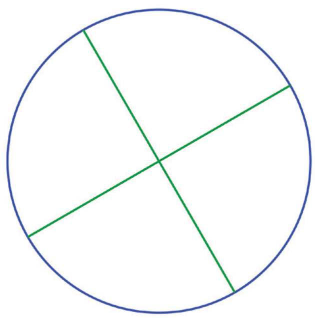
(iii) மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 14 சென்டிமீட்டர் ஆனால் ?

இவற்றில் உருவாக்க இயலுகின்ற செவ்வகங்களின் இரண்டு பக்கங்களினுடையவும் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

10 வட்டங்களும் கோடுகளும்

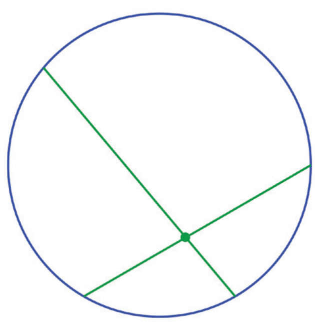
நாண்கள்

வட்டத்திலுள்ள எந்த இரண்டு விட்டங்களும் மையத்தின் வழியாக வெட்டிச் செல்கின்றன.

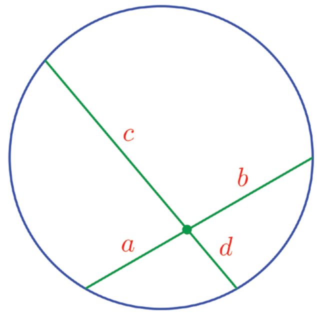


வெட்டிக் கிடைக்கின்ற நான்கு பாகங்களின் நீளம் ஆரத்திற்குச் சமமும் ஆகும்.

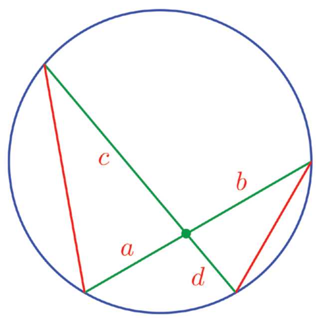
விட்டம் அல்லாத இரண்டு நாண்கள் வட்டத்தின் உள்ளே வெட்டிச் செல்லும் போது ?



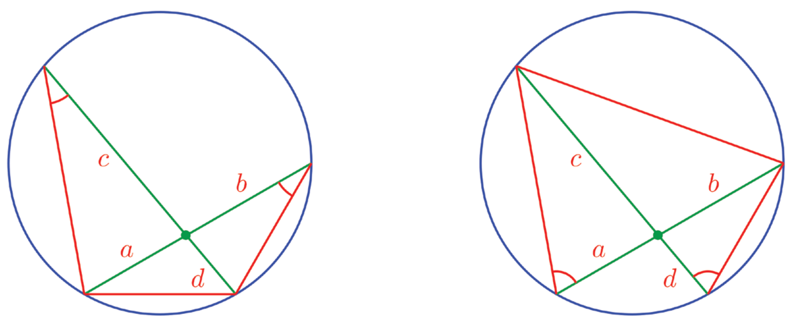
பாகங்கள் ஒவ்வொன்றும் சமமாக வேண்டுமென்றில்லை. ஆனாலும் அவைகளுக்கு இடையே ஒரு தொடர்பு உள்ளது. அதனைக் கண்டுபிடிக்க, ஒரு நாணின் பாகங்களின் நீளங்களை a, b எனவும் மற்ற நாணின் பாகங்களின் நீளங்களை c, d எனவும் எடுக்கலாம்:



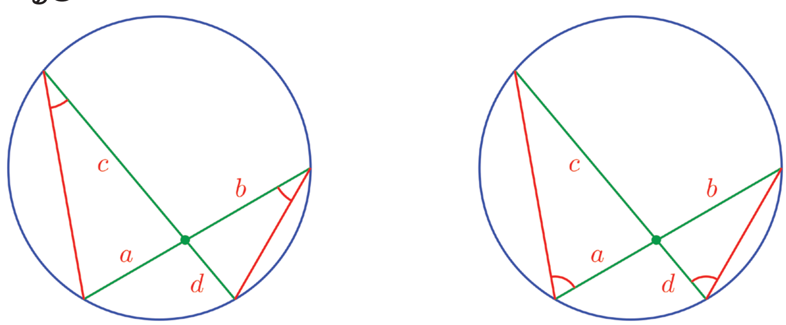
பாகங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை கணக்கீடு செய்ய, நாண்களின் முனைகளை இணைத்து கீழே காண்பதுபோல முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்:



இந்த முக்கோணங்களின் மேலே உள்ள கோணங்கள் ஒரே வட்டத்துண்டின் கோணங்கள் ஆகும். கீழேயுள்ள கோணங்கள் மற்றொரு வட்டத்துண்டின் கோணங்கள் ஆகும்.



அப்போது முதல் படத்தில் முக்கோணங்களின் மேலே உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும்; கீழேயுள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்;



அதாவது, இந்த முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் ஆகும். அதனால் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் ஒரே வீதத்தில் மாறுகின்றது (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **வடிவொத்த முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **கோணங்களும் பக்கங்களும்** என்ற பகுதி).

மேலே உள்ள கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளம் a உம் d உம் அல்லவா, கீழேயுள்ள கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளம் c உம் b உம்.

இவற்றின் மாற்றங்கள் ஒரே வீதத்தில் ஆகும். இந்த வீதத்தை k என எடுத்தால்.

$$d = ka$$

$$b = kc$$

இதில் k நமக்குத் தெரியாதல்லவா, அதைத் தவிர்த்து a, b, c, d இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு கிடைக்க, முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து இவ்வாறு கணக்கிடலாம்:

$$k = \frac{d}{a}$$

இதை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தினால்,

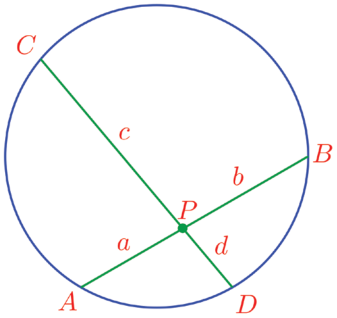
$$b = \frac{d}{a} \times c = \frac{cd}{a}$$

இதை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாமல்லவா.

$$ab = cd$$

நாண்களுக்கு AB, CD எனவும், அவற்றை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிக்கு P எனவும் பெயர் கொடுத்தால் இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$AP \times PB = CP \times PD$$



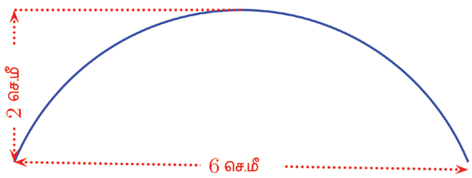
ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் AB, CD என்ற இரண்டு நாண்கள் வரையவும். இவை வெட்டும் புள்ளியில் P ஐ அடையாளப்படுத்தவும். Input Bar இல் PA * PB எனக் கொடுத்தால் PA × PB என்ற எண் Algebra View இல் காணமுடியும் PC × PD யையும் காண்க. அவற்றை ஒப்பீடு செய்யவும். நாண்களின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். P என்ற புள்ளி வட்டத்தில் எனில் PA × PB, PC × PD இவற்றிற்கு என்ன நிகழும்?

ஒரு பொதுக் கருத்தாக இதனைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு நாண்கள் வட்டத்தினுள் வெட்டிச் செல்லும்போது ஒரு நாணின் பாகங்களின் பெருக்கற்பலனும், மற்ற நாணின் பாகங்களின் பெருக்கற்பலனும் சமம் ஆகும்.

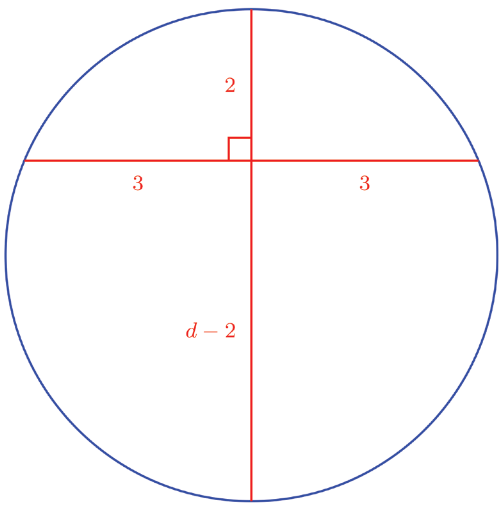
இதனைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு வளையத்தின் ஒரு பகுதி கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



வளையத்தின் விட்டத்தைக் கணக்கிடவும்.

முழு வட்டமும், அதில் இந்த வில்லின் முனைகளை இணைக்கின்ற நாணும், அதற்குச் செங்குத்தான விட்டத்தையும் கற்பனை செய்து பார்க்கலாம். இந்த விட்டம், நாணிற்குச் செங்குத்தானதால், நாணைச் சமமாகப் பிரிக்குமல்லவா. அப்போது வட்டத்தின் விட்டம் d சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், படம் இவ்வாறாகும்:



இனி மேற்கூறியக் கருத்தைப் பயன்படுத்தி

$$2(d - 2) = 3 \times 3 = 9$$

எனக் கணக்கிடலாம். இதிலிருந்து

$$d = \frac{9}{2} + 2 = 4\frac{1}{2} + 2 = 6\frac{1}{2}$$

எனக் கிடைக்குமல்லவா. அதாவது, வளையத்தின் விட்டம் $6\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர்.

தாமரைக் கணக்கு

பாஸ்கராச்சாரியருடைய லீலாவதி என்ற கணித புத்தகத்தைக் குறித்து எட்டாம் வகுப்பில் படித்தோமல்லவா. (சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் என்ற பாடத்தில் தலைகீழ் செயல் என்ற பகுதி):

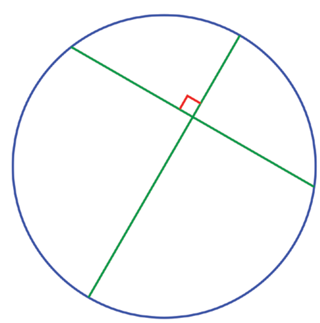
அதில் உள்ள ஒரு செய்யுளின் பொருளைத் தமிழில் இவ்வாறு கூறலாம். சக்ரவாகப் பறவைகளும், கிரௌவுஞ்சப் பறவைகளும் விளையாடுகின்ற தண்ணீர் நிறைந்த ஒரு ஏரியில் அரைக் கையளவு உயரத்தில் ஒரு தாமரை மொட்டு உயர்ந்து நிற்கிறது. காற்றில் மெதுவாக அசைந்து, அது இரண்டு கையளவு தூரத்தில் தண்ணீரில் முழ்கியது. தண்ணீரின் ஆழம் எவ்வளவு ? கூறுங்கள் கணக்கறிஞரே!

வளையத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிட்டது போல, இந்தக் கணக்கின் விடையையும் கண்டுபிடியுங்கள் ?

சமஸ்கிருத செய்யுள் இவ்வாறாகும்:

சக்ரகிரௌஞ்சாகுலிதஸலிலே
குவாபித்ருஷ்டம் தடாகே
தோயாதூர்த்துவ கமலகலிக்ரஹம்
விதஸ்ததி ப்ரமாணம்
மந்தம் மந்தம் சலிதமனிலேனாஹதம்
ஹஸ்தயுகமே
தஸ்மின்மக்னம் கணக கதய
க்ஷிப்ரமம்புப்ரமாணம்

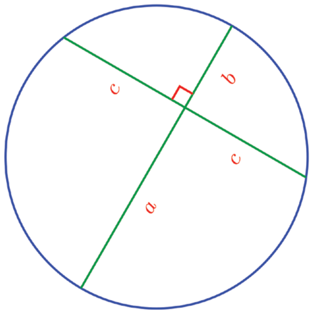
இந்தக் கணக்கில், ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்கின்ற நாண்களில் ஒன்று வட்டத்தின் விட்டமும், மற்றொன்று அதன் செங்குத்தான ஒரு நாணும் அல்லவா. அவ்வாறான ஒரு படத்தைப் பார்க்கவும்:



விட்டத்தின் பாகங்களின் நீளங்களை a, b என எடுக்கலாம்.

விட்டம் மையத்திலிருந்து நாணிற்குள்ள செங்குத்தானதால் அது நாணை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் (எட்டாம் வகுப்பில் **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் **நாண்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது விட்டம், நாணைப் பிரிக்கின்ற இரண்டு பாகங்களினுடைய நீளங்களை c என எடுக்கலாம்:



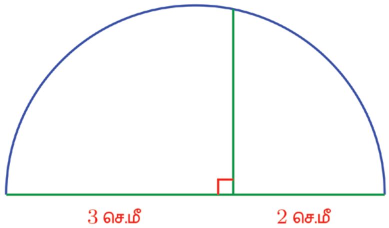
வெட்டிச் செல்கின்ற நாண்களைக் குறித்துள்ள பொதுக் கருத்தின்படி a, b, c இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

$$ab = c^2$$

இந்தக் கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்;

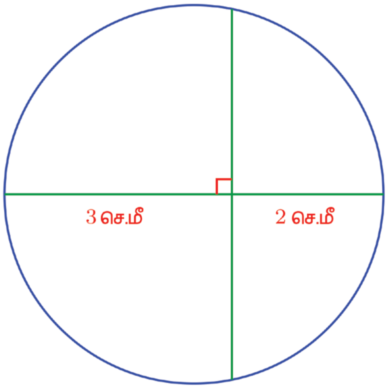
வட்டத்தில் ஒரு விட்டத்தை அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு நாண் வெட்டுகின்ற பாகங்களின் பெருக்கற்பலன், நாணின் பாதியின் வர்க்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



விட்டத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள செங்குத்துக் கோடு அரைவட்டத்தைத் தொடுகிறது. இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் எவ்வளவு ?

வட்டத்தை முழுமையாக்கி செங்குத்துக்கோட்டைக் கீழாக நீட்டினால் ஒரு நாண் கிடைக்கும்; அதனுடைய பாதியே செங்குத்துக்கோடு:



அப்போது மேற்கூறிய கருத்தின்படி செங்குத்துக் கோட்டின் வர்க்கம் $3 \times 2 = 6$; செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $\sqrt{6}$ சென்டிமீட்டர்.

இவ்வாறு எந்த எண்ணினுடையும் வர்க்க மூலத்தை நீளமாகக் கொண்ட கோடு வரையலாமல்லவா.

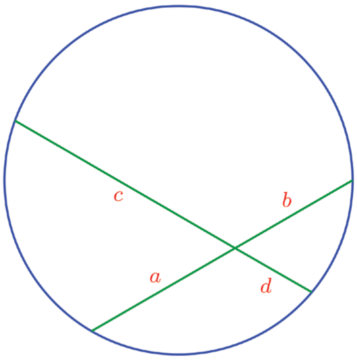
$\sqrt{5}$ சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடு வரைவது எவ்வாறு ?

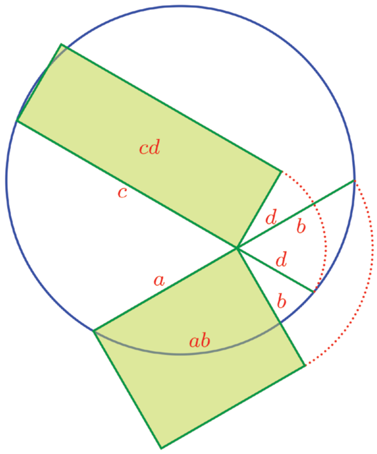
$\sqrt{6}$ சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டை வேறொரு முறையில் வரையலாமா ?

பரப்பளவுகள்

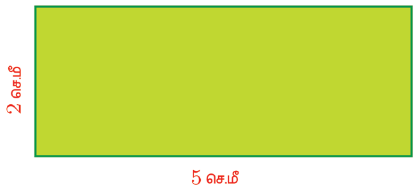
வட்டத்தின் இரண்டு நாண்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிக் கிடைக்கின்ற பாகங்களின் பெருக்கற் பலனைக் குறித்தல்லவா கூறி வருகிறோம். நீளங்களின் பெருக்கற்பலனைப் பரப்பளவாகக் கூறலாமல்லவா. அப்போது இந்தக் கருத்தை வடிவியல் முறையில் இவ்வாறு கூறலாம்:

ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு நாண்கள் வட்டத்திற்குள் வெட்டிச் செல்லும் போது, இரண்டு நாண்களுடையவும் பாகங்கள் பக்கங்களான செவ்வகங்களுக்கு ஒரே பரப்பளவாகும்.





ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு மாறாமலே ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை மட்டும் மாற்றி வரைவதற்கு இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக இந்தச் செவ்வகத்தைப் பார்க்கவும்:

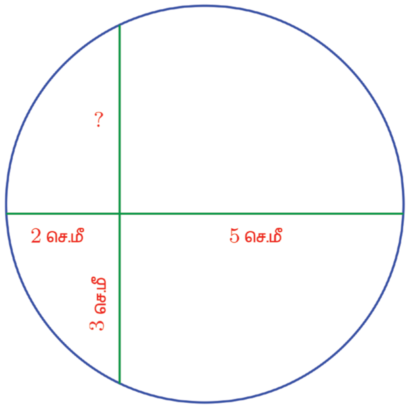


இதன் பரப்பளவு மாறாமல் ஒரு பக்கம் 3 சென்டிமீட்டராக வரைய வேண்டும்.

செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $5 \times 2 = 10$ சதுர சென்டிமீட்டர் அல்லவா. ஒரு பக்கம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டுமானால், மற்ற பக்கம் $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும். இதனை அளவுகோலால் துல்லியமாக அளந்தெடுக்க முடியாதல்லவா.

இப்போது கூறியக் கருத்தை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் ?

ஒரு வட்டத்தினுள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்கின்ற இரண்டு நாண்களை இவ்வாறு கற்பனை செய்து பார்க்கவும். ஒரு நாணின் பாகங்கள் 5 சென்டிமீட்டரும் 2 சென்டிமீட்டரும் மற்ற நாணின் ஒரு பாகம் 3 சென்டிமீட்டருமானால், மீதமுள்ள பாகம் எத்தனை சென்டி மீட்டர் ஆகும் ?

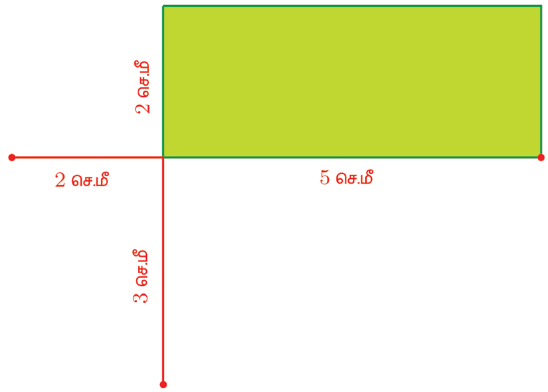


மீதமுள்ள இந்தப் பாகத்தை 3 ஆல் பெருக்கினால் $2 \times 5 = 10$ ஆகவேண்டுமல்லவா ?

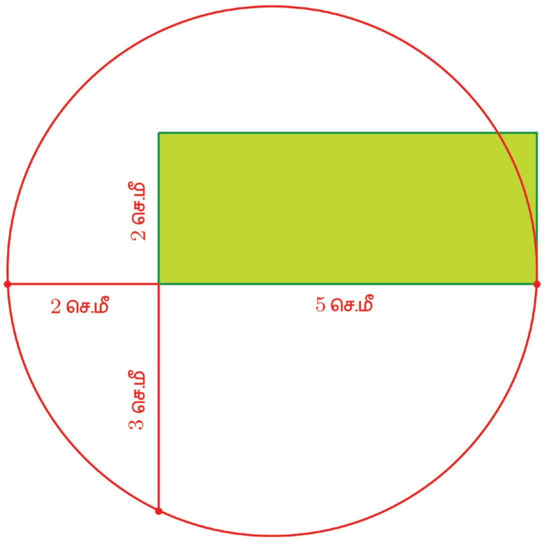
அப்போது இதுவே நமக்குத் தேவையான $3\frac{1}{3}$ சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு,

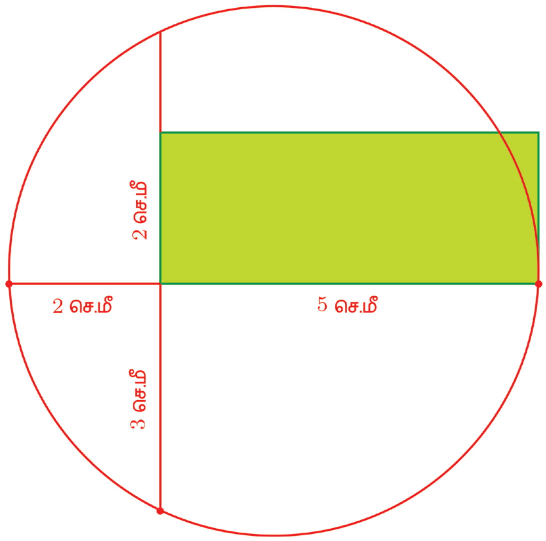
இனி இதனை எவ்வாறு வரையலாம் ?

முதலில் செவ்வகத்தின் அடிப்பக்கத்தை 2 சென்டிமீட்டர் இடது பக்கமும், இடது பக்கத்தை 3 சென்டிமீட்டர் கீழேயும் நீட்டி வரையலாம்:

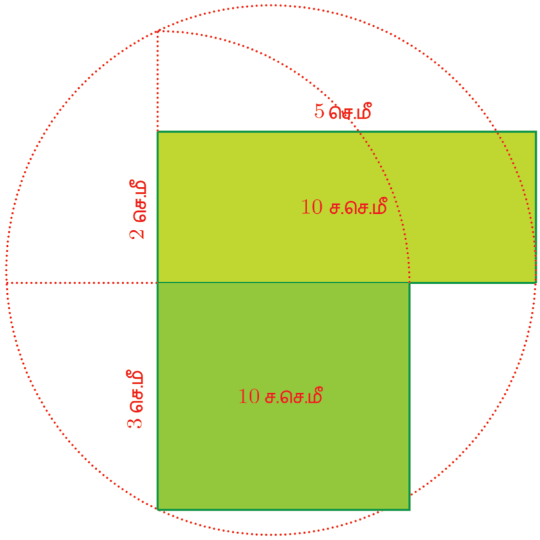


இனி இடது, வலது மற்றும் கீழேயுள்ள புள்ளிகளின் வழியாக வட்டம் வரைந்து செவ்வகத்தின் இடது பக்கத்தை நீட்டி அதில் இணைத்தால் போதுமல்லவா. மூன்று புள்ளிகளின் வழியாக ஒரு வட்டம் வரைவது எவ்வாறென எட்டாம் வகுப்பில் **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் **சுற்றுவட்டம்** என்ற பகுதியில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா):





இனி இவ்வாறு கிடைத்த நீளத்தைக் கிடைமட்டமாக அடையாளப்படுத்தி நமக்குத் தேவையான செவ்வகத்தை வரையலாம்

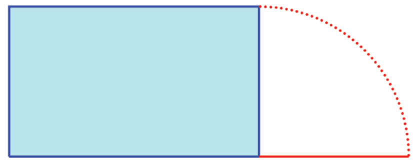


இவ்வாறு வரைவதற்கு முதல் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் தெரிய வேண்டுமென்றில்லை. ஒரு பக்கத்தில் எவ்வளவு கூட்ட வேண்டுமென்றோ, குறைக்க வேண்டுமென்றோ மட்டும் தெரிந்தால் போதும்.

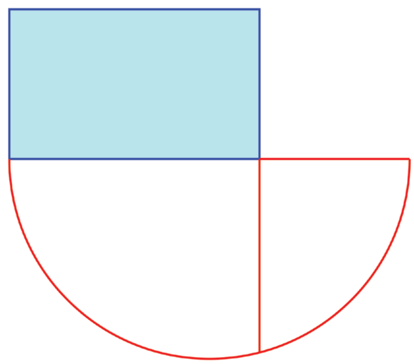
ஒரு செவ்வகத்தின் அதே பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரைப்பதற்கு, இதே கருத்தின் துணைக் கருத்தான விட்டத்தின் பாகங்களுக்கும் செங்குத்து நாணிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தச் செவ்வகத்தைப் பார்க்கவும்:

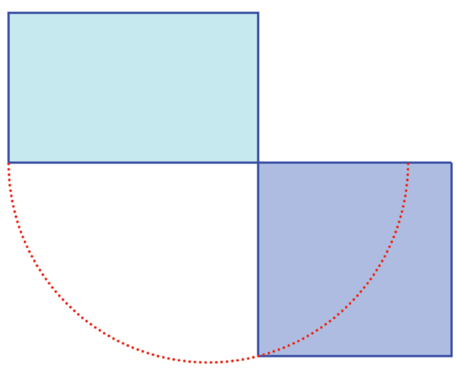
இதே பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரைவதற்கு, முதலில் செவ்வகத்தின் கீழே உள்ள பக்கத்துடன் அதன் உயரத்தையும் சேர்த்து நீட்டி வரையவும்:



இனிக் கீழேயுள்ள கோட்டை விட்டமாக்கி ஒரு அரைவட்டத்தைக் கீழே வரையவும். செவ்வகத்தின் வலது பக்கத்தைக் கீழே நீட்டி, அரைவட்டத்தில் இணைக்கவும்:

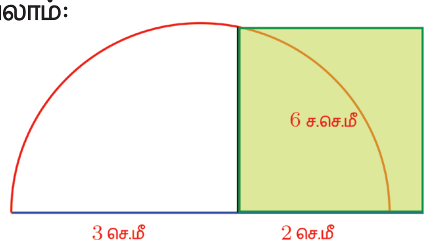


இந்தக் கோடு சதுரத்தின் பக்கம் ஆகும். (காரணம் ?).



இதிலும் முதல் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் தெரியவேண்டுமென்பதில்லை எனக் கவனிக்கவும்.

இனிக் குறிப்பிட்ட பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையவும் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தி $\sqrt{6}$ சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு வரைவது எவ்வாறு என முன்பாகத்தில் பார்த்தோமல்லவா, இந்த நீளத்தைப் பக்கமாகவும் 6 சதுரசென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரமும் வரையலாம்:



(1) 5 சென்டிமீட்டர் நீளம், 4 சென்டிமீட்டர் உயரம் உள்ள செவ்வகம் வரையவும்.

(i) இதே பரப்பளவும், நீளம் 6 சென்டிமீட்டருமான செவ்வகம் வரையவும்.

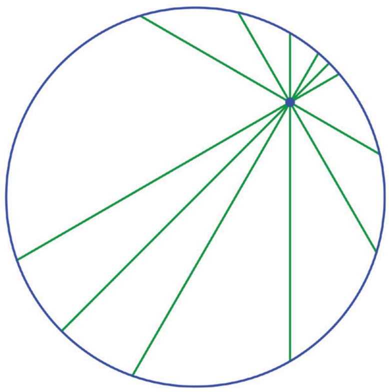
(ii) இதே பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையவும்.

(2) 15 சதுரசென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையவும்.

(3) மூன்று வேறுபட்ட முறைகளில் 5 சதுரசென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையவும் (பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நினைவு கூரவும்).

வட்டமும் புள்ளியும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

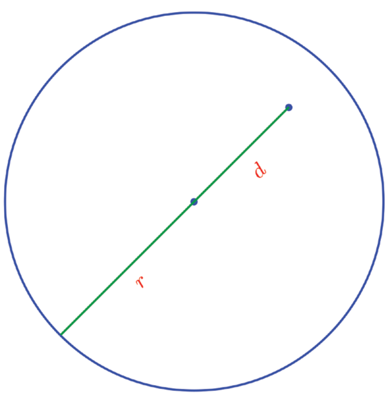


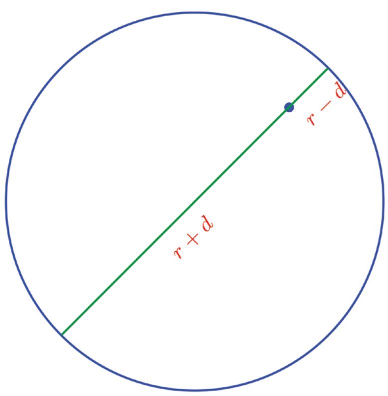
ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டத்தின் மீது A என்ற ஒரு புள்ளியும் வட்டத்தின் உள்ளே P என்ற ஒரு புள்ளியையும் அடையாளப்படுத்தவும். Line ஐப் பயன்படுத்தி AP என்ற கோடு வரையவும். இந்தக் கோடு வட்டத்துடன் சந்திக்கும் புதிய புள்ளி B என அடையாளப்படுத்தவும். இனிக் கோட்டை மறைத்து வைக்கலாம். AB என்ற நாண் வரையவும். PA × PB காண்க. A இன் இடத்தை வட்டத்தின் வழியாக மாற்றிப் பார்க்கவும். PA × PB மாறுகிறதா? P இன் இடத்தை மாற்றினால்? P என்ற புள்ளி மையத்திலிருந்து அகன்று செல்லும் போது PA × PB க்கு என்ன நிகழ்கின்றது. P வட்டத்தின் மீது ஆகும் போது? வட்டத்திற்கு வெளியே ஆனதால்?

வட்டத்தின் உள்ளே ஒரு புள்ளியின் வழியாகப் பல நாண்கள் கடந்து செல்கின்றன. இவற்றையெல்லாம், இந்தப் புள்ளி இரண்டு பாகங்கள் ஆக்குகின்றதல்லவா. நாம் இப்போது பயன்படுத்துகின்ற பொதுக் கருத்தின்படி, இந்தப் பாகங்களின் எல்லாம் பெருக்கற்பலன் ஒரே எண் ஆகும்.

இந்த எண்ணைக் கணக்கிட இந்தப் புள்ளியின் வழியாக உள்ள விட்டம் வரையலாம். அதுவும் புள்ளியின் வழியாக உள்ள ஒரு நாண் ஆனதால், புள்ளி விட்டத்தை வெட்டுகின்ற பாகங்களின் பெருக்கற்பலனும் இந்த எண்ணே ஆகும்.

வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், வட்ட மையத்திலிருந்து புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் d எனவும் எடுத்தால், விட்டத்தின் பாகங்களின் நீளத்தை இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாம்:

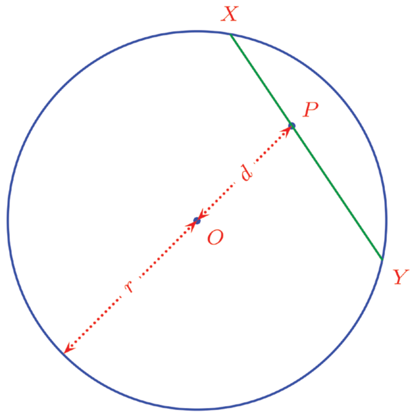




அப்போது பாகங்களின் பெருக்கற்பலன்

$$(r + d)\ (r - d) = r^2 - d^2$$

புள்ளியின் வழியாக வரையப்படுகின்ற எந்த நாணினுடையவும் பாகங்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரே எண் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அப்போது இவ்வாறான அனைத்து நாண்களின் பாகங்களின் பெருக்கற்பலன் $r^2 - d^2$ ஆகும்.



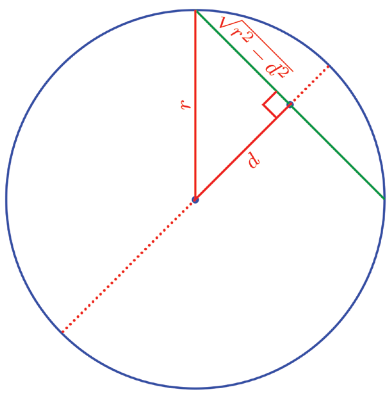
$$PX \times PY = r^2 - d^2$$

அதாவது

ஆரம் r ஆன வட்டத்தின் உள்ளே, வட்ட மையத்திலிருந்து d தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி P யின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற XY என்ற எந்த நாணை எடுத்தாலும்

$$PX \times PY = r^2 - d^2$$

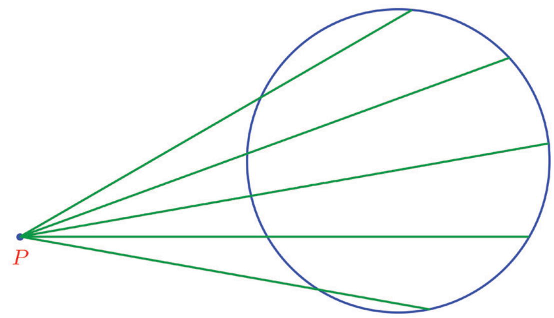
வடிவியல் முறையில், $r^2 - d^2$ என்பது, P யின் வழியாக உள்ள விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக வரைகின்ற நாணின் பாதியின் வர்க்கம் ஆகும்.



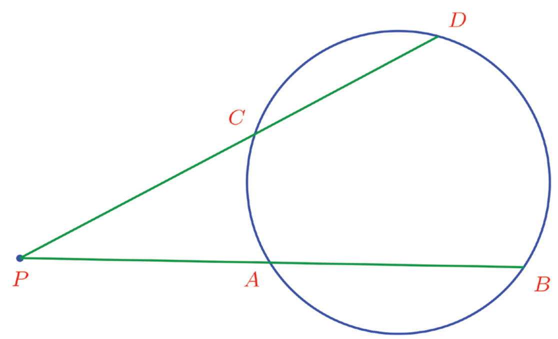
மேற்கூறிய கருத்தில், P வட்டத்தின் உள்ளே ஒரு புள்ளியும் X, Y என்பவை P யின் வழியாக உள்ள ஒரு கோடு வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளும் அல்லவா; PX, PY இவை P யிலிருந்து இந்தப் புள்ளிகளுக்குள்ள தூரம்.

வட்டத்திற்கு வெளியே, P என்ற புள்ளியை எடுத்து வட்டத்தை வெட்டுகின்ற கோடுகள் வரைந்தால் ?

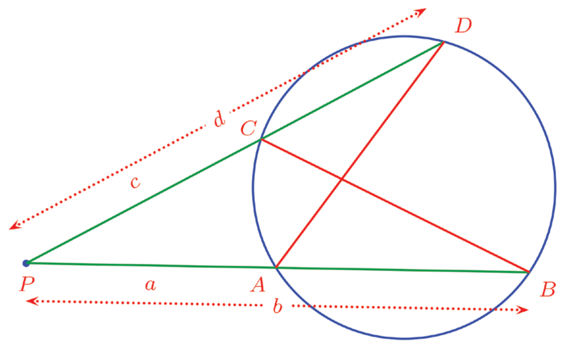
இவ்வாறான கோடுகளில், P யிலிருந்து வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளுக்கு உள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரே எண் ஆகுமா ?



இவ்வாறான இரண்டு கோடுகளை எடுத்துப் பரிசோதனை செய்யலாம்:



படத்தில் $PA \times PB$ உம் $PC \times PD$ உம் ஒரே எண்தானா எனப் பரிசோதனை செய்ய வேண்டும். அதைப் பரிசோதனை செய்ய கீழே காண்பது போல கோடுகள் வரைந்து, முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம். PA, PB என்ற நீளங்கள் a, b எனவும் PC, PD என்ற நீளங்கள் c, d எனவும் எடுக்கலாம்:



PAD, PCB என்ற முக்கோணங்களுக்கு P யில் ஒரே கோணம் ஆகும்; B யிலும் D யிலும் கோணங்கள் சமம் ஆகும் (எதனால் ?).

அதாவது இந்த முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் ஆகும். அதனால் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளம் ஒரே வீதத்தில் மாறுகின்றன.

முக்கோணங்களில் B யிலும் D யிலும் உள்ள கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளம் c யும் a யும்.

C யிலும் A யிலும் உள்ள கோணங்களின் எதிர்ப் பக்கங்களின் நீளம் b யும் d யும்.

இவற்றின் மாற்றங்கள் ஒரே வீதத்தில் ஆகும். இந்த வீதத்தை k என எடுத்தால்

$$c = ka$$

$$b = kd$$

இதிலிருந்து வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள புள்ளியில் கணக்கீடு செய்தது போல

$$ab = cd$$

எனக் கிடைக்கும் (செய்து பார்க்கவும்).

அதாவது

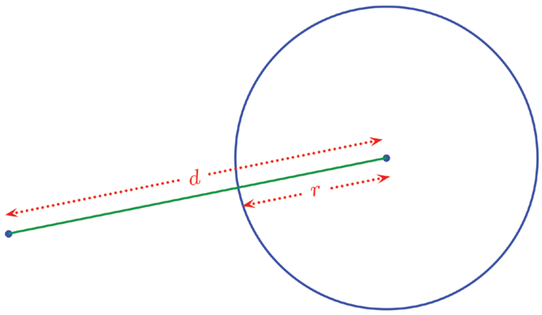
$$PA \times PB = PC \times PD$$

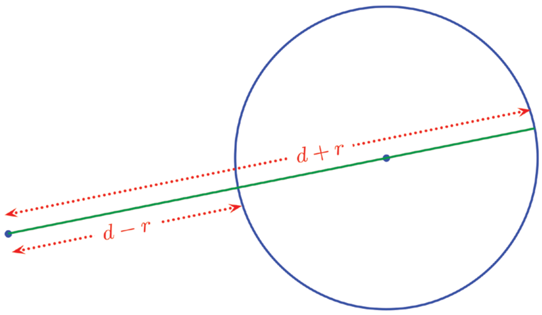
அப்போது என்ன கிடைத்தது ?

> வட்டத்தின் வெளியே ஒரு புள்ளியின் வழியாக வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்ற எல்லாக் கோடுகளிலும், இந்தப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளுக்கு உள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரே எண் ஆகும்.

இந்த எண்ணை வட்டத்தின் ஆரத்தையும் வட்ட மையத்திலிருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தையும் பயன்படுத்திக் கணக்கீடு செய்ய முடியுமா ?

வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், மையத்திலிருந்து புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் d எனவும் எடுக்கலாம். வட்ட மையத்தையும் புள்ளியையும் இணைக்கின்ற கோட்டையே எடுத்து தூரங்களின் பெருக்கற் பலனைக் கணக்கிடலாம்:

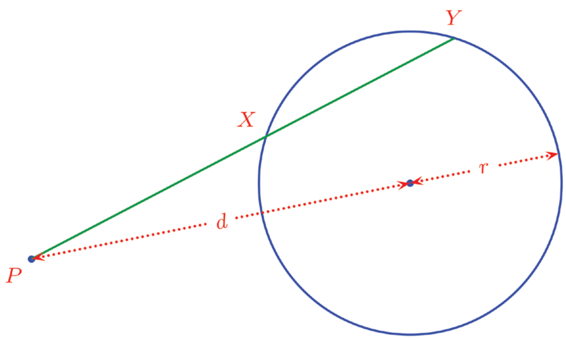




அப்போது வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளுக்கு உள்ள தூரங்கள் $d - r$ உம் $d + r$ எனக் காணலாமல்லவா. அவற்றின் பெருக்கற்பலன்

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

இந்தப் புள்ளியின் வழியாக வரைகின்ற எந்தக் கோட்டை எடுத்தாலும் கோடு வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிக்கு உள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் இதுவே ஆகுமல்லவா:



$PX \times PY = d^2 - r^2$

ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி P ஐ அடையாளப்படுத்தவும். P யிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைந்து வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளி T ஐ அடையாளப்படுத்தவும். வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி Y ஐ அடையாளப்படுத்தி, PY என்ற கோடு வரையவும். இந்தக் கோடு வட்டத்துடன் சந்திக்கும் புதிய புள்ளி X ஐ அடையாளப்படுத்தவும். PT^2 (Input PT^2) PX × PY இவற்றைக் கணக்கிட்டு ஒப்பீடு செய்யவும். P யின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

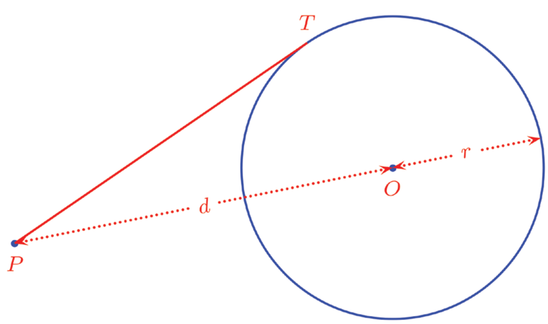
ஆரம் r ஆன வட்டத்தின் வெளியே, வட்டமையத்திலிருந்து d தூரத்திலுள்ள P என்ற புள்ளியின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரு கோடு வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகள் X உம் Y உம் எனில்

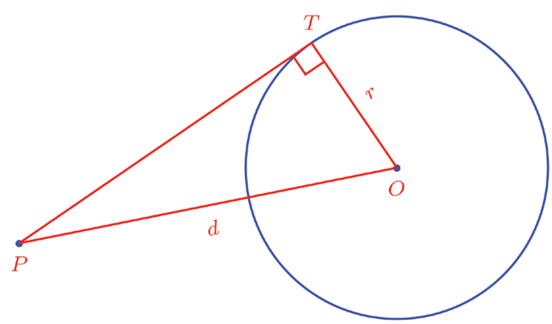
$$PX \times PY = d^2 - r^2$$

P ஐ வட்டத்தின் உள்ளே எடுப்பதெனில் $PX \times PY$ என்ற பெருக்கற்பலனை P யின் வழியாக உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட நாணின் பாதியின் வர்க்கம் என்று வடிவியல் முறையில் கூறலாமல்லவா.

P வட்டத்திற்கு வெளியே எனில், இவ்வாறு வடிவியலாகக் கூற முடியுமா ?

அதற்கு P யிலிருந்து வட்டத்திற்கு உள்ள தொடுகோட்டை வரைந்து, அது வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளி T என அடையாளப்படுத்தவும். இனி P யும் T யும் வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைத்தால் ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும்:



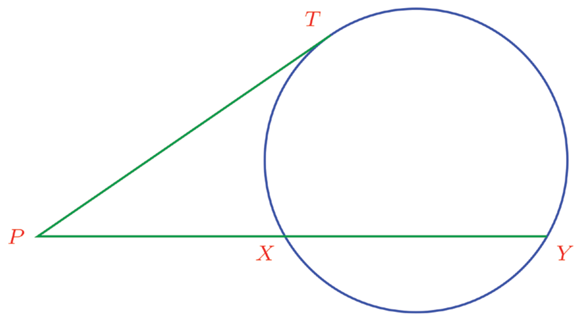


இது ஒரு செங்கோண முக்கோணமானதால் (எதனால் ?)

$$d^2 - r^2 = PT^2$$

அப்போது

ஒரு வட்டத்தின் வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்ற எந்தக் கோட்டை வரைந்தாலும், இந்தப் புள்ளியிலிருந்து வெட்டுகின்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன், புள்ளியிலிருந்துள்ள தொடுகோட்டின் நீளத்தின் வர்க்கமாகும்.



$$PX \times PY = PT^2$$

இனி வட்டத்தின் உள்ளேயோ வெளியேயோ உள்ள புள்ளியின் வழியாக வரைகின்ற கோடுகளைக் குறித்துள்ள கருத்துக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்.

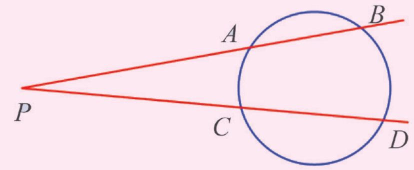
ஆரம் r ஆன வட்டத்தின் உள்ளே மையத்திலிருந்து d தூரத்தில் புள்ளியை எடுக்க வேண்டுமெனில், d என்ற தூரம் ஆரம் r ஐவிடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டுமல்லவா. அப்போது P யின் வழியாக உள்ள கோடுகள் வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளுக்கு உள்ள தூரங்களின் பெருக்கற்பலன் $r^2 - d^2$. புள்ளி வெளியே ஆகவேண்டுமெனில் d என்ற தூரம் r ஐ விடப் பெரியதாக வேண்டும். மேற்கூறிய பெருக்கற்பலன் $d^2 - r^2$.

புள்ளி வட்டத்தின் உள்ளே ஆனாலும் வெளியே ஆனாலும் r^2, d^2 இவற்றில் பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது இரண்டிலும் எடுக்கப்படுவது $r^2 - d^2$ ன் மட்டளவு ஆகும் (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **மெய்யெண்கள்** என்ற பாடத்தில் **தூரங்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது பொதுவாக இவ்வாறு கூறலாம்:

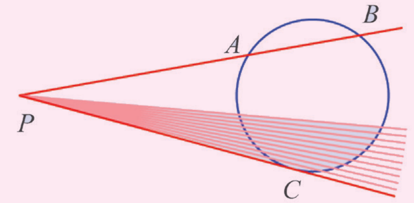
மாறாத தொடர்பு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



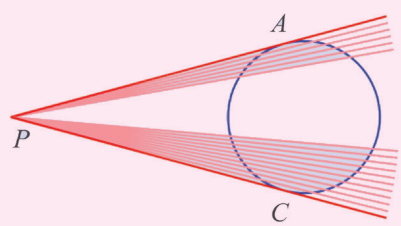
இதில் $PA \times PB = PC \times PD$ எனத் தெரியுமல்லவா.

கீழேயுள்ள கோடு சுழன்று தொடுகோடானால்?



PD என்பது PC யே ஆகும் முன்பு பார்த்த தொடர்பு $PA \times PB = PC^2$ எனவாகும்.

மேலே உள்ள கோடும் தொடுகோடு ஆனால்?



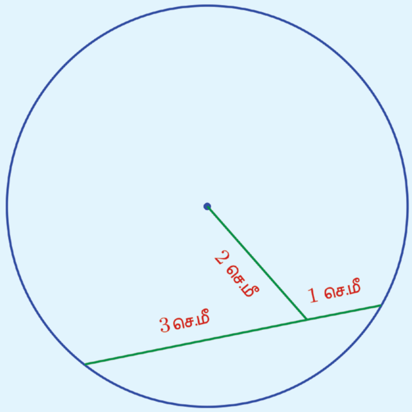
இந்தத் தொடர்பு $PA^2 = PC^2$ அல்லது $PA = PC$ எனவாகும்.

ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள தொடுகோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் என முன்பே பார்த்தோம் அல்லவா.

ஆரம் r ஆன வட்டத்தின் உள்ளேயோ, வெளியேயோ வட்டமையத்திலிருந்து d தூரத்திலுள்ள P என்ற புள்ளியின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரு கோடு வட்டத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளிகள் X உம் Y உம் எனில்

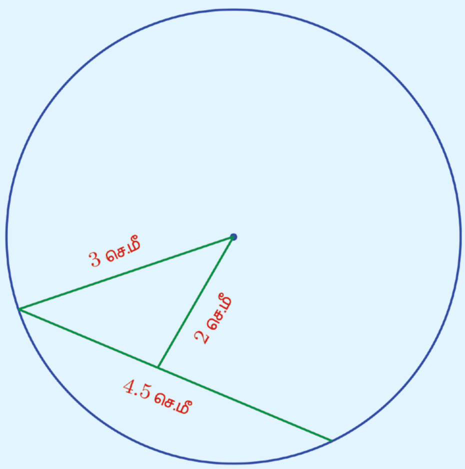
$$PX \times PY = |r^2 - d^2|$$

(1) படத்தில் வட்டமையத்திலிருந்துள்ள ஒரு கோடு ஒரு நாணை இரண்டாகப் பிரிக்கின்றது.



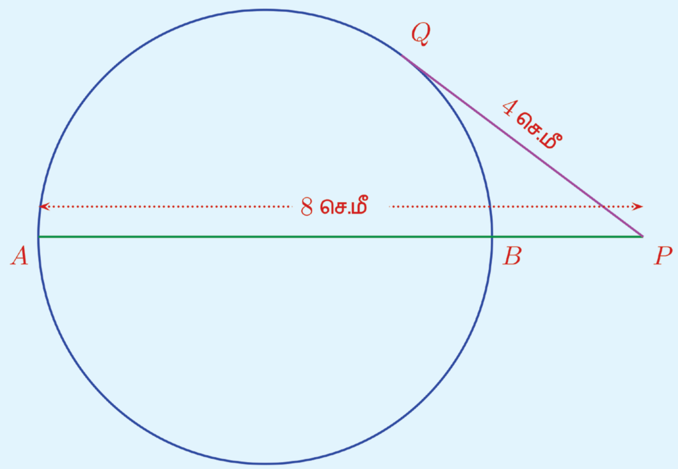
வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு ?

(2) படத்தில் வட்டமையத்திலிருந்துள்ள ஒரு கோடு, ஒரு நாணுடன் சந்திக்கிறது.



நாணின் இரண்டு பாகங்களின் நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

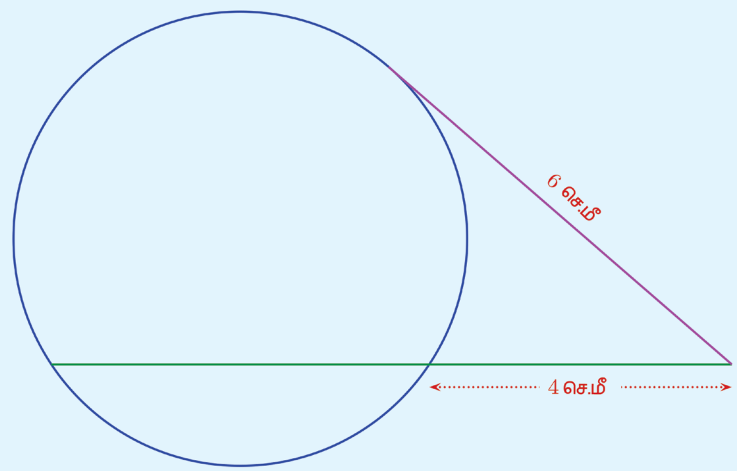
(3) படத்தில் AB வட்டத்தின் விட்டமும், P அதை நீட்டியதில் ஒரு புள்ளியும் ஆகும். P யிலிருந்துள்ள தொடுகோடு வட்டத்தை Q வில் தொடுகிறது.

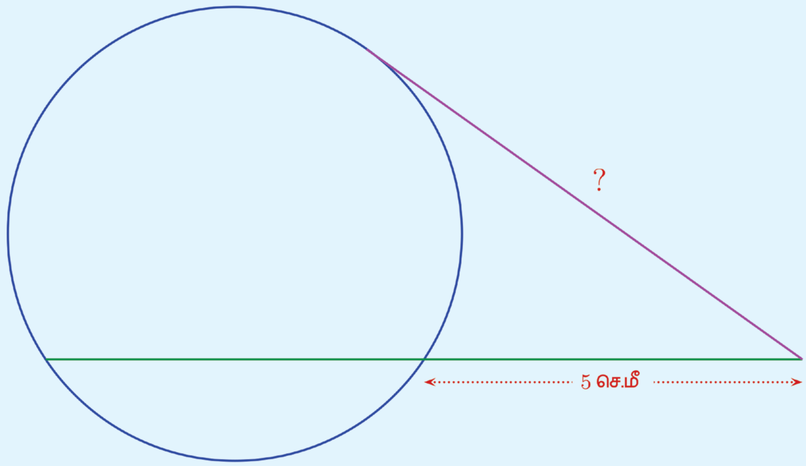


வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவாகும் ?

(4) கீழேயுள்ள படங்களில் முதல் படத்தில், ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளை இணைத்துக் கோட்டை வெளியே நீட்டி அங்கிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

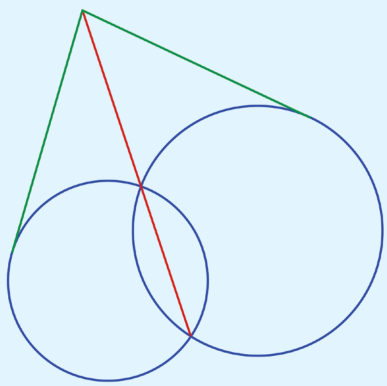
இதே கோட்டைச் சிறிது வலதுபக்கம் நீட்டிய இடத்திலிருந்து வரைகின்ற தொடுகோடே இரண்டாவது படத்தில்;





இந்தத் தொடுகோட்டின் நீளம் எவ்வளவு ?

(5) படத்தில் இரண்டு வட்டங்கள் வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளிகள் இணைக்கின்ற கோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு வட்டங்களுக்கும் ஒவ்வொரு தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



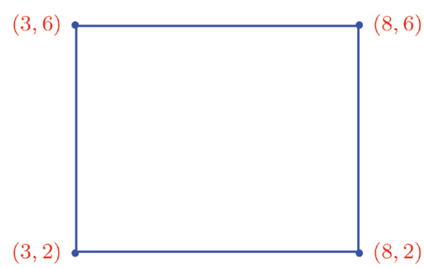
இந்தத் தொடுகோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் என நிறுவுக.

11 வடிவியலும் இயற்கணிதமும்

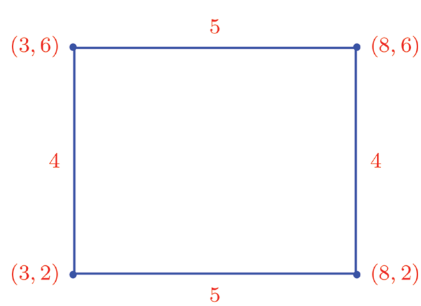
இணைகரங்கள்

புள்ளிகளை எண் ஜோடிகளால் குறிப்பிடுகின்ற முறையைக் **குறிகாட்டி எண்கள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்தோம் அல்லவா. அதைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளையும் செய்தோம்.

எடுத்துக்காட்டாகப் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையான ஒரு செவ்வகத்திலுள்ள ஒரு ஜோடி எதிர் உச்சிகள் $(3, 2)$ உம் $(8, 6)$ உம் எனில், அதன் மற்ற இரண்டு உச்சிகளைக் கணக்கிடலாம்:

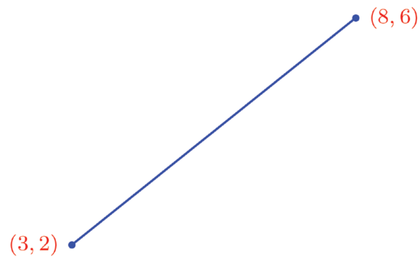


இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தையும் கணக்கிடலாம்:



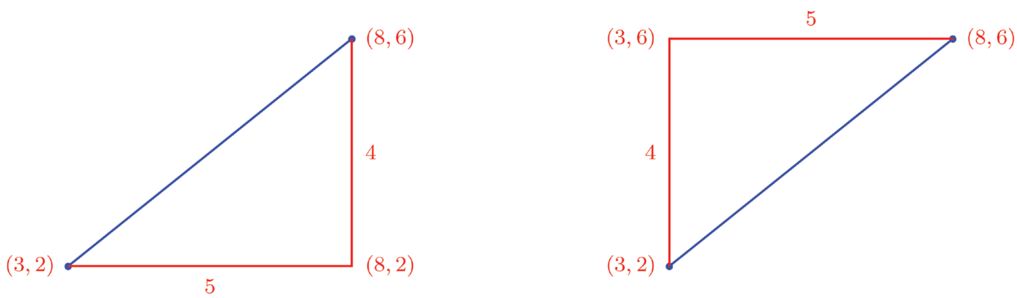
இதை வேறொரு முறையில் கூறலாம்.

(3, 2) என்ற புள்ளியிலிருந்து (8, 6) என்ற புள்ளியை அடையும்போது, குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்பட்ட மாற்றங்கள் எவை ?



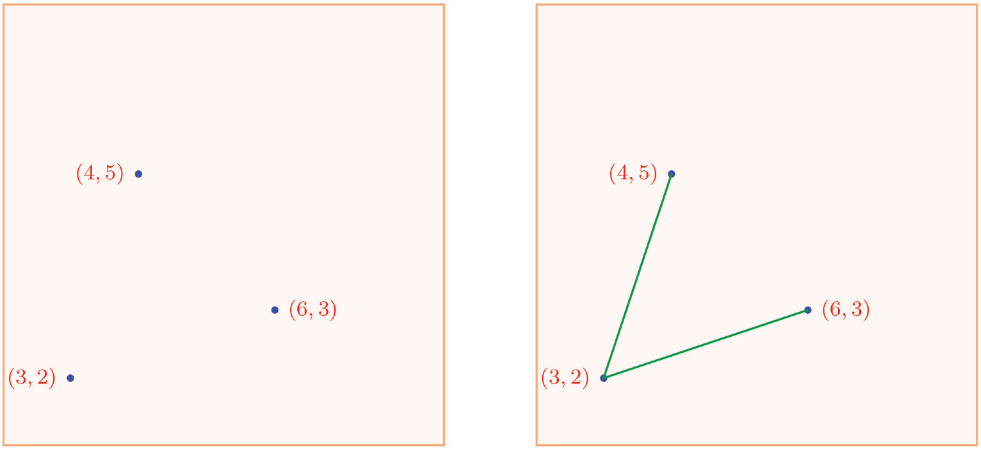
- x-குறிகாட்டி எண் $8 - 3 = 5$ அதிகரிக்கிறது.
- y-குறிகாட்டி எண் $6 - 2 = 4$ அதிகரிக்கிறது.

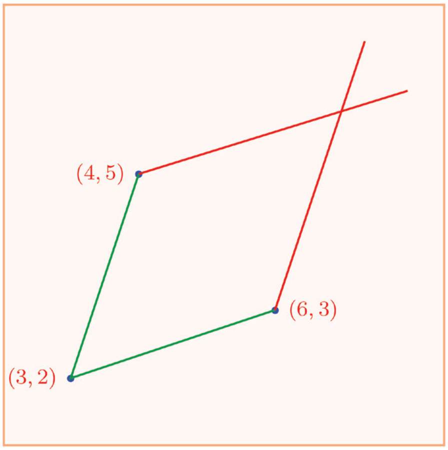
இந்த மாற்றங்களை ஒவ்வொன்றாகச் செய்தால் ?

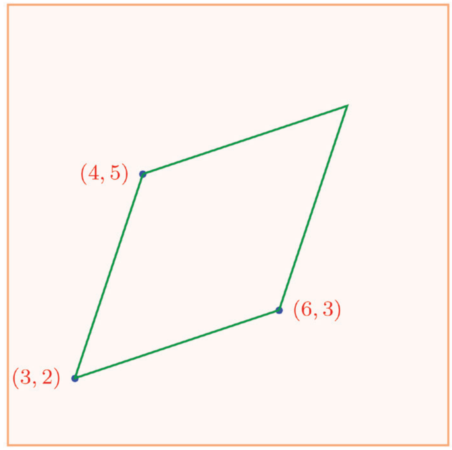


ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படுகின்ற இத்தகைய மாற்றத்தைச் செங்குத்துப் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையான ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகக் காணலாம்.

இனி இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:







மூன்று புள்ளிகள் உச்சிகளான ஒரு இணைகரம் வரையப்பட்டுள்ளது.

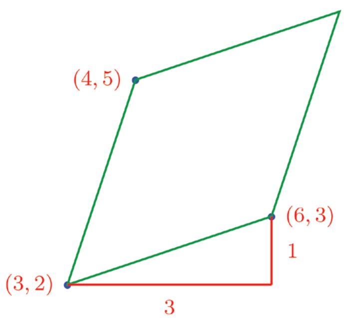
இதன் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

அதற்குக் கீழே உள்ள பக்கத்தின் இடது உச்சியிலிருந்து வலது உச்சிக்கு நகரும்போது குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தைப் பார்க்கலாம்.

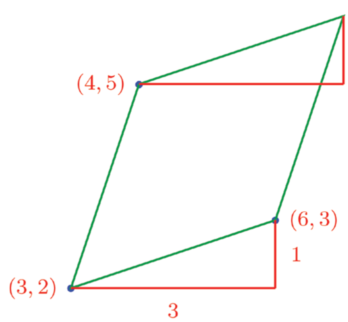
- x-குறிகாட்டி எண் $6-3=3$ அதிகரிக்கிறது.
- y-குறிகாட்டி எண் $3-2=1$ அதிகரிக்கிறது.

முன்பு கூறியது போல , ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து இந்த மாற்றங்களைக் காண்பிக்கலாம்:

A(0, 0) என்ற புள்ளியும் B, C என இவ்வாறு வேறு இரண்டு புள்ளிகளையும் அடையாளப்படுத்தவும். Input Bar இல் (x(B) + x (C), y(B) + y (C)) என அளித்தால் D என்ற ஒரு புள்ளி கிடைக்கும். ABDC என்ற நாற்கரம் வரையவும். இது ஓர் இணைகரம் அல்லவா? B, C என்ற புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



மேலே உள்ள பக்கத்தில் வலது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிட வேண்டும். அதற்கு, இடது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தைத் தெரிந்தால் போதும். அதைக் கணக்கிட கீழே உள்ள கோட்டில் உள்ளது போல் ஒரு முக்கோணத்தை மேலேயும் வரையலாம்:



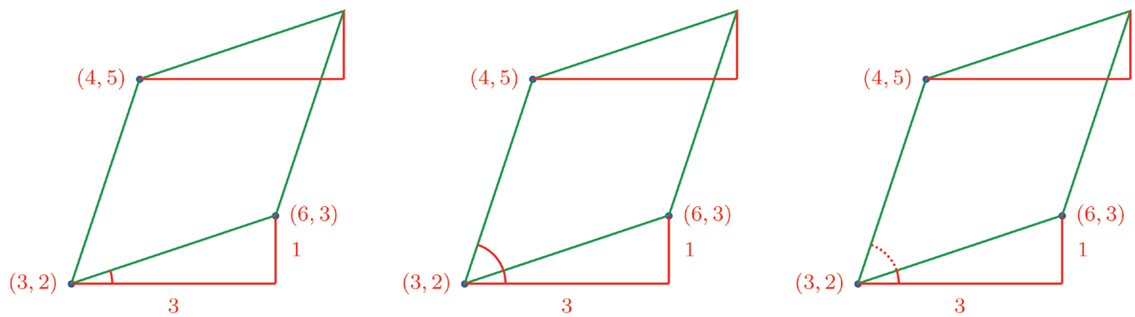
இந்த முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளமே குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றங்கள். அவற்றை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ?

இந்த முக்கோணம் பார்ப்பதற்குக் கீழே உள்ள முக்கோணத்திற்குச் சமமானது எனத் தோன்றுகிறதல்லவா. அது சரியா என எவ்வாறு பரிசோதிக்கலாம் ?

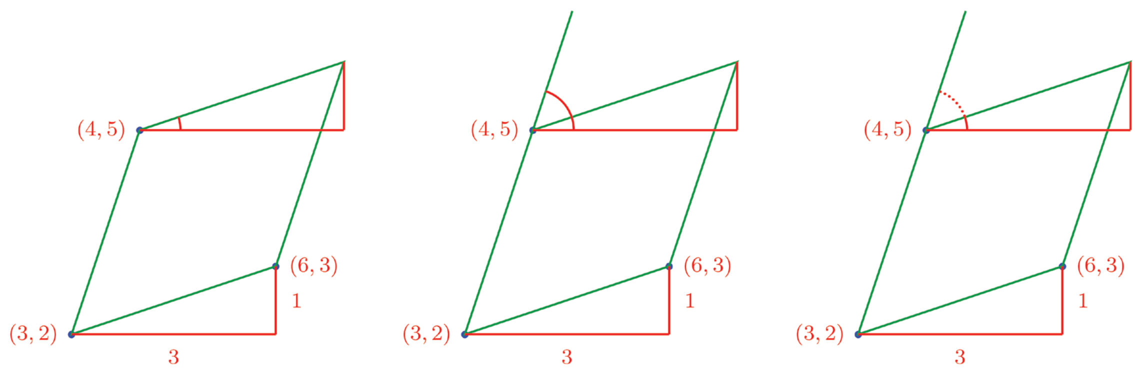
கீழேயும் மேலேயும் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணங்கள் ஒர் இணைகரத்தின் எதிர்பக்கங்கள் ஆகும். அதனால் அவற்றிற்கு ஒரே நீளம் ஆகும்.

முக்கோணத்தின் கோணங்கள்? கீழே உள்ள முக்கோணத்தின் இடது உச்சியிலுள்ள கோணத்தை இரண்டு கோணங்களின் வித்தியாசமாகக் காணலாம் அல்லவா:

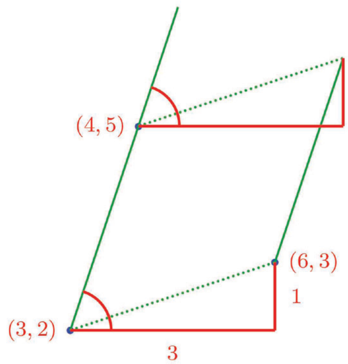
ஒரு முக்கோணம் ABC வரைந்து அதன் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களை அடையாளப்படுத்தவும். Move டூலைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தை வலது பக்கமாக 3 தூரம் நகர்த்திப் பார்க்கவும். உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களுக்கு என்ன நிகழ்கிறது? இவ்வாறு கிடைத்த முக்கோணத்தை மேல்நோக்கி 2 அகலம் நகர்த்தவும். குறிகாட்டி எண்களுக்கு என்ன நிகழ்கிறது? முதல் முக்கோணத்தினுடைய இறுதியாகக் கிடைத்த முக்கோணத்தினுடைய உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக ஒர் இணைகரம் வரைந்து இதைச் செய்து பார்க்கவும்.

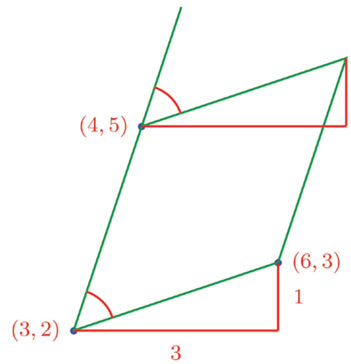


மேலே உள்ள முக்கோணத்தின் இடது கோணத்தையும் இதைப் போன்று இரண்டு கோணங்களின் வித்தியாசமாகக் காணலாம்:



இவ்வாறு மேலேயும் கீழேயும் கழிக்கின்ற கோணங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பார்க்கவும்:

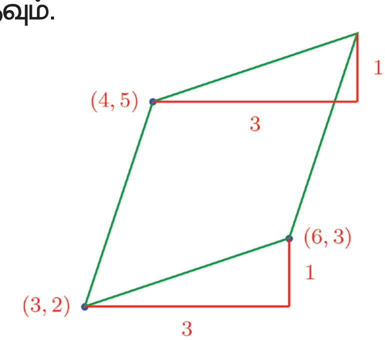




இவற்றில் முதல் கோணங்கள், இடது பக்க பச்சைக் கோடு சிவப்பு இணைகோடுகளை வெட்டும் போது உருவாகும் இரண்டு சிறிய கோணங்கள் ஆகும். அதனால் அவை சமமாகும். இரண்டாவது கோணங்கள் இந்தக் கோடு மேலேயும், கீழேயும் உள்ள பச்சை இணைகோடுகளை வெட்டும் போது உருவாகும் இரண்டு சிறிய கோணங்கள் ஆகும். அதனால் அவையும் சமமாகும்.(ஏழாம் வகுப்பில் **இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **கோணப் பொருத்தங்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது இந்தக் கோணங்களின் வித்தியாசங்களும் சமம் அல்லவா. அதாவது நமது செங்கோண முக்கோணங்களில் கீழே உள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும். அதனால் மூன்றாவது கோணங்களும் சமம் ஆகும். கர்ணமும் அதன் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள கோணங்களும் சமமானதால் முக்கோணத்தின் பிற பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும். (எட்டாம் வகுப்பில் **சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

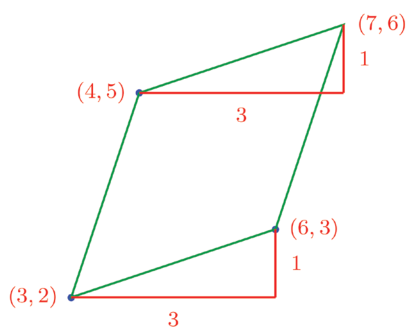
அப்போது மேலேயுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளத்தையும் இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தவும்.



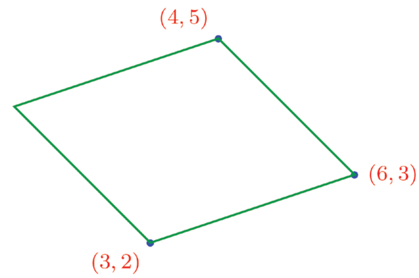
ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த ஒரு வடிவத்தைத் தேவைக்கு ஏற்ப நீக்குவதற்கு Translate by Vector டூலைப் பயன்படுத்தலாம். ஓர் இணைகரம் வரைந்து அதனை வலதுபக்கம் 3 உம் மேல்நோக்கி 2 உம் நகர்த்த வேண்டும் என்றிருக்கட்டும் இதற்காக $(0, 0), (3, 2)$ என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். Translate by Vector டூலைப் பயன்படுத்தி முதலில் இணைகரத்திலும் பின்பு $(0, 0), (3, 2)$ என்ற புள்ளிகளிலும் முறையே கிளிக் செய்யவும். இணைகரத்தின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன? $(3, 2)$ க்குப் பதிலாக வேறொரு புள்ளியை எடுத்துப் பார்க்கவும்.

இனி இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடலாமல்லவா:

- x-குறிகாட்டி எண் $4 + 3 = 7$
- y-குறிகாட்டி எண் $5 + 1 = 6$

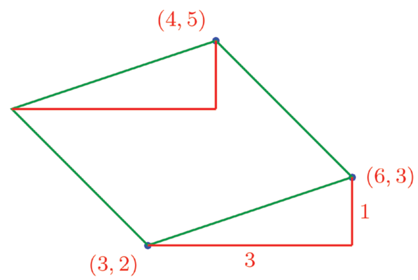


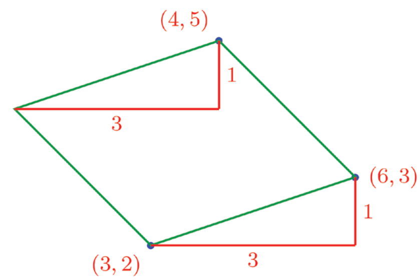
இந்தக் கணக்கில் முதலில் எடுத்த மூன்று புள்ளிகளையே உச்சிகளாக எடுத்து வேறொரு இணைகரம் வரையலாம் அல்லவா:



இந்த இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

முன்பு செய்தது போல, அச்சுகளுக்கு இணையான செங்குத்துப் பக்கங்கள் உள்ள முக்கோணங்களை மேலேயும் கீழேயும் வரைந்து இதைக் கண்டுபிடிக்கலாம்:





இங்கு $(4, 5)$ என்ற உச்சியிலிருந்து நாம் தெரிந்து கொள்ள வேண்டிய உச்சியைச் சென்றடைய கீழ் நோக்கி 1 இறங்கவும், இடது பக்கம் 3 நகரவும் வேண்டும்.

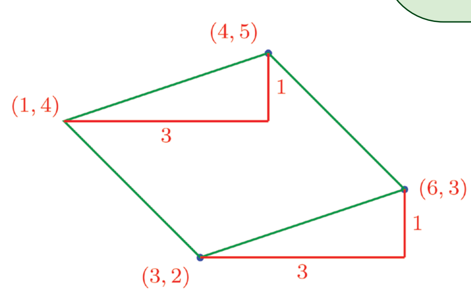
அதாவது,

- y-குறிகாட்டி எண் 1 குறைக்க வேண்டும்.
- x-குறிகாட்டி எண் 3 குறைக்க வேண்டும்.

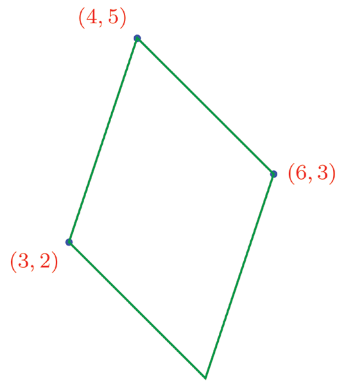
அப்போது நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் $(1, 4)$:

A, B, C என்றிவ்வாறு மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.

(x(B) + x(C) − x(A), y(B) + y(C) − y(A)) என Input Bar இல் அளித்தால் D என்ற புள்ளி கிடைக்கும். ABDC ஓர் இணைகரம் ஆகுமா? எதனால்? புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

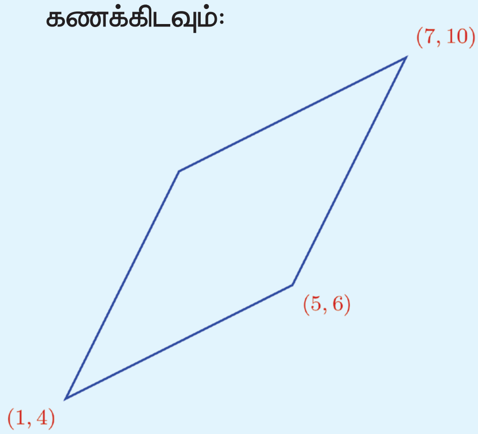


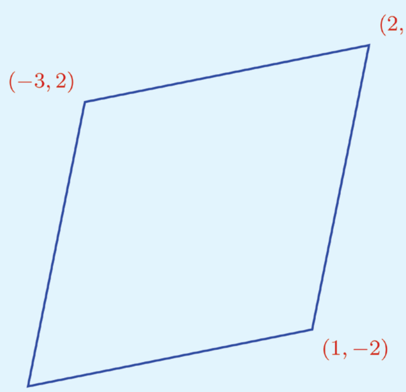
இதே மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட மூன்றாவது ஒரு இணைகரத்தையும் வரையலாமல்லவா.



இந்த இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடலாமா ?

(1) படத்தில் இணைகரங்களின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்:

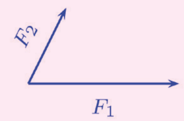




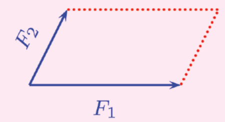
இணைகர விசை

ஒரு பொருளின் மீது விசை செலுத்தப்படும் போது இடம், வேகம் என்பனவற்றில் ஏற்படும் மாற்றம் விசையின் அளவை மட்டுமல்ல அது செலுத்தப்படும் திசையையும் சார்ந்துள்ளது. ஒரு பொருளில் இரண்டு விசைகளும் இரண்டு திசைகளிலும் செலுத்தும்போது உண்டாகும் இதே மாற்றம், ஒரு நிலையான திசையில் செலுத்தும்போதும் உருவாக்க இயலும்.

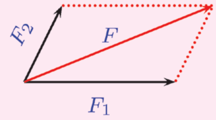
இந்த விசையைக் கண்டுபிடிக்க சோதனைகளின் மூலம் கண்டறிந்த ஒரு வழிமுறை உள்ளது. ஒரு புள்ளியிலிருந்து முதல் இரண்டு விசைகளின் அளவுகளுக்கு விகிதசமமான நீளமுள்ள கோடுகளை (ஒரு நியூட்டன் விசைக்கு ஒரு சென்டிமீட்டர் என்று) அவை செலுத்தப்படும் திசைக்கு ஏற்ப வரையவும்.



இனி இவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் வரையவும்.

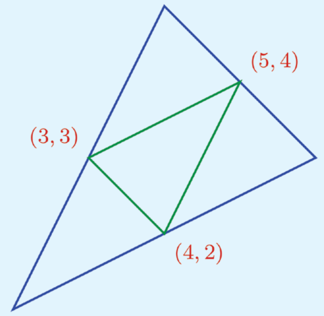


இந்த இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் திசையிலாகும். இந்த இரண்டு விசைகளுக்குப் பதில் ஒரு விசை, அதன் அளவு, முதலில் எடுத்த அளவு வீதத்தின் படி மூலைவிட்டத்தின் நீளத்திற்கு விகிதத்தில் ஆகும்.



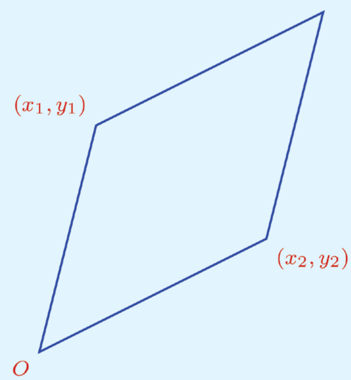
விசைகளின் இணைகர விதி (parallelogram law of forces) என இது அறியப்படுகிறது.

(2) படத்தில் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாகும்:

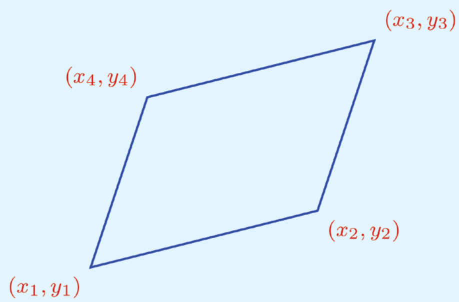


பெரிய முக்கோணத்தின் எல்லா உச்சிகளினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(3) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை ஆதி புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோடுகளை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?



(4) படத்தில் ஓர் இணைகரத்தின் நான்கு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன:



குறிகாட்டி எண்களுக்கிடையே கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பு உள்ளன என நிறுவுக:

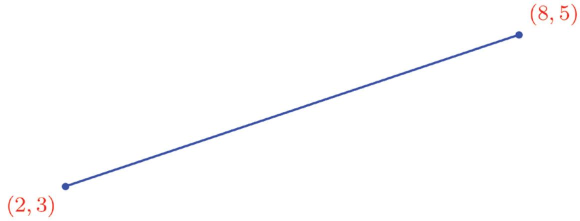
$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

மையப்புள்ளி

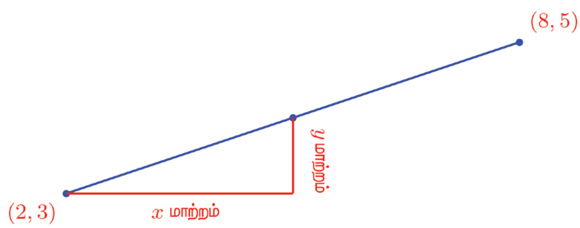
நாம் இதுவரை செய்த கணக்குகள் எல்லாம், சில புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களிலிருந்து, இந்தப் புள்ளிகளுக்கு ஏதேனும் முறையில் வடிவியலுடன் தொடர்புடைய வேறு சில புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான பிரச்சினைகள் ஆகும். இதைப்போன்று வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்.

ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளின் குறிகாட்டி எண்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

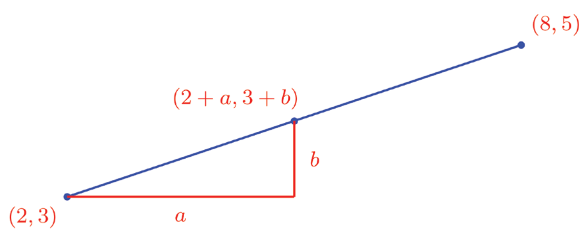


இந்தக் கோட்டின் மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

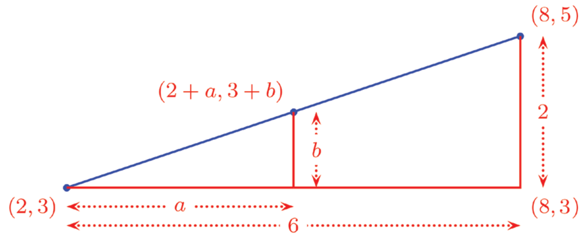
(2, 3) விருந்து (8, 5) க்கு உள்ள தூரத்தின் பாதி தூரத்தில் உள்ள புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். (2, 3) லிருந்து இந்த இடத்தை அடையும்போது, x-குறிகாட்டி எண்ணிலும் y-குறிகாட்டி எண்ணிலும் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கண்டுபிடித்தால், மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் கிடைக்கும்.



இவற்றை a, b என எடுத்தால் மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் $(2 + a, 3 + b)$ என எழுதலாம்:

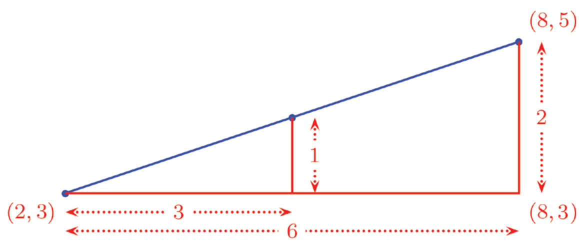


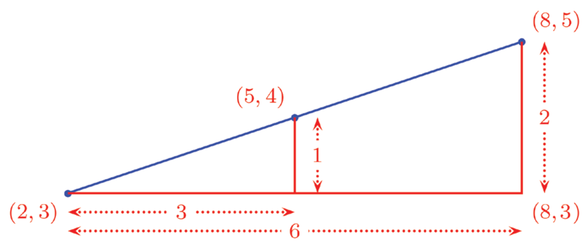
(2, 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து (8, 5) என்ற புள்ளியைச் சென்றடையும்போது குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களை முக்கோணம் வரைந்து காண்பிக்கலாம்:



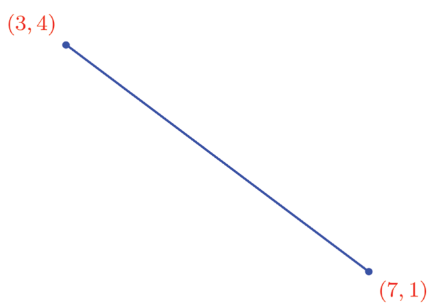
இந்தப் படத்தில் பெரிய செங்கோண முக்கோணத்திற்கும், அதன் உள்ளே உள்ள சிறிய செங்கோண முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள் அல்லவா. எவ்வாறு? அதனால் அவற்றின் பக்கங்களின் நீளம் மாறுவது ஒரே வீதத்தில் ஆகும்.

சிறிய முக்கோணத்தின் கர்ணம், பெரிய முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் பாதியாகும். அப்போது செங்குத்துப் பக்கங்களும் பாதியாகும். அதாவது, a b என்பன 3 உம் 1 உம் ஆகும். மையப்புள்ளி (5, 4).

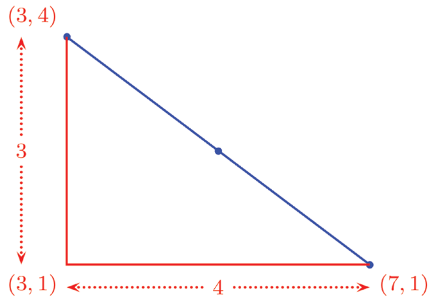


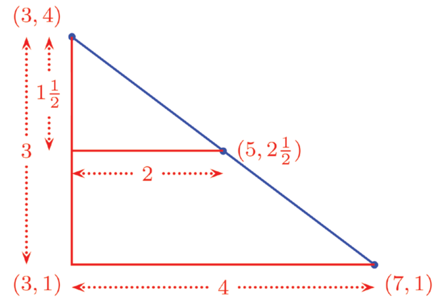


இனி கோடு இவ்வாறு எனில்?



(3, 4) லிருந்து (7, 1) ஐ அடையும் போது x-குறிகாட்டி எண் 4 அதிகரிக்கவும், y-குறிகாட்டி எண் 3 குறையவும் செய்கிறது. அப்போது மையப்புள்ளியை அடைவதற்கு x குறிகாட்டி எண் 2 கூட்டவும், y-குறிகாட்டி எண் $1\frac{1}{2}$ கழிக்கவும் வேண்டும்.

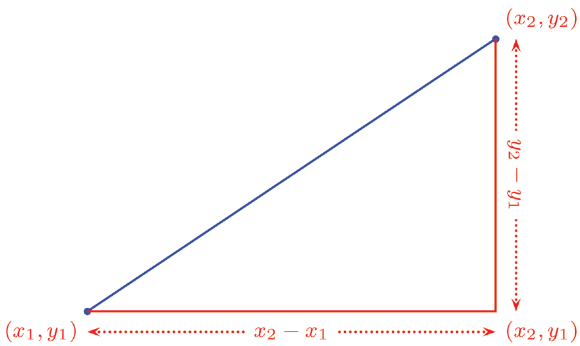


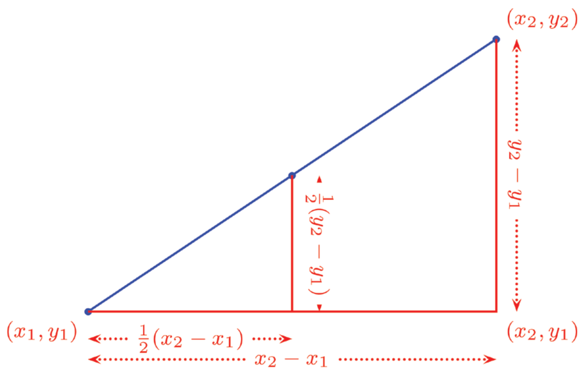


அவ்வாறு மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் $\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இனிப் பொதுவாக இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என எடுத்து மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம்.

இவற்றின் இடங்கள் பல விதங்களில் ஆகலாம். முதலில் இவ்வாறு எடுக்கலாம்:





மையப்புள்ளியின் x-குறிகாட்டி எண்

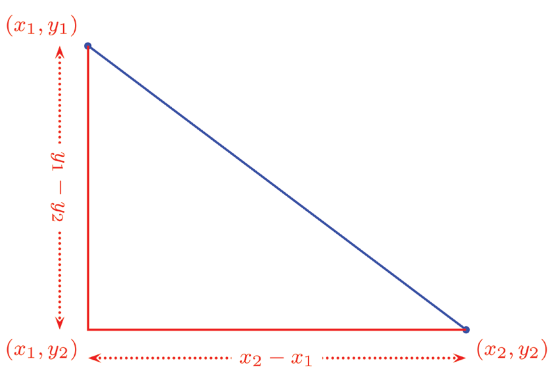
$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

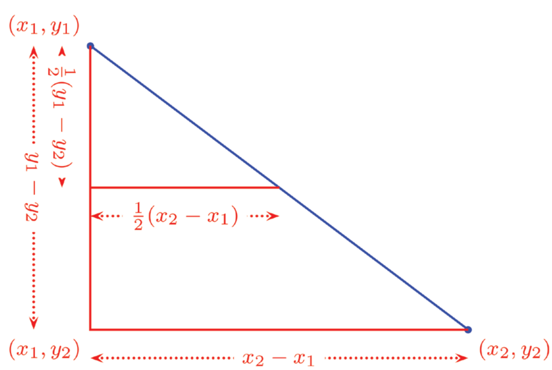
எனவும் y-குறிகாட்டி எண்

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

எனவும் கிடைத்தது அல்லவா ?

புள்ளிகள் இவ்வாறு எனில் ?





மையப்புள்ளியின் x-குறிகாட்டி எண்

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

y-குறிகாட்டி எண்

$$y_1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

A, B என்ற புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோட்டின் மையப்புள்ளி கிடைக்க (A + B)/2 என Input Bar இல் கொடுத்தால் போதும்.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளின் இடங்களை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றி வரைந்து பார்க்கவும். என்ன கிடைத்தது ?

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளி

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

(1) (2,3), (6, 5) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. வட்டமையத்தின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

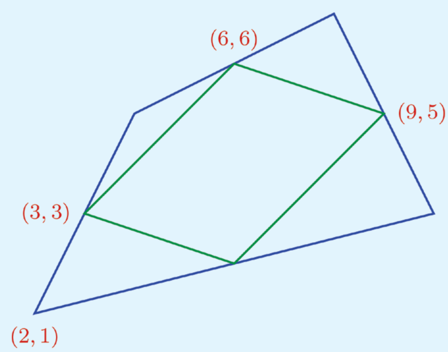
(2) ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு ஜோடி எதிர் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் (4, 5) உம் (1, 3) உம் ஆகும். அதன் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடுக. இரண்டாவது மூலைவிட்டத்தின் மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

(3) $A(1, 3), B(8, 6), C(12, 13), D(5, 10)$ என்பவற்றை உச்சிகளாக உடைய $ABCD$ என்ற நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது. இதில் $ABCD$ இணைகரம் என நிறுவுக.

(4) குறிகாட்டி (3, 5), (9, 13), (10, 6) என்ற எண்களை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணம் இருசமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக. இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(5) ஒரு வட்டத்தின் மையம் (1, 2) உம், அதில் உள்ள ஒரு புள்ளி (3, 5) உம் ஆகும். இப்புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்தின் மறுமுனையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(6) படத்தில் பெரிய நாற்கரத்தின் மையப் புள்ளிகளை இணைத்து அதனுள் சிறிய நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



(i) பெரிய நாற்கரத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

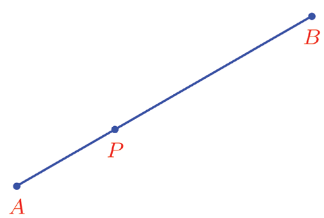
(ii) சிறிய நாற்கரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

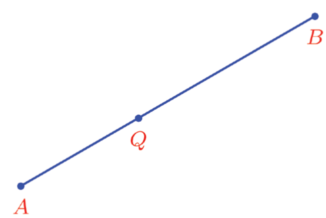
(7) குறிகாட்டி எண்கள் (0, 0), (0, 4), (3, 0) என்ற புள்ளிகள் உச்சிகளான முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

விகிதம்

இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோட்டின் மையப்புள்ளி, கோட்டை இரண்டு சம பாகங்களாக்குகிறது. கோட்டின் வேறு ஏதாவது புள்ளியை எடுத்தால் அது கோட்டை வேறுபட்ட நீளமுள்ள பாகங்களாக்குகிறது. கோட்டின் இவ்வாறான புள்ளிகளின் இடத்தைக் குறிப்பிட விகிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம். (எட்டாம் வகுப்பில் விகிதம் என்ற பாடத்தில் கோட்டின் பாகங்கள் என்ற பகுதியை நினைவு கூரவும்).

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:





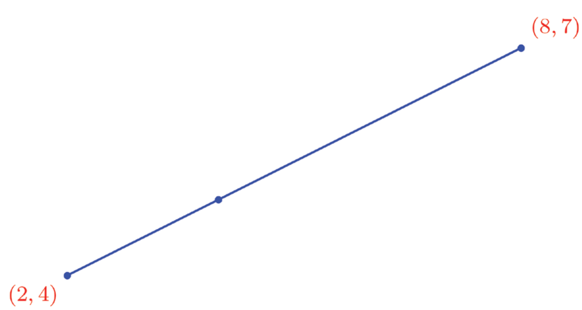
முதல் படத்தில், AP இன் நீளம் AB இன் $\frac{1}{3}$ பாகமும், PB இன் நீளம் AB இன் மீதமுள்ள $\frac{2}{3}$ பாகமும் ஆகும்.

இதனை விகிதமாகக் கூறுவது எவ்வாறு ?

P என்ற புள்ளி, A உம் B உம் இணைக்கின்ற கோட்டை $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது. மாறாக இரண்டாவது படத்தில், Q என்ற புள்ளி A, B இவை இணைக்கும் கோட்டை $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் கூறினால் அதன் பொருள் என்ன ?

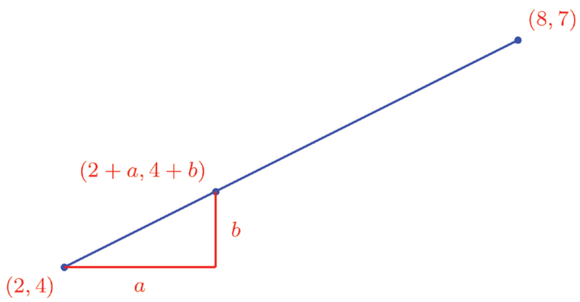
AQ வின் நீளம் AB இன் நீளத்தின் $\frac{2}{5}$ பாகமாகும் (QB இன் நீளம் AB இன் நீளத்தின் $\frac{3}{5}$பாகம்).

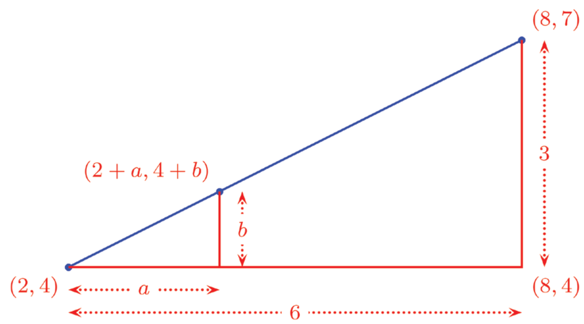
குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் ஒரு கோட்டைப் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்க மையப்புள்ளியைக் கணக்கீடு செய்த முறையையே (சிறிது மாற்றம் செய்து) பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $(2, 4), (8, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.



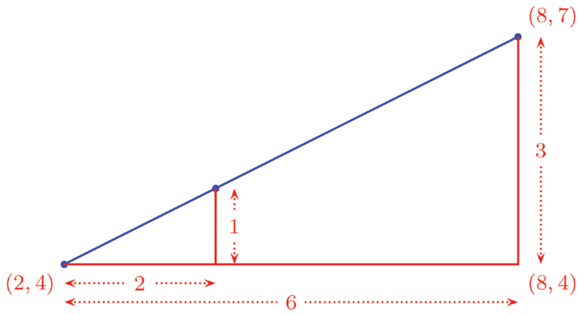
மையப் புள்ளியைக் கணக்கிட்ட முறையில், $(2, 4)$ இல் இருந்து நமக்குத் தேவையான புள்ளியை அடையும்போது x-குறிகாட்டி எண்களில் உருவாகும் மாற்றத்தை a எனவும், y-குறிகாட்டி எண்களில் உருவாகும் மாற்றத்தை b எனவும் எடுத்து மாற்றங்களை முக்கோணத்தில் அடையாளப்படுத்தலாம்.

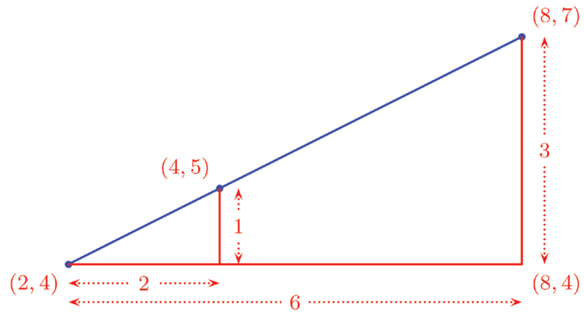
$(2, 4)$ இலிருந்து $(8, 7)$ ஐ அடையும்போது குறிகாட்டி எண்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களையும் இவ்வாறு வரைந்து காண்பிக்கலாம்:





இதில் பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகமே சிறிய செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம், அதனால் செங்குத்துப் பக்கங்களும் அதே போல் ஆகும். அப்போது அவற்றின் நீளங்களும், அதிலிருந்து நமக்குத் தேவையான புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களையும் கணக்கிடலாம் அல்லவா.





$(2, 4), (8, 7)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு A, B எனவும் நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டிய புள்ளிக்கு P எனவும் குறிப்பிட்டால், மேலே கூறிய கணக்கீடுகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

(1) $AP : PB = 1 : 2$ ஆனதால் AB என்ற நீளத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகமாகும் AP இன் நீளம்.

(2) A இலிருந்து B ஐ அடையும் போது

 (i) x-குறிகாட்டி எண் $8 - 2 = 6$ அதிகரிக்கிறது.

 (ii) y-குறிகாட்டி எண் $7 - 4 = 3$ அதிகரிக்கிறது.

(3) A இலிருந்து P ஐ அடையும் போது $\frac{1}{3}$ பாகமாகும்.

 (i) x-குறிகாட்டி எண் $6 \times \frac{1}{3} = 2$ அதிகரிக்கிறது.

 (ii) y-குறிகாட்டி எண் $3 \times \frac{1}{3} = 1$ அதிகரிக்கிறது.

(4) P இன் குறிகாட்டி எண்கள்

(i) x-குறிகாட்டி எண் $2 + 2 = 4$

(ii) y-குறிகாட்டி எண் $4 + 1 = 5$

(5) P இன் குறிகாட்டி எண்கள் $(4, 5)$

A, B என்ற புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களும் பிரிக்கும் விகிதமும் மாறினாலும், இதே முறையில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களையும் கணக்கிடலாமல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக, $(1, 6), (11, 2)$ என்ற புள்ளிகள் இணைக்கும் கோட்டை $3 : 5$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எவ்வாறு கணக்கிடலாம் ?

இப்போது செய்ததைப் போல, இந்தப் புள்ளிகளுக்கு A, B எனவும், பிரிக்கும் புள்ளிக்கு P எனவும் பெயர் குறிப்பிட்டுத் தொடங்கலாம்:

(1) $AP : PB = 3 : 5$ ஆனதால் AB என்ற நீளத்தின் $\frac{3}{8}$ பாகமாகும் AP இன் நீளம்.

(2) A இலிருந்து B ஐ சென்றடையும் போது

(i) x-குறிகாட்டி எண் $11 - 1 = 10$ அதிகரிக்கிறது.

(ii) y-குறிகாட்டி எண் $6 - 2 = 4$ குறைகிறது.

(3) A யிலிருந்து P ஐ அடையும்போது உருவாகும் மாற்றம் இவற்றின் $\frac{3}{8}$ பாகம் ஆகும்.

(i) x-குறிகாட்டி எண் $10 \times \frac{3}{8} = 3\frac{3}{4}$ அதிகரிக்கிறது.

(ii) y-குறிகாட்டி எண் $4 \times \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}$ குறைகிறது.

A, B என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி கிடைக்க A + (3/8) (B − A) என Input Bar இல் அளித்தால் போதும்.

(4) P இன் குறிகாட்டி எண்கள்:

(i) x-குறிகாட்டி எண் $1 + 3\frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$

(ii) y-குறிகாட்டி $6 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

(5) P இன் குறிகாட்டி எண்கள் $\left(4\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2}\right)$

(1) A என்ற புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் $(3, 2)$ உம் B என்ற புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் $(8, 7)$ உம் ஆகும். கீழே தரப்பட்டுள்ள விகிதங்களில் AB என்ற கோட்டை பிரிக்கும் P, Q என்ற புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்:

(i) $AP : PB = 2:3$

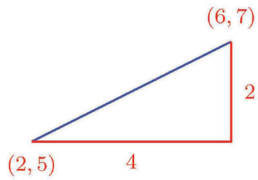
(ii) $AQ : QB = 3:2$

(2) (1, 6), (5, 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை மூன்று சமபாகங்களாக்கும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (–1, 5), (3, 7), (1, 1) என்பன ஆகும். இம்முக்கோணத்தின் முக்கோண மையத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

கோட்டுக் கணக்கு

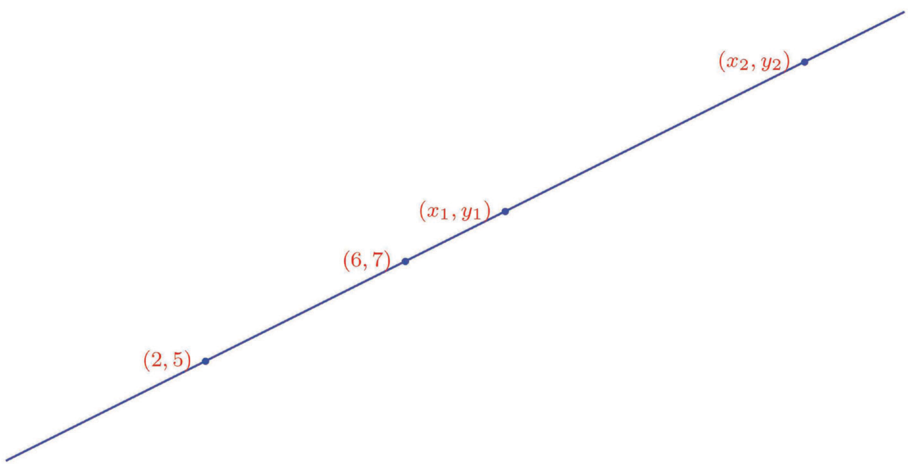
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



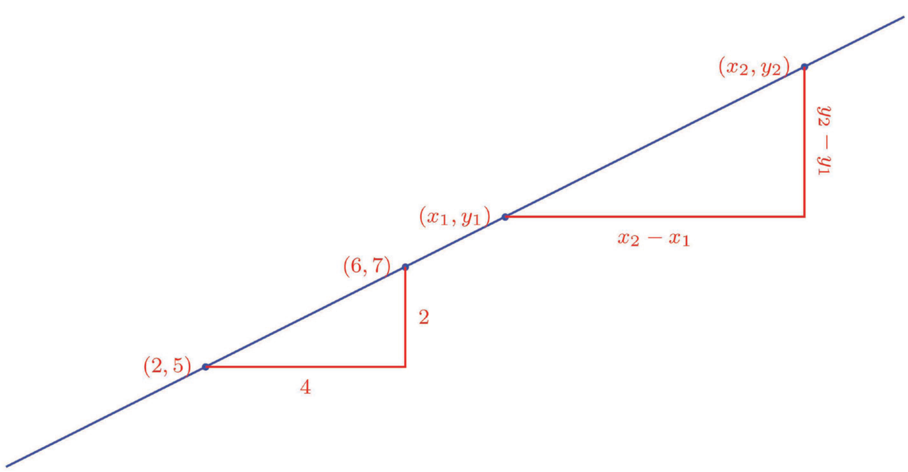
(2, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து (6, 7) என்ற புள்ளியை நோக்கி நகரும் போது x-குறிகாட்டி எண் 4 உம் y-குறிகாட்டி எண் 2 உம் அதிகரிக்கிறது.

அதாவது, x-குறிகாட்டி எண் அதிகரிப்பதன் பாதியே y-குறிகாட்டி எண் அதிகரிப்பதும்.

கோட்டை நீட்டி வரைந்து, அதில் வேறு ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் (x_1, y_1) உம் (x_2, y_2) உம் எடுத்தால் ?



(x_1, y_1) இலிருந்து (x_2, y_2) ஐ அடையும்போது குறிகாட்டி எண்களில் உருவாகும் மாற்றத்தை இவ்வாறு காணலாம்:



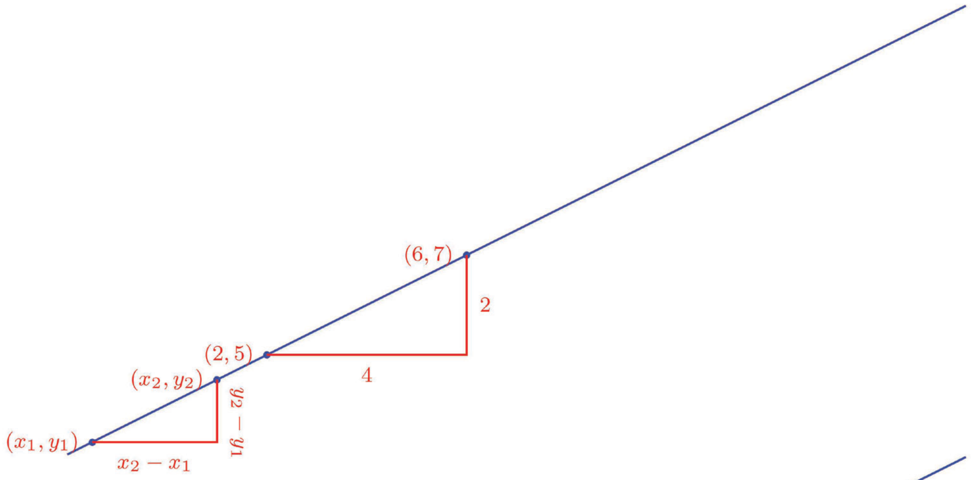
$y_2 - y_1$ க்கும் $x_2 - x_1$ க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

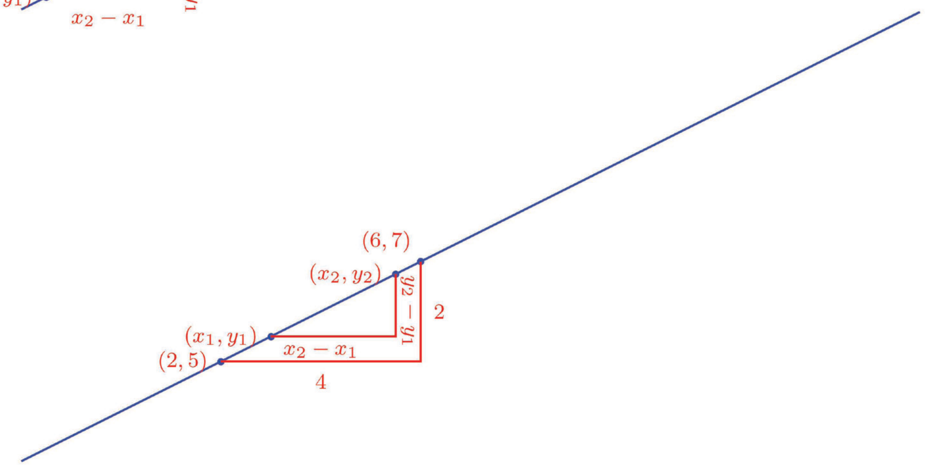
அது சிறிய செங்கோண முக்கோணத்தின் உயரத்திற்கும் அடிப்பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு அல்லவா ? (ஏன் ?).

அப்போது

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் (2, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் எங்கு ஆனாலும் இந்தத் தொடர்பு சரியாகுமல்லவா?



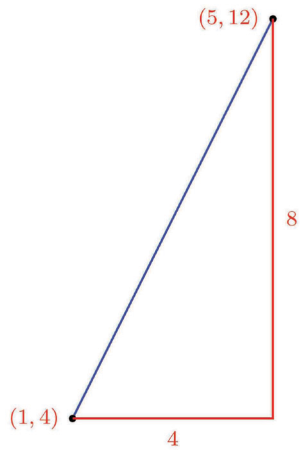


அப்போது இந்தக் கோட்டின் எந்த இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

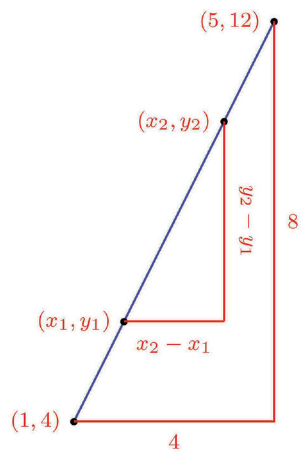
(2, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகள் இணைக்கும் கோட்டில் எந்தப் புள்ளியில் இருந்தும் வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது, y-குறிகாட்டி எண்களில் உருவாகும் மாற்றம் x-குறிகாட்டி எண்களின் மாற்றத்தின் பாதியாகும்.

(2, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகளுக்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் புள்ளிகளை எடுத்தால் ?

எடுத்துக்காட்டாக, (1,4), (5,12) என எடுத்துப்பார்க்கலாம். இவற்றை இணைக்கும் கோடு வழியாக (1,4) இல் இருந்து (5,12) ஐ அடையும் போது, x-குறிகாட்டி எண் 4 உம்; y-குறிகாட்டி எண் 8 உம் அதிகரித்தது. அதாவது, x இல் ஏற்படும் மாற்றத்தின் இருமடங்கு y இல் ஏற்படும் மாற்றம்:



இதில் வேறு ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தால் ?



பெரிய முக்கோணத்தின் உயரம், அடிப்பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கு ஆனதால், சிறிய முக்கோணத்தின் உயரமும், அதன் அடிப்பக்கத்தின் இரண்டு மடங்காக வேண்டும் அல்லவா. அப்போது,

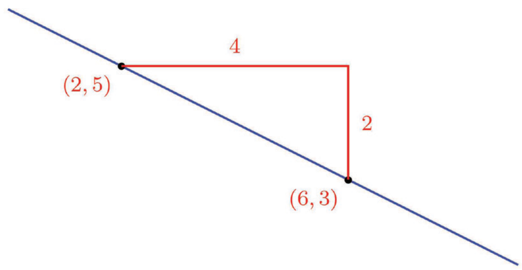
$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$$

அதாவது,

> (1, 4), (5, 12) என்பனவற்றை இணைக்கும் கோட்டில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளியில் நகரும்போது, y இல் ஏற்படும் மாற்றம், x இல் ஏற்படும் மாற்றத்தின் இரண்டு மடங்காகும்.

இந்த இரண்டு கோடுகளிலும் x அதிகரிக்கும்போது y உம் அதிகரிக்கிறது. மாறாகவும் நிகழலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, (2, 5), (6, 3) என்ற இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தால், x-குறிகாட்டி எண் 4 அதிகரிக்கும்போது y-குறிகாட்டி எண் 2 குறைகிறது.



a என்ற பெயரில் ஒரு சிலைடர் உருவாக்கவும். A என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.

(x(A) + a, y(A) + 2a) என Input Bar இல் அளித்தால் ஒரு புதிய புள்ளி கிடைக்கும். சிலைடருக்கு Animation அளித்து புள்ளியின் நகரும் பாதையை உற்றுநோக்கவும் புள்ளிக்கு Trace on அளித்துப் பார்க்கவும். A இன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

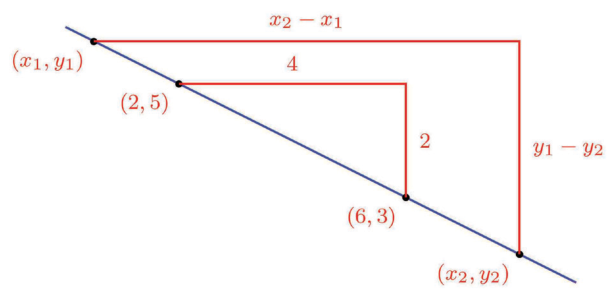
இதனை வேறொரு முறையில் கூறலாம். (2, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து (6, 3) என்ற புள்ளிக்கு நகரும் போது

x-குறிகாட்டி எண்ணில் மாற்றம் $6 - 2 = 4$

y-குறிகாட்டி எண்ணில் மாற்றம் $3 - 5 = -2$

அப்போது y-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றம், x-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றத்தை $-\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்கியதே எனக் கூறலாம்.

கோட்டின் வேறு ஏதேனும் புள்ளிகளை (x_1, y_1), (x_2, y_2) என எடுத்தால் ?



படத்தில் பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் கிடைமட்டமாக உள்ள பக்கம் $x_2 - x_1$ உம் செங்குத்தாக உள்ள பக்கம் $y_1 - y_2$ உம் அல்லவா. அப்போது

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

(x_1, y_1)இலிருந்து (x_2, y_2) ற்கு நகரும்போது

x-குறிகாட்டி எண்ணில் மாற்றம் $x_2 - x_1$

y-குறிகாட்டி எண்ணில் மாற்றம் $y_2 - y_1$

அப்போது மேலே உள்ள சமன்பாட்டை மாற்றங்களின் தொடர்பாக இவ்வாறு எழுதலாம்:

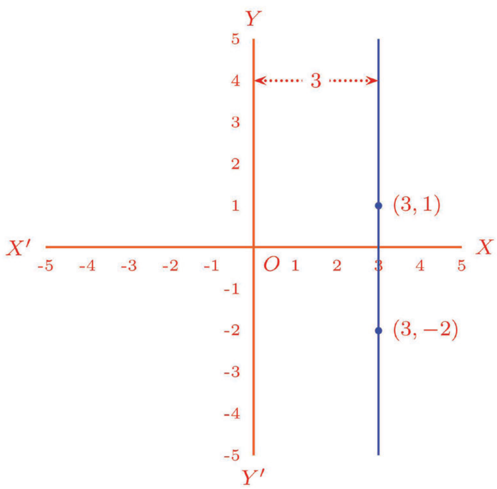
$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

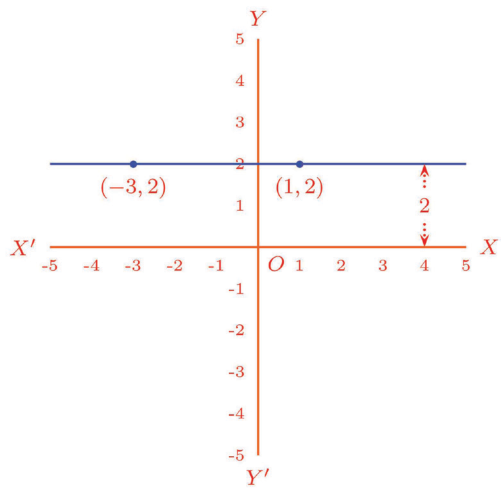
இந்த மாற்றங்களின் தொடர்பைக் குறித்து பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

> $(2, 5), (6, 3)$ இவற்றை இணைக்கின்ற கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும் போது, y இல் உள்ள மாற்றம், x இல் உள்ள மாற்றத்தை $-\frac{1}{2}$ ஆல் பெருக்கியதாகும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளிலெல்லாம், கோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும் போது x-குறிகாட்டி எண்களும் y-குறிகாட்டி எண்களும் மாறுகிறது. அவ்வாறு மாறாத கோடுகள் உள்ளனவா ?

y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோட்டிலுள்ள எல்லா புள்ளிகளினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண் சமம் அல்லவா ? மாறாக, x-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோட்டிலுள்ள எல்லா புள்ளிகளினுடையவும் y குறிகாட்டி எண்ணும் சமம் ஆகும்.





அப்போது இந்த எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து கிடைக்கின்ற பொதுக் கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

எந்த ஓர் அச்சுக்கும் இணையல்லாத ஒரு கோட்டின் எந்த இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தாலும் y-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றம், x-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

ஒரு கோட்டில் இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் தெரியுமெனில், இதைப் பயன்படுத்தி அதிலுள்ள வேறு பல புள்ளிகளினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக மேலே முதலில் செய்த கணக்கில் உள்ள கோட்டைப் பார்ப்போம். $(2,5)$, $(6,7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகளிலும் y-குறிகாட்டி எண்களிலுள்ள மாற்றம், x-குறிகாட்டி எண்களிலுள்ள மாற்றத்தின் பாதியாகும் எனப் பார்த்தோமல்லவா.

அப்போது இதில் ஒரு புள்ளியின் x-குறிகாட்டி எண்ணுடன் 2 கூட்டவும், y-குறிகாட்டி எண்ணுடன் 2 இன் பாதி 1 கூட்டவும் செய்தால், கோட்டில் வேறொரு புள்ளி கிடைக்கும். அவ்வாறு கோட்டில் $(2, 5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து கோட்டில் $(4, 6)$ என்ற புள்ளி கிடைக்கும்.

இதைப் போல் (4, 6)இல் இருந்து, கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள (6, 7) என்ற புள்ளி கிடைக்கும்.

பொதுவாகக் கூறினால் 2 உடன் 2 வீதம் கூட்டவும், 5 உடன் 1 வீதம் கூட்டவும் செய்வதைத் தொடர்ந்தால், இந்தக் கோட்டில் இவ்வாறான புள்ளிகள் கிடைக்கும்:

$$(4,6), (6,7), (8,8), \ldots$$

கூட்டுவதற்குப் பதில் கழித்தால், கோட்டில் இந்தப் புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

$$(0, 4), (-2, 3), (-4, 2), \ldots$$

இதைப்போல இந்தக் கணக்கை எவ்வாறு செய்யலாம் ?

> (4, 6), (7, 4) என்ற புள்ளிகள் இணைக்கும் கோட்டில் வேறு சில புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(4, 6) இல் இருந்து (7, 4) ற்கு நகரும்போது

x-குறிகாட்டி எண் 3 அதிகரிக்கிறது.

y-குறிகாட்டி எண் 2 குறைகிறது.

அப்போது (4, 6) இலிருந்து தொடங்கி x-குறிகாட்டி எண் 3 வீதம் கூட்டவும், y-குறிகாட்டி எண் 2 வீதம் கழிக்கவும் செய்தால் கோட்டில் பல புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

$$(7, 4), (10, 2), (13, 0), \ldots$$

x-குறிகாட்டி எண் 3 வீதம் கழிக்கவும், y-குறிக்காட்டி எண் 2 வீதம் கூட்டவும் செய்தால் கோட்டில் மற்றொரு புள்ளிகளின் கூட்டம் கிடைக்கும்.

$$(1, 8), (-2, 10), (-5, 12), \ldots$$

(1) $(-1, 4), (1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் வேறு இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(2) (1, 2), (2, 4), (3, 6) என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலாகும் என நிரூபிக்கவும். இந்தக் கோட்டின் வேறு இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ஒரு கூட்டுத்தொடராகும். $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ என்ற ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரே கோட்டில் அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

(4) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ உம் $y_1, y_2, y_3, \ldots$ உம் கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகும். $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ என்ற ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகளெல்லாம் ஒரே கோட்டில் அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

கோட்டின் சாய்வு

அச்சுகளுக்கு இணையல்லாத ஒரு கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகளை எடுத்தாலும் y-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றம், x-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கியதாகும் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்:

அச்சுகளுக்கு இணையல்லாத ஒரு கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகள் எடுத்தாலும் y-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றத்தை x- குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றத்தால் வகுத்தால் கிடைப்பது ஒரே எண்ணாகும்.

இந்த எண்ணைக் கோட்டின் சாய்வு **(Slope)** என்று கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டாக, (2, 8), (4, 9) என்ற புள்ளிகள் இணைக்கின்ற கோட்டைப் பார்க்கலாம். இதில் முதல் புள்ளியிலிருந்து இரண்டாவது புள்ளிக்கு நகரும்போது

x-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றம் $4 - 2 = 2$

y-குறிகாட்டி எண்ணிலுள்ள மாற்றம் $9 - 8 = 1$

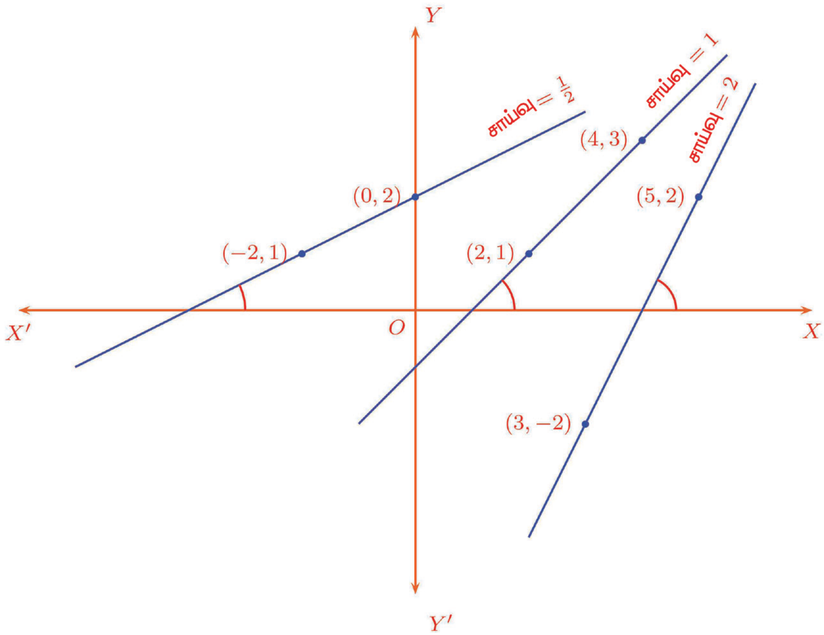
y-இல் உள்ள மாற்றத்தை x-இல் உள்ள மாற்றத்தால் வகுத்தால் கிடைக்கும் எண் $\frac{1}{2}$. அப்போது (2, 8), (4, 9) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{2}$.

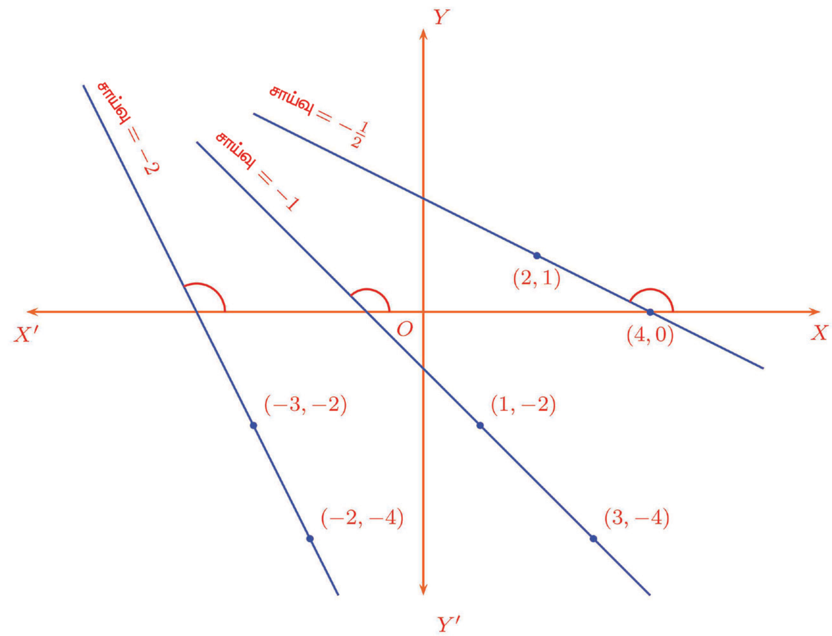
(2, 8), (4, 6) என்ற புள்ளிகள் இணைக்கும் கோடு ஆனால் ?

சாய்வு

$$\frac{6-8}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

இந்த எண்ணைக் கோட்டின் சாய்வு எனக் கூறுவதன் காரணத்தை அறிய, இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:





இரண்டு படத்திலும் சாய்வு கூடும்போது, x-அச்சிற்கு மேலே உள்ள கோட்டின் பாகத்திற்கும் x-அச்சிற்கும் இடையே உள்ள வலதுபக்கக் கோணம் கூடுவதைப் பார்த்தோம் அல்லவா ?

முதல் படத்தில் சாய்வுகள் மிகை எண்கள், கோணங்கள் செங்கோணத்தைவிடச் சிறியது, இரண்டாவது படத்தில் சாய்வுகள் குறை எண்கள், கோணங்கள் செங்கோணத்தைவிடப் பெரியது.

அப்போது, கோட்டின் சாய்வு எனக் கூறப்படும் எண் கோட்டிற்கு x-அச்சுடன் உள்ள சாய்வையே குறிப்பிடுகிறது.

கோட்டில் இரு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் தெரியுமெனில், கோட்டில் வேறு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடுகின்ற முறையைப் பார்த்தோமல்லவா. அதற்குப் பதிலாகக் கோட்டில் ஒரு புள்ளியும், கோட்டின் சாய்வும் தெரிந்தால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

> $(1, 6)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\frac{3}{4}$ ஆகும். இந்தக் கோட்டில், x-குறிகாட்டி எண் 4 ஆன புள்ளியின் y-குறிக்காட்டி எண் என்ன?

கோட்டின் சாய்வு $\frac{3}{4}$ என்பதன் பொருள், கோட்டில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது y-குறிக்காட்டி எண்ணில் உருவாகும் மாற்றம், x-குறிகாட்டி எண்ணில் உருவாகும் மாற்றத்தை $\frac{3}{4}$ ஆல் பெருக்கியது என்றல்லவா ?

கோட்டில், $(1, 6)$ இலிருந்து x-குறிகாட்டி எண் 4 ஆன புள்ளிக்கு நகரும்போது x-குறிக்காட்டி எண்ணில் மாற்றம் $4 - 1 = 3$; அப்போது y-குறிக்காட்டி எண்ணில் மாற்றம்.

$$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

y-குறிக்காட்டி எண்

$$6 + 2\frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}$$

அதாவது $\left(4, 8\frac{1}{4}\right)$ இந்தக் கோட்டில் அமையும் ஒரு புள்ளியாகும்.

ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வைக் கணக்கிட slope ஐப் பயன்படுத்திக் கோட்டில் கிளிக் செய்தால் போதும்.

இவ்வாறு x-குறிக்காட்டி எண்களுக்குப் பல எண்களை எடுத்து கோட்டில் வேறு புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா.

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வைக் கணக்கிடவும்.

(i) (2,3), (4, 5) (ii) (2,3), (4, 1) (iii) (1, 1), (−1, −1) (iv) (0, 1), (1, 0)

(2) (2, 5) என்ற புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு $-\frac{2}{3}$ ஆகும். கீழே இந்தக் கோட்டில் அமையும் வேறு இரண்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடுக.

(3) (3, 1) என்ற புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு $-\frac{1}{2}$ ஆகும். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் இந்தக் கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளா எனப் பரிசோதிக்கவும்.

(i) (5, 2) (ii) (1, 0) (iii) (4, 3) (iv) (2, −1)

(4) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனில் $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ என்ற ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனப் பார்த்தோமல்லவா. இந்தக் கோட்டின் சாய்வு கூட்டுத்தொடரின் பொது வித்தியாசம் இவற்றிற்கிடையில் உள்ள தொடர்பு என்ன ?

(5) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ உம் $y_1, y_2, y_3, \ldots$ உம் கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகும். $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ என்ற ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகளெல்லாம் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனப் பார்த்தோம். இந்தக் கோட்டின் சாய்விற்கும் கூட்டுத் தொடர்களின் பொது வித்தியாசத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

(6) (1, 3) என்ற புள்ளி வழியாக சாய்வு $\frac{1}{2}$ ஆக வரைகின்ற கோட்டிலும், இதே புள்ளி வழியாகச் சாய்வு -2 ஆக வரைகின்ற கோட்டிலும் உள்ள வேறொரு புள்ளியை எழுதவும். இந்தக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிரூபிக்கவும்.

(குறிப்பு – பிதாகரஸ் தேற்றம்)

கோட்டின் சமன்பாடு

ஒரு கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களும், கோட்டின் சாய்வும் தெரியுமெனில் கோட்டின் வேறேதேனும் புள்ளியின் x-குறிகாட்டி எண்ணிலிருந்து அந்தப் புள்ளியின் y-குறிகாட்டி எண்ணைக் கணக்கிடும் முறையைப் பார்த்தோமல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணக்கைப் பாருங்கள்:

(2, 4), என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆகும். இந்தக் கோட்டில் x-குறிக்காட்டி எண் 11 ஆன புள்ளியின் y-குறிக்காட்டி எண் எது ?

இதைச் செய்வது எவ்வாறு ?

(i) கோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது y-குறிகாட்டி எண்களில் மாற்றம் x-குறிக்காட்டி எண்களில் மாற்றத்தை $\frac{2}{3}$ ஆல் பெருக்கியதாகும்.

(ii) கோட்டின் x-குறிகாட்டி எண் 11 ஆன புள்ளியின் y-குறிக்காட்டி எண்ணை y என எடுத்தால் $(11, y)$ என்பது கோட்டின் ஒரு புள்ளியாகும்.

(iii) (2, 4) என்ற புள்ளியிலிருந்து $(11, y)$ என்ற புள்ளிக்கு உள்ள x மாற்றம் $11 - 2 = 9$,
y மாற்றம் $y - 4$

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$

(v) $y = 4 + 6 = 10$

அப்போது கோட்டில் x-குறிகாட்டி எண் 11 ஆன புள்ளியின் y-குறிக்காட்டி எண் 10.

இவ்வாறு இந்தக் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண் தெரியுமெனில் y-குறிக்காட்டி எண்ணைக் கணக்கிடலாம்.

வேறொரு முறையில் கூறினால் இந்தக் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண்ணிற்கும் y-குறிக்காட்டி எண்ணிற்கும் இடையே ஒரு தொடர்பு உள்ளது.

அதைக் கண்டுபிடிக்க கோட்டின் ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) என எடுத்து முன்பு செய்ததைப் போல கணக்கிடலாம்.

(i) கோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது y-குறிகாட்டி எண்களில் மாற்றம் x-குறிகாட்டி எண்களில் மாற்றத்தை $\frac{2}{3}$ ஆல் பெருக்கியதாகும்.

(ii) (x, y) என்பது கோட்டின் ஒரு புள்ளியாகும்.

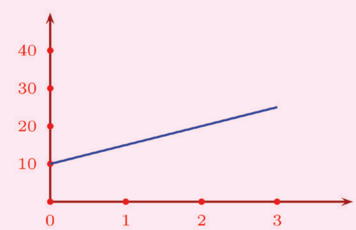
இயற்பியல், இயற்கணிதம், வடிவியல்

ஒரு பொருள் பயணிக்கும் தூரம், முதல் வினாடியில் 10 மீட்டர், அடுத்த வினாடியில் 15 மீட்டர் அதற்கு அடுத்த வினாடியில் 20 மீட்டர் என இவ்வாறு வரிசையாக அதிகரிக்கிறது எனக் கருதவும். அப்போது ஒவ்வொரு வினாடியிலும் அதன் வேகமும் மாறுகிறது அல்லவா. முதல் வினாடியில் வேகம் 10 மீட்டர்/வினாடி, இரண்டாவது வினாடியில் வேகம் 15 மீட்டர்/வினாடி என்று இவ்வாறு எழுதலாம்.

மேலும் சுருக்கமாகக் கூறினால் வேகம் ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 5 மீட்டர்/ வினாடி என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது என்று கூறலாம். இயற்பியலில் முடுக்கம் (acceleration) 5 மீட்டர்/ வினாடி என்று கூறப்படுகிறது. இந்தப் பொருளுக்கு t வினாடியில் வேகம் v ஐக் கண்டுபிடிக்க

$v = 10 + 5t$ என்ற இயற்கணிதச் செயல்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

இனிச் செங்குத்தான இரண்டு அச்சுகளில் t யையும் v யையும் அடையாளப்படுத்தி இந்த வேகத்திற்கும், நேரத்திற்கும் உள்ள தொடர்பில் படம் வரைந்தால்?



இந்தக் கோட்டின் சாய்வு 5 ஆகும். இங்குச் சாய்வு என்பது, t அதிகரித்ததைப் பொறுத்து v அதிகரிப்பதன் வீதம் அல்லவா, அதாவது முடுக்கம்.

(iii) $(2, 4)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து (x, y) என்ற புள்ளிக்குள்ள x-மாற்றம் $x-2$, y-மாற்றம் $y-4$.

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3}(x-2)$

அதாவது,

$(2, 4)$ இன் வழியாகச் செல்லும், சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆன கோட்டின் (x, y) என எந்தப்புள்ளியை எடுத்தாலும் $y - 4 = \frac{2}{3}(x-2)$

கோட்டில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களுக்கு இடையேயுள்ள இந்தத் தொடர்பைக் கோட்டின் சமன்பாடு என்று கூறுவர். அதாவது

$(2, 4)$ இன் வழியாகச் செல்லும் சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆன கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x-2)$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் பின்னங்களை நீக்கி இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா:

$$3(y-4) = 2(x-2)$$

அதாவது

$$3y - 12 = 2x - 4$$

இதை எளிதாக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்

$$2x - 3y + 8 = 0$$

அப்போது இவ்வாறும் கூறலாம்

$(2, 4)$ இன் வழியாகச் செல்லும் சாய்வு $\frac{2}{3}$ ஆன கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x - 3y + 8 = 0$$

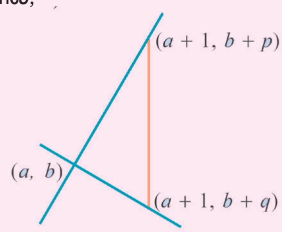
இனி இந்த வினாவைப் பார்க்கவும்.

$(-1, 2)$ உம் $(1, -2)$ உம் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$(1, 3), (5, 6)$ என்ற புள்ளிகளிலும் $(2, 5), (6, 8)$ என்ற புள்ளிகளிலும் y வித்தியாசத்தை x வித்தியாசத்தால் வகுத்துக் கிடைப்பது $\frac{3}{4}$ ஆகும். ஒவ்வொரு ஜோடியையும் இணைக்கும் கோடுகளை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும். இக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

சாய்வும் செங்குத்தும்

இணைகோடுகளின் சாய்வுகள் சமமானவை எனக் காண்பது கடினமல்ல. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளின் சாய்வுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? சரிவுகள் p, q ஆன இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சந்திக்கின்ற புள்ளியை (a, b) என எடுக்கலாம். அப்போது $(a+1, b+p)$ என்ற புள்ளி, முதலாவது கோட்டில் ஆகும்; $(a+1, b+q)$ என்ற புள்ளி இரண்டாவது கோட்டிலும் ஆகும். (காரணம்?) கோடுகள் செங்குத்து எனில்,



$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் ஆகும். இரண்டாவதும், மூன்றாவதும் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்ததே கர்ணம் ஆகும். இம் முக்கோணத்தின் செங்கோணப் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கம் $p^2 + 1$, $q^2 + 1$ என்பனவும், கர்ணத்தின் நீளம் $|p - q|$ உம் ஆனதால்

$(p^2+1) + (q^2+1) = (p-q)^2$ எனக் கிடைக்கும். இதனை எளிதாக்கினால் $2 = -2pq$

அல்லது,

$$pq = -1$$

அதாவது,

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகளில் ஒரு கோட்டின் சாய்வு மற்ற கோட்டின் சாய்வின் தலைகீழியின் குறை எண் ஆகும்.

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{2-(-2)}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

(ii) கோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேறொரு புள்ளிக்கு நகரும் போது y-குறிகாட்டி எண்களில் மாற்றம் x-குறிகாட்டி எண்களில் மாற்றத்தை -2 ஆல் பெருக்கியதாகும்.

(iii) கோட்டில் ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) என எடுக்கலாம்.

(iv) $(-1, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து (x, y) என்ற புள்ளிக்கு உள்ள x மாற்றம் $x - (-1) = x + 1$ y மாற்றம் $y - 2$.

(v) $y - 2 = -2(x + 1)$

அப்போது கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 2 = -2(x + 1)$$

இதை இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா.

$$y - 2 = -2x - 2$$

இதை எளிதாக்கினால்

$$y = -2x$$

எனவும் எழுதலாம் அல்லது

$$2x + y = 0$$

எனவும் எழுதலாம்.

ஜியோஜிப்ராவில் Input Bar இல் 2x − 3y + 8 = 0 என எழுதினால் இந்தச் சமன்பாட்டைக் குறிப்பிடும் கோடு கிடைக்கும். a, b, c என மூன்று சிலைடர்களை உருவாக்கி ax + by + c = 0 என Input Bar இல் எழுதவும். சிலைடர்களை நீக்குவதற்கு ஏற்ப கோட்டுக்கு வரும் மாற்றத்தைக் காணவும்.

பல்லுறுப்புகளும், சமன்பாடுகளும்

ஒன்பதாம் வகுப்பில் பல்லுறுப்புகளின் படங்களை வரைந்தது நினைவிருக்கிறதல்லவா. $p(x) = 2x + 1$ பல்லுறுப்பின் படம் வரைந்தது எவ்வாறு?

இப்போது அந்த முறையை இவ்வாறு கூறலாம்:

x ஆக பல எண்களை எடுத்து ஒவ்வொன்றிலும் $2x + 1$ ஆக கிடைக்கும் எண்ணைக் கணக்கிட;

இந்த எண் ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றைச் சேர்க்ககவும்,

அதாவது இவ்வாறு வரைந்த கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 2x + 1$$

பொதுவாகக் கூறினால்

$$p(x) = ax + b$$

என்ற ஒரு பல்லுறுப்பின் படமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = ax + b$$

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காணவும்.

(i) $(0, 0), (1, 1)$ (ii) $(0, 0), (1, -1)$

(iii) $(1, 0), (0, 1)$ (iv) $(-1, 0), (0, -1)$

(2) (i) $(-1, 3)$ உம் $(2, 5)$ உம் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காணவும்.

(ii) (x, y) என்ற புள்ளி இந்தக் கோட்டில் எனில் $(x + 3, y + 2)$ என்ற புள்ளியும் இந்தக் கோட்டிலேயே அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

(3) (i) $(-1, 1)$ $(2, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணவும்.

(ii) x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் $(x, 2x+3)$ என்ற புள்ளி இந்தக் கோட்டிலேயே அமையும் என நிரூபிக்கவும்.

(4) ஆதிப்புள்ளியும், $(1, 2)$ என்ற புள்ளியும் இணைக்கும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண்ணின் இரண்டு மடங்கு y-குறிகாட்டி எண் என நிரூபிக்கவும்.

(5) $(2, 0)$, $(0, 3)$ என்ற புள்ளிகள் இணைக்கும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x-குறிகாட்டி எண்ணின் பாதியையும் y-குறிகாட்டி எண்ணின் மூன்றிலொன்றையும் கூட்டினால் ஒன்று கிடைக்கும் என நிரூபிக்கவும்.

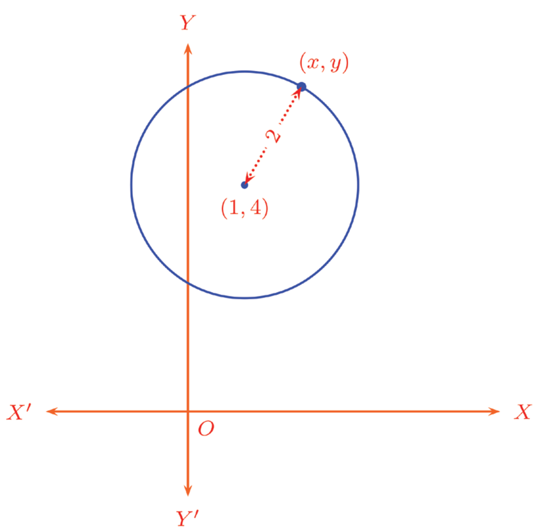
வட்டத்தின் சமன்பாடு

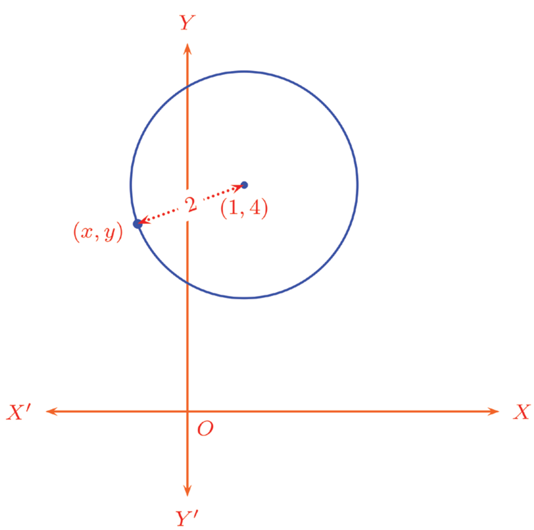
எந்த இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்து ஒரு கோடு வரையலாம், இந்தப் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் தெரியுமெனில், இந்தக் கோட்டின் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்கலாம், அதாவது கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் இயற்கணித வடிவம்.

$(3, 5)$, $(6, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு வரையவும். இந்தக் கோட்டின் சமன்பாடு Algebra view இல் காண முடியும்.

இது போல் ஒரு புள்ளியையும் ஓர் எண்ணையும் தீர்மானித்தால், புள்ளி மையமாகவும் எண் ஆரமாகவும் வட்டம் வரையலாம். மையத்தின் குறிகாட்டி எண்களும் ஆரமான எண்ணும் தெரியுமெனில், வட்டத்தில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்க இயலுமா?

எடுத்துக்காட்டாக மையம் $(1, 4)$ என்ற புள்ளியும் ஆரம் 2 உம் ஆன வட்டத்தைப் பார்க்கலாம். இந்த வட்டத்தில் எந்தப் புள்ளிக்கும் மையத்திலிருந்துள்ள தூரம் 2 ஆகும்.





$(1, 4)$ என்ற புள்ளிக்கும், (x, y) என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தின் வர்க்கம் $(x-1)^2 + (y-4)^2$ ஆகும் எனக் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா.

(x, y) என்பது வட்டத்திலுள்ள புள்ளி எனில், இந்த வர்க்கம் $2^2 = 4$ ஆகும். அதாவது

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

அப்போது வட்டத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியினுடையவும் குறிகாட்டி எண்களும் இந்தச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும். மாறாக, இந்தச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் எந்த ஜோடி எண்கள் x, y எடுத்தாலும் அவை குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிக்கு $(1, 4)$ இல் இருந்துள்ள தூரம் $\sqrt{4} = 2$ ஆக இருக்கும். அதாவது இந்தப் புள்ளி மேலே உள்ள வட்டத்தின் ஒரு புள்ளி ஆகும்.

அப்போது இதுவே மையம் $(1, 4)$ உம், ஆரம் 2 உம் ஆன வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

வேண்டுமெனில் இதை விரிவாக

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

என்றும் எழுதலாம்.

அப்போது, மையம் ஆதிப்புள்ளியும் ஆரம் 1 உம் ஆன வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

இந்த வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண் (x, y) என்று எடுத்தால், மையத்திலிருந்துள்ள தூரத்தின் வர்க்கம் $x^2 + y^2$; இது ஆரத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமம்

$$x^2 + y^2 = 1$$

இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடு.

(1) ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 உம் ஆன வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இந்த வட்டத்தில் உள்ள எட்டு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எழுதுக.

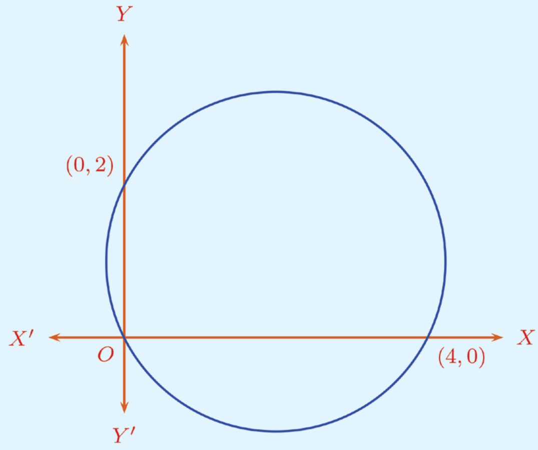
(2) $(2, 3), (4, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) இந்த வட்டத்தின் மையத்தின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை ?

(ii) வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

(iii) வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

(3) படத்தில் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

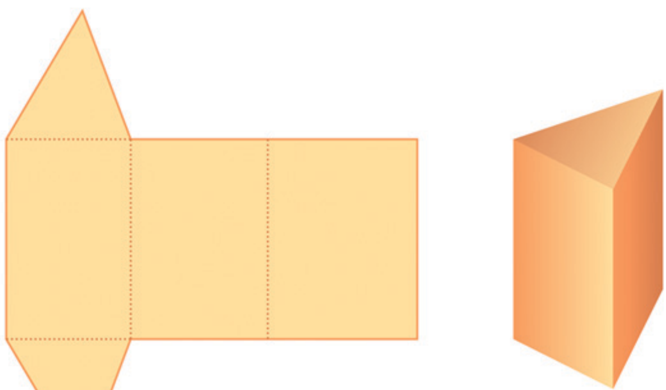


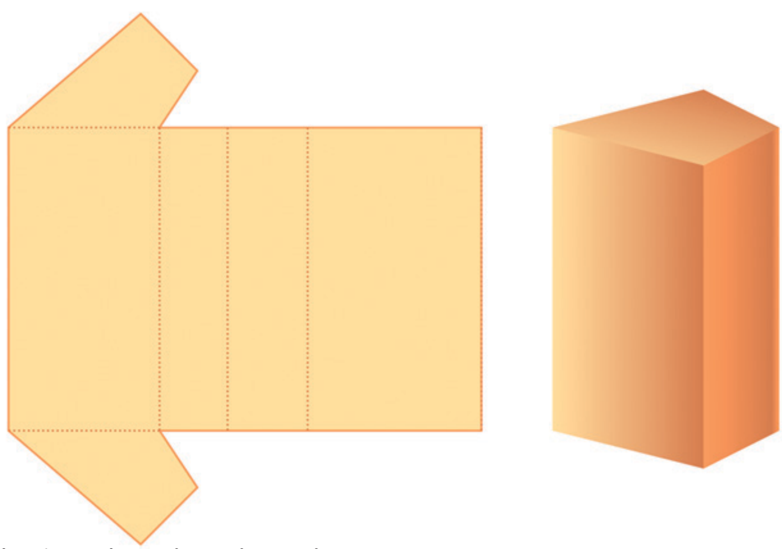
(4) ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ ஆகும். இதன் மையத்தின் குறிகாட்டி எண்களையும் ஆரத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

12 கனவடிவங்கள்

கூம்புகள்

பலமுறைகளில் காகிதத்தை வெட்டி எடுத்து, மடித்து ஒட்டிப் பட்டகங்கள் உருவாக்கலாம்:

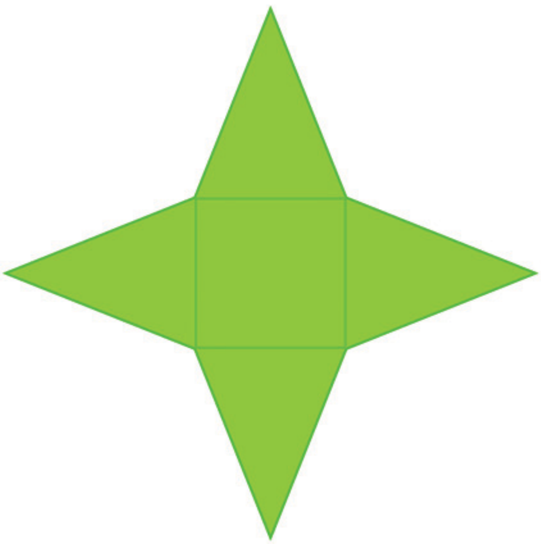




இவ்வகைப் பட்டகங்களைப் பற்றிப் படிக்கவும் செய்தோம்.

இனி வேறொரு வடிவத்தை உருவாக்கிப் பார்க்கலாம்.

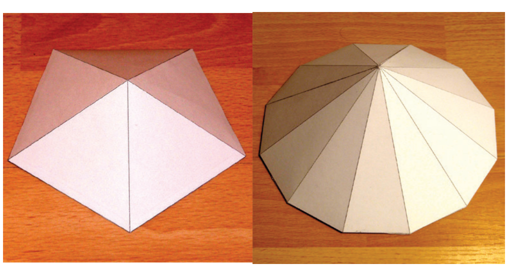
முதலில் கீழ்க் காண்பது போன்று ஒரு படம் காகிதத்தில் வெட்டி எடுக்கவும்:



கூம்புகள் ஜியோஜிப்ராவில்

ஜியோஜிப்ராவில் பட்டகங்கள் உருவாக்குவது எவ்வாறு என 9-ஆம் வகுப்பில் கண்டோம் அல்லவா? இத்தகைய கூம்புகளை உருவாக்குவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். உருவாக்குதல் தொடங்கும் முன்பு Options → Labeling → No new objects தேர்வு செய்யவும். இது பெயர்களை எழுதி காண்பிப்பதை தவிர்ப்பதற்ககாகவே Graphics இல் ஒரு சதுரம் வரையவும். 3D Graphics திறந்து Extrude to Pyramid பயன்படுத்திச் செவ்வகத் தில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கூம்பின் உயரத்தைக் கொடுக்கவும். (ஒரு சிலைடர் உருவாக்கி உயரமாகச் சிலைடரின் பெயரை அளிக்கவும் செய்யலாம்).

நடுவில் சதுரம், அதனைச் சுற்றி நான்கு முக்கோணங்கள்; இவை நான்கும் ஒரே போல் உள்ள (சமமான) இருசமபக்க முக்கோணங்களாக இருக்க வேண்டும். இனி இவற்றைக் கீழே காண்பித்திருப்பதைப் போன்று மடித்து ஒட்டவும்:

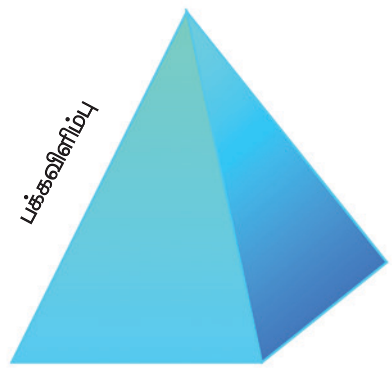


இது என்ன வடிவம்? பட்டகம் எனக் கூற இயலாது; பட்டகங்களுக்கு ஒரேபோல் உள்ள இரு அடிப்பக்கங்களும், பக்கங்களில் செவ்வகங்களும் வேண்டும். இப்போது உருவாக்கின வடிவத்திலோ, கீழே அடிப்பக்கம் சதுரம், மேலே ஓர் உச்சி; சுற்றிலும் முக்கோணங்கள்.

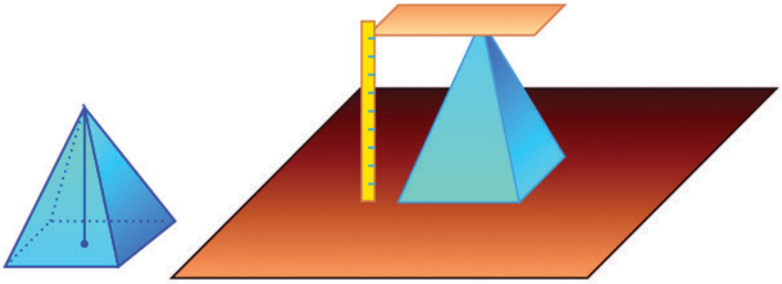
சதுரத்திற்குப் பதிலாக, வேறு ஏதேனும் செவ்வகம் ஆகலாம்; இல்லாவிடில் முக்கோணமோ, வேறு ஏதேனும் பலகோணமோ ஆகலாம். சோதித்துப் பார்க்கவும். (அடிப்பக்கம் ஒழுங்கு பலகோணம் ஆகும் போதுதான் அழகு).

இத்தகைய வடிவங்கள் அனைத்திற்கும் பொதுவான பெயரே **கூம்புகள் (pyramids)**.

கூம்பின் அடிப்பக்கமான பலகோணத்தின் பக்கங்களைக் கூம்புகளின் அடிப்பக்கவிளிம்புகள் (base edges) என்றும், முக்கோணங்களின் பிற பக்கங்களைப் பக்க விளிம்புகள் (lateral edges) என்றும் கூறலாம். கூம்பின் மேல்முனையைக் கூம்பின் உச்சி (apex) என்றும் கூறுவர்.



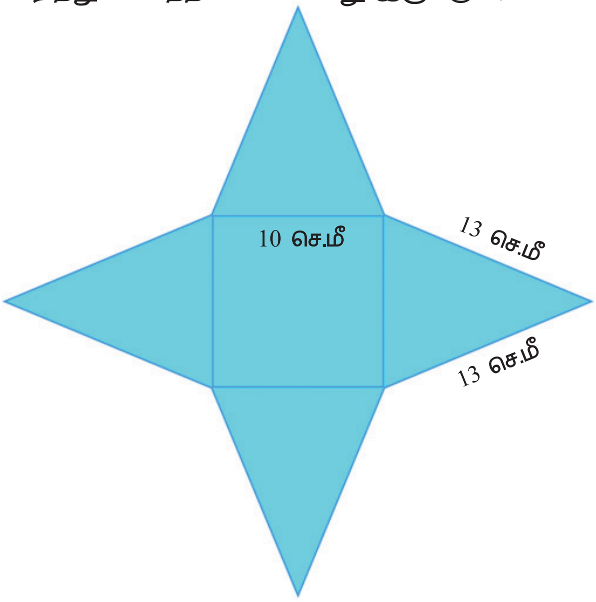
ஒரு பட்டகத்தின் உயரம் என்பது, அதன் அடிப்பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் அல்லவா. ஒரு கூம்பின் உயரம் என்பது அதன் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் ஆகும்.



பரப்பளவு

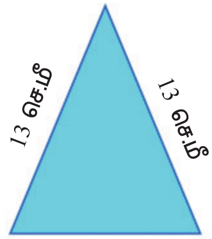
அடிப்பக்க விளிம்புகள் 10 சென்டிமீட்டரும், பக்கவிளிம்புகள் 13 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

மொத்தப்பரப்பளவு என்றால், இது உருவாக்குவதற்குத் தேவையான காகிதத்தின் பரப்பளவு அல்லவா? இந்தக் கூம்பை வெட்டி விரித்து வைத்தால் எவ்வாறு இருக்கும்?

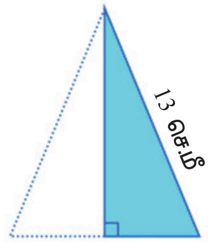


ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கிய ஒரு கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்தி வைப்பது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம். முன்பு கூறியது போன்று 3D Graphics இல் ஒரு கூம்பை உருவாக்கவும். Net ஐப் பயன்படுத்தி இந்தக் கூம்பில் கிளிக் செய்யும்போது கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்தி வைத்த வடிவம் கிடைக்கும். (இது கூம்பின் net என அழைக்கப்படுகிறது.) இதனுடன் Graphics இல் ஒரு சிலைடரும் கிடைக்கும். இந்தச் சிலைடரைப் பயன்படுத்தி, net இல் இருந்து கூம்பு உருவாவது எவ்வாறு எனக் காணலாம். Algebra இல் கூம்பின் பெயருக்கு நேராகக் கிளிக் செய்து கூம்பை மறைத்தும் வைக்கலாம்.

இதில் சதுரத்தின் பரப்பளவு 100 சதுர சென்டிமீட்டர் என்று விரைவில் கூறலாம். முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ?



முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அடிப்பக்கம், உயரம் என்பனவற்றின் பெருக்கற் பலனின் பாதி அல்லவா.



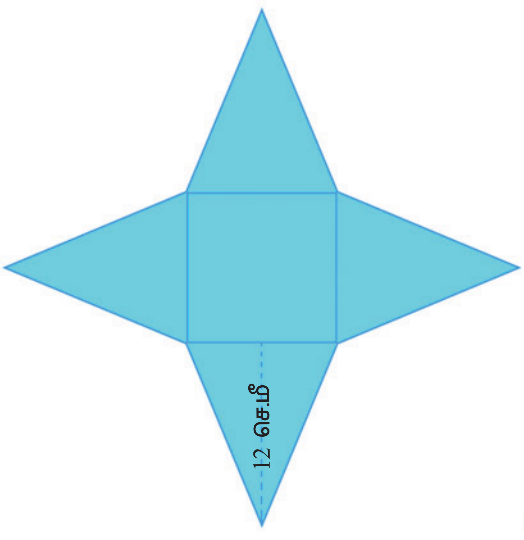
அதைக் கணக்கிடுவதற்கு முக்கோணத்தின் உயரமும் வேண்டும். இருசமபக்க முக்கோணம் ஆனதால், இந்தச் செங்குத்துக்கோடு அடிப்பக்கத்தைச் சமபாகம் செய்யும். பிராகரஸ் தேற்றம் பயன்படுத்திச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

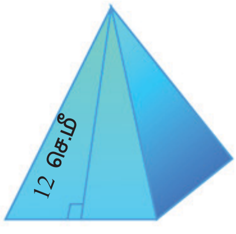
$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ சென்டி மீட்டர்}$$

எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். அப்போது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, $5 \times 12 = 60$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

இனி கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவைக் கணக்கீடு செய்யலாமல்லவா.

காகிதம் கூம்பாக மாறிய பின், இப்போது கண்டுபிடித்த உயரம் என்னவாகும்?

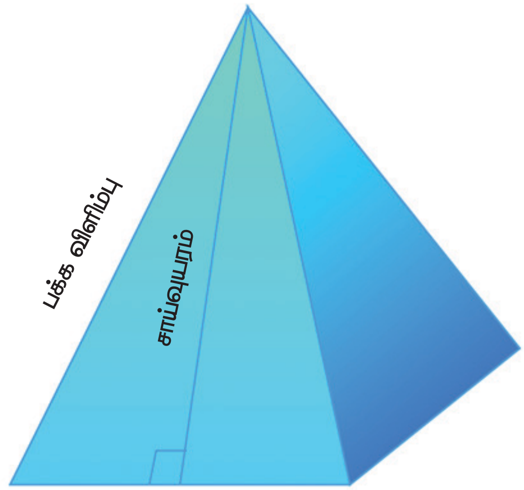




ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு சதுரக்கூம்பு வரையவும் Midpoint or Centre பயன்படுத்திக் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் மையப் புள்ளியையும் அடிப்பக்கத்தின் மூலைவிட்டத்தின் மையப் புள்ளியையும் அடையாளப்படுத்தவும். Segment பயன்படுத்திக் கூம்பின் உயரம், சாய்வுயரம் என்பனவற்றை அடையாளப்படுத்தலாம்.Polygon பயன் படுத்தி உயரம், சாய்வுயரம், பக்கவிளிம்பு, அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதி ஆகியன பக்கங்களாக வருகின்ற செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும். Net பயன்படுத்திக் கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்திப் பார்க்கவும். கூம்பை மறைத்து வைக்கவும் செய்யலாம்.

இந்த நீளத்தைக் கூம்பின் சாய்வுயரம் **(slant height)** என்று கூறுவர்.

இப்போது செய்த கணக்கில் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பு, பக்கவிளிம்பு, சாய்வுயரம் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டோம் அல்லவா; படத்தில் காண்பித்திருப்பதைப் போல உள்ள ஒரு செங்கோண முக்கோணம், சதுரக்கூம்பின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உள்ளது. இவற்றின் சாய்வுயரமும், அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதியும், செங்கோணப் பக்கங்கள்; கர்ணம் பக்க விளிம்பும் ஆகும்.

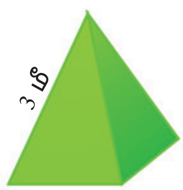


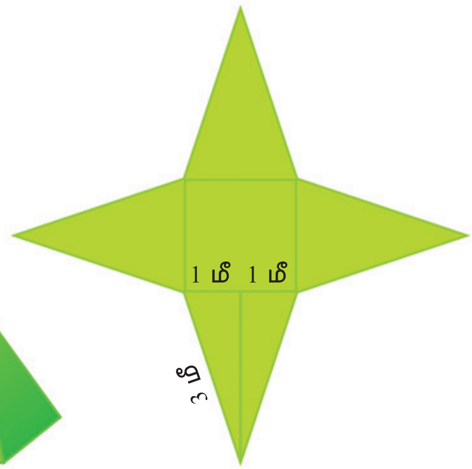
இனி இந்தக் கணக்கைச் செய்யலாம் அல்லவா?

அடிப்பக்க விளிம்புகள் 2 மீட்டரும், பக்கவிளிம்புகள் 3 மீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு, 4 சதுரமீட்டர். பக்க முகங்களின் பரப்பளவு காண்பதற்குச் சாய்வுயரம் தேவை. முன்பு கூறிய செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் அதாவது அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதி 1 மீட்டர். கர்ணம், பக்கவிளிம்பான 3 மீட்டர். அதனால் சாய்வுயரம்

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ மீட்டர்}$$





இதைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும்,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ சதுரமீட்டர்}$$

எனக் காணலாம் அப்போது கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு, $4 + (4 \times 2\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2}$ சதுரமீட்டர்.

இதில் திருப்தி இல்லையெனில் கணிப்பானைப் பயன்படுத்தி (அல்லது $\sqrt{2}$ இன் தோராய மதிப்புள்ள தசம எண்ணை நினைவுபடுத்தி), இது தோராயமாக 15.31 சதுரமீட்டர் என்று கண்டுபிடிக்கலாம்.

(1) எல்லாப் பக்கங்களும் 5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு சதுரம்; ஒரு பக்கம் 5 சென்டிமீட்டரும் அதிலிருந்து எதிர்உச்சிக்கு உள்ள உயரம் 8 சென்டிமீட்டரும் உடைய நான்கு இருசமபக்க முக்கோணங்கள்; இவற்றைச் சேர்த்து வைத்து ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்கவும். அதற்கு எத்தனை சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை?

(2) சதுரக்கூம்பு வடிவில் உள்ள ஒரு விளையாட்டுப் பொருளின் அடிப்பக்க விளிம்பு 16 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 10 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இத்தகைய 500 விளையாட்டுப் பொருட்களுக்கு நிறம் தீட்டுவதற்குச் சதுரமீட்டருக்கு 80 ரூபாய் வீதம் எவ்வளவு செலவாகும்?

(3) ஒரு சதுரக்கூம்பின் பக்கமுகங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும். அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம் 30 சென்டிமீட்டர். அதன் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு ?

(4) ஒரு சதுரக்கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 40 சென்டிமீட்டரும், விளிம்புகளின் மொத்த நீளம் 92 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(5) பக்கமுகப் பரப்பளவு, அடிப்பக்கப் பரப்பளவிற்குச் சமமான சதுரக்கூம்பை உருவாக்க இயலுமா?

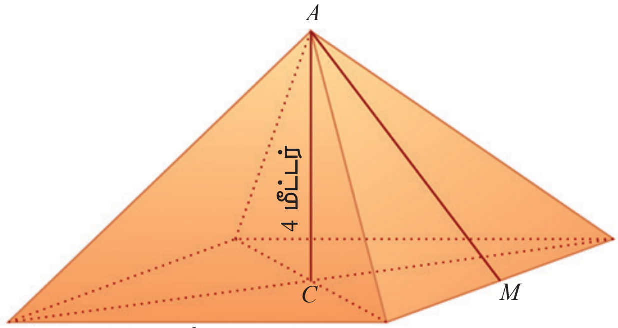
உயரமும் சாய்வுயரமும்

கூம்புகளின் அளவுகளில் பலவேளைகளில் உயரம் மிக முக்கியமாகும். இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

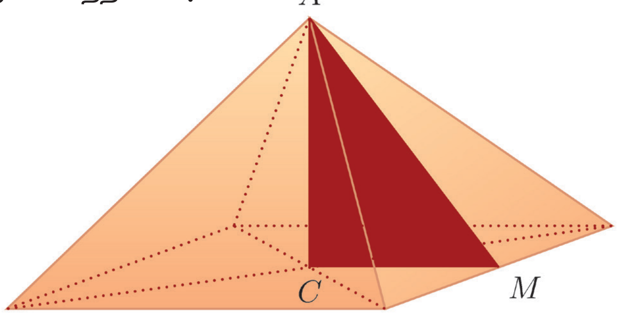
சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தில் ஒரு கூடாரம் அமைக்க வேண்டும். அடிப்பக்க நீளம் 6 மீட்டரும் கூடாரத்தின் உயரம் 4 மீட்டரும் இருக்க வேண்டும். இதனை அமைப்பதற்கு எத்தனை சதுரமீட்டர் கித்தான் தேவை?

கூடாரத்தின் பக்கங்களான முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்குச் சாய்வுயரம் தேவை அல்லவா? தரப்பட்டுள்ள விவரங்களைப் பயன்படுத்தி, அதனை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம் ?

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



நமக்குத் தேவையான சாய்வுயரம் AM ஆகும். CM ஐ இணைத்தால், AM கர்ணம் ஆன ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா? அதில் CM இன் நீளம் எத்தனை?



எகிப்தின் பிரமிடுகள்

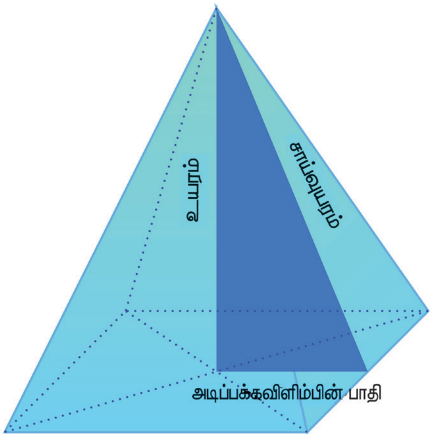
பிரமிடு எனக்கூறும் போது, மனதில் தோன்றும் வடிவம் எகிப்தின் பிரமிடுகளே. எகிப்தின் பல்வேறு பகுதிகளிலிருந்து 138 பிரமிடுகளைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். ஏறக்குறைய BCE இரண்டாயிரத்தில் இவற்றில் பல கட்டப்பட்டுள்ளன.

படத்திலிருந்து $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ மீட்டர் எனக் கணக்கிடலாம்.

அப்போது கூடாரம் அமைப்பதற்கு, ஒரு பக்க நீளம் 6 மீட்டரும், அதிலிருந்துள்ள உயரம் 5 மீட்டரும் உடைய நான்கு இரு சமப்பக்க முக்கோணங்கள் வேண்டும்.

இவற்றின் மொத்தப் பரப்பளவு, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ சதுரமீட்டர் அல்லவா. இவ்வளவு கித்தான் கூடாரம் அமைப்பதற்குத் தேவைப்படுகிறது.

இந்தக் கணக்கில் கண்ட கருத்து எல்லாச் சதுரக்கூம்புகளுக்கும் பொருந்துகிறது அல்லவா. எந்த சதுரக்கூம்பின் உள்ளேயும், சாய்வுயரம் கர்ணம் ஆன ஒரு செங்கோண முக்கோணம் உண்டு என ஊகிக்கலாம். கூம்பின் உயரமும், அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதியும் அதன் செங்குத்துப் பக்கங்கள் ஆகும்.

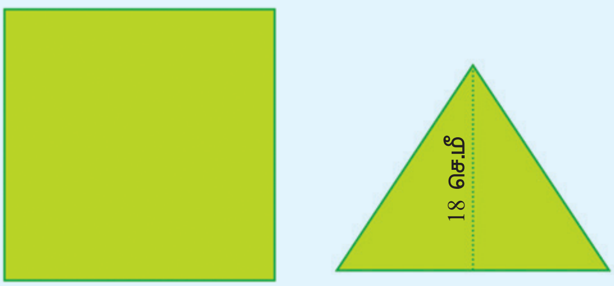


பெரிய பிரமிடு

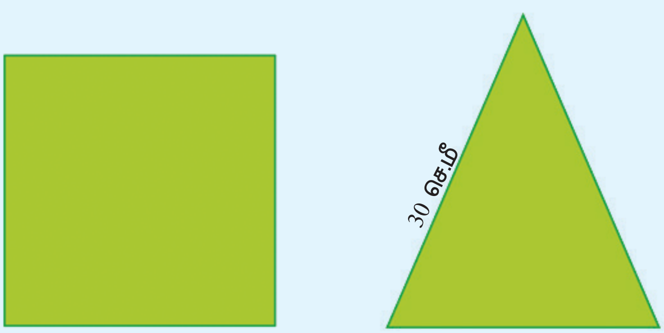
எகிப்தில், கிஸாவில் உள்ள பெரிய பிரமிடே (Great Pyramid of Giza) மிகப் பெரிய பிரமிடு. இதன் அடிப்பக்கமான சதுரத்திற்கு ஏறக்குறைய அரை இலட்சம் சதுரமீட்டர் பரப்பளவு உள்ளது. உயரம் ஏறக்குறைய 140 மீட்டர். இதனைக் கட்டுவதற்கு இருபது ஆண்டு கள்வரை தேவைப்பட்டிருக்கும் என்று கணக்கிடப் ட்டுள்ளது

சரியான சதுரத்திலிருந்து தொடங்கி, பூதாகார மான கற்களால் மேல்நோக்கிக் கட்டியெழுப்பி, ஒரு புள்ளியில் முடிகின்ற இந்த ஆடம்பரக் கல்லறைகள், மனித உழைப்பு, கட்டுமானக் கலை, கணித அறிவு ஆகியவற்றின் குறியீடுகளாக உயர்ந்து நிற்கின்றன.

(1) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளில் ஒரு சதுரத்தையும், நான்கு முக்கோணங்களையும் பயன்படுத்திச் சதுரக் கூம்பு உருவாக்கப்பட்டது.
கூம்பின் உயரம் எவ்வளவு?



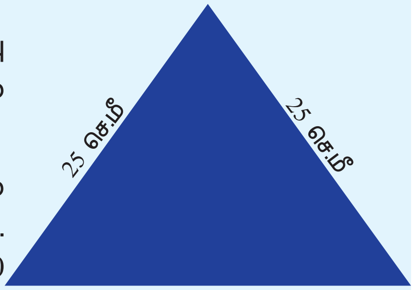
சதுரமும் முக்கோணங்களும் இவ்வாறெனில்?



(2) காகிதத்தை வெட்டி ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்க வேண்டும். அடிப்பக்க விளிம்பு 10 சென்டிமீட்டராகவும், உயரம் 12 சென்டிமீட்டராகவும் இருக்கவேண்டும். முக்கோணங்களின் அளவுகள் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

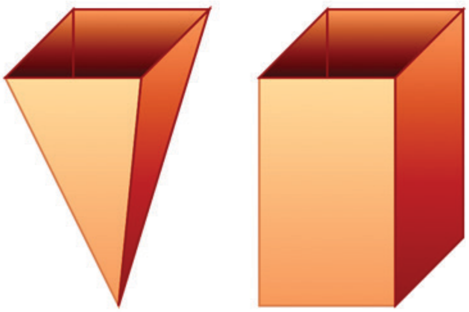
(3) எந்தச் சதுரக்கூம்பிலும் உயரம், சாய்வுயரம், பக்கவிளிம்பு ஆகியவற்றின் வர்க்கங்கள் ஒரு கூட்டுத்தொடரில் ஆகும் என நிறுவுக.

(4) படத்தில் தரப்பட்டிருக்கும் இருசமபக்கமுக்கோணம் பக்கங்களாக உள்ள சதுரக்கூம்பை உருவாக்க வேண்டும். அதன் உயரம் எவ்வளவாக இருக்கும்? அடிப்பக்கம் 30 சென்டிமீட்டருக்குப் பதிலாக 40 சென்டிமீட்டர் ஆனால்?



சமமான எந்த நான்கு இரு சமப்பக்க முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தியும் சதுரக்கூம்பு உருவாக்க இயலுமா?

கூம்பின் கனஅளவு



எந்தப் பட்டகத்தினுடையவும் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனே அதன் கன அளவு எனக் கண்டோம் அல்லவா. ஒரு கூம்பின் கனஅளவோ?

ஒரு சதுரக்கூம்பு எடுக்கலாம். முதலில் ஒரு செய்முறைப் பயிற்சியை மேற்கொள்வோம். கட்டியான அட்டையைப் பயன்படுத்தி, ஒரு திறந்த சதுரக்கூம்பு உருவாக்கவும். இனி இதே அடிப்பக்கமும் உயரமும் உள்ள ஒரு திறந்த சதுரப்பட்டகமும் உருவாக்கவும்.

கூம்பில் மணல் நிறைத்து, பட்டகத்தினுள் போடவும். மணல் நிரம்பிய பகுதியின் உயரம் பட்டகத்தின் உயரத்தின் எத்தனை பாகம் ஆகும் என அளந்து பார்க்கவும். மூன்றில் ஒன்று அல்லவா? பட்டகம் நிறைவதற்கு எத்தனை முறை இதைப் போன்று கூம்பில் மணல் எடுக்க வேண்டும்?

அப்போது பட்டகத்தின் கனஅளவு, கூம்பின் கனஅளவின் மூன்று மடங்கு ஆகும் எனக் காணலாம். (இதன் கணிதம் சார்ந்த விளக்கம் பாடத்தின் இறுதிப்பகுதியில் தரப்பட்டுள்ளது)

பட்டகத்தின் கனஅளவு, அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டுள்ளோம்.

அப்போது சதுரக்கூம்பின் கனஅளவைக் குறித்து என்ன கூறலாம்?

கூம்புக் கன அளவு

ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் உள்ள ஒரு சதுரக் கூம்பையும், சதுரப் பட்டகத்தையும் ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கவும். இதை விரைவாகப் பகுத்தறிய உள்ளே இருக்கும் கூம்பின் நிறத்தை மாற்றிக் கொடுப்பதுடன் Opacity 100 ஆக்கவும் செய்தால் போதும் (Object properties → Color) Volume பயன்படுத்திக் கூம்பு. பட்டகம் ஆகியவற்றின் கன அளவைக் கணக்கிடுக. இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? இவற்றின் அடிப்பக்கமும் உயரமும் மாற்றினால்?

சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு என்பது, அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனின் மூன்றிலொன்று ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்க விளிம்புகள் 10 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 8 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ கனசென்டிமீட்டர் ஆகும்

உலோகத்தால் ஆன ஒரு கன சதுரக்கட்டையின் ஒரு விளிம்பின் நீளம் 15 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இதனை உருக்கி 25 சென்டிமீட்டர் அடிப்பக்க விளிம்பு உள்ள ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்கினால், அதன் உயரம் எவ்வளவு?

கன சதுரக்கட்டையின் கனஅளவு 15^3 கனசென்டிமீட்டர்.

உருக்கி உருவாக்குகின்ற சதுரக்கூம்பின் கனஅளவும் இதுவே ஆகும். அடிப்பக்கப் பரப்பளவை உயரத்தின் மூன்றிலொன்றால் பெருக்கியதல்லவா கூம்பின் கன அளவு.

தரப்பட்டுள்ள கணக்கில், கூம்பின் அடிப்பக்கப்பரப்பளவு 25^2 சதுரமீட்டர் ஆனதால், உயரத்தின் மூன்றிலொன்று $\frac{15^3}{25^2}$ எனவும், அதிலிருந்து உயரம்

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

எனவும் காணலாம்.

(1) அடிப்பக்க விளிம்பு 10 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 15 சென்டிமீட்டரும் ஆன சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு?

(2) இரு சதுரக் கூம்புகளின் கனஅளவுகள் சமம் ஆகும். முதல் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளத்தின் பாதி, இரண்டாவது கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம். முதல் கூம்பின் உயரத்தின் எத்தனை மடங்கு இரண்டாவது கூம்பின் உயரம் ?

(3) இரு சதுரக்கூம்புகளின் அடிப்பக்க விளிம்புகள் 1 : 2 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் உயரங்கள் 1 : 3 என்ற விகிதத்திலும் ஆகும். முதல் கூம்பின் கனஅளவு 180 கன சென்டிமீட்டர் ஆகும். இரண்டாவது கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு ?

(4) எல்லா விளிம்புகளும் சமமான ஒரு சதுரக்கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம் 18 சென்டிமீட்டர் ஆகும். கூம்பின் கனஅளவைக் கணக்கிடுக.

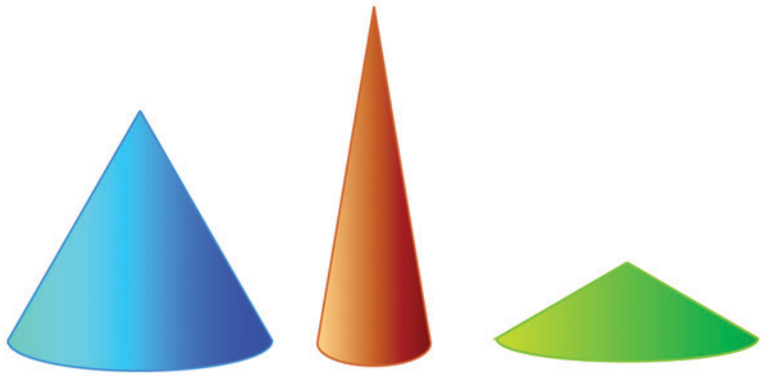
(5) ஒரு சதுரக்கூம்பின் சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் மொத்தப்பரப்பளவு 896 சதுரசென்டிமீட்டரும் ஆகும். கூம்பின் கனஅளவைக் கணக்கிடுக.

(6) எல்லா விளிம்புகளும் சம நீளமுள்ள ஒரு சதுரக்கூம்பின் உயரம் 12 சென்டி மீட்டர் ஆகும். அதன் கனஅளவு எவ்வளவு ?

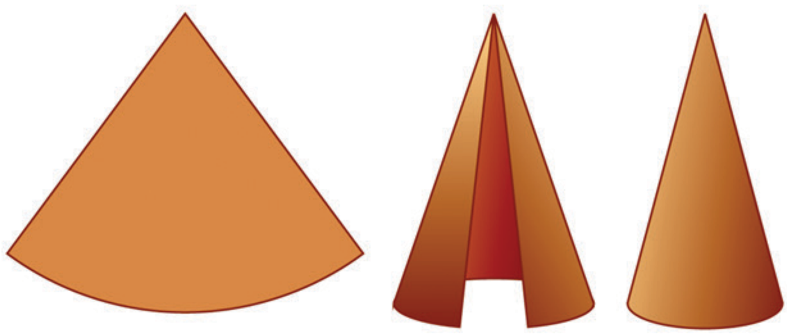
(7) அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 64 சென்டிமீட்டரும் கனஅளவு 1280 கன சென்டி மீட்டரும் உடைய சதுரக்கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

வட்டக்கூம்பு

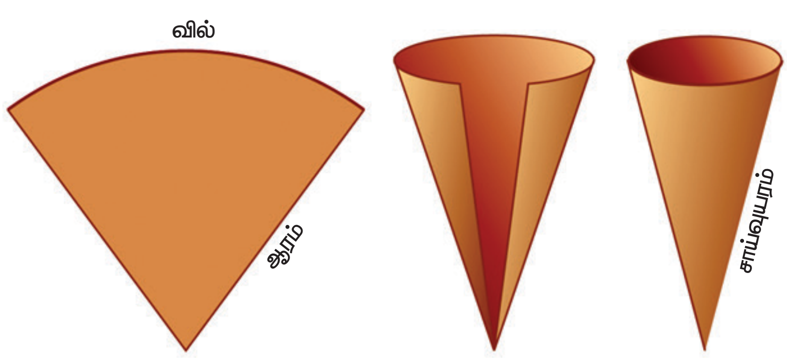
உருளையைப் போன்று அடிப்பக்கம் வட்டமான கூம்புகள் உள்ளன.



இவற்றை **வட்டக்கூம்புகள் (cones)** என்று கூறுகிறோம். செவ்வகத்தை வளைத்து உருளை உருவாக்கியது போன்று. ஒரு வட்டப்பகுதியை வளைத்து வட்டக்கூம்பை உருவாக்கலாம். (மூடிய கூம்பு உருவாக்க வேண்டுமெனில் வேறு ஒரு சிறிய வட்டமும் தேவை)



இதில் வளைக்கும் வட்டப்பகுதியின் அளவுகளுக்கும், உருவாக்கிய வட்டக்கூம்பின் அளவுகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?



வட்டக்கூம்பு

சதுரக்கூம்பைப் போன்று வட்டக் கூம்பையும் ஜியோ ஜிப்ரா வில் வரையலாம். Graphics இல் ஒரு வட்டம் வரைந்து 3D Graphics இல் Extrude to Pyramid or Cone பயன்படுத்தி வட்டக்கூம்பு வரையலாம். தேவையெனில் ஆரமும் உயரமும் மாற்று வதற்குச் சிலைடர்களைப் பயன் படுத்தலாம்.

வட்டப்பகுதியின் ஆரம், கூம்பின் சாய்வுயரம் ஆகும். வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவும் ஆகும்.

பெரும்பாலும் வட்டப்பகுதியின் அளவு மையக்கோணத்தின் அடிப்படையில் கூறப்படுகிறது. இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு வட்டத்திலிருந்து $45°$ மையக்கோணம் உள்ள வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுத்து, அதை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் சாய்வுயரமும் அடிப்பக்கத்தின் ஆரமும் எவ்வளவு?

கூம்பின் சாய்வுயரம், வட்டத்தின் ஆரமான 12 சென்டிமீட்டர் தான். அடிப்பக்கத்தின் ஆரம்?

$45°$ என்பது, $360°$ இன் $\frac{1}{8}$ பாகம் அல்லவா. வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், மையக்கோணத்திற்கு விகித சமத்திலாகும். அப்போது இந்த வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{8}$ பாகம் ஆகும். இந்த வில்லே கூம்பின் அடிப்பக்க வட்டம். அதாவது, கூம்பின் அடிப்பக்க வட்டத்தின் சுற்றளவு, வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுத்த பெரிய வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் ஆகும். ஆரங்கள், சுற்றளவுகளுக்கு விகித சமம் ஆனதால், சிறிய வட்டத்தின் ஆரம், பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகமே ஆகும். அதாவது கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம்

$$12 \times \frac{1}{8} = 1.5 \text{ சென்டிமீட்டர்..}$$

மாறாக ஒரு வினா ஆனால்?

அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 5 சென்டி மீட்டரும், சாய்வுயரம் 15 சென்டி மீட்டருமான ஒரு வட்டக்கூம்பை உருவாக்குவது எவ்வாறு?

வட்டக்கூம்பு உருவாக்குவதற்கு வட்டப்பகுதி தேவை. சாய்வுயரத்திற்கு 15 சென்டி மீட்டர் தேவை என்பதால், 15 சென்டி மீட்டர் ஆரம் உள்ள வட்டத்திலிருந்தே வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுக்க வேண்டும். அதன் மையக்கோணம் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

கூம்பின் அடிப்பக்கமான சிறிய வட்டத்தின் ஆரம். வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுக்கின்ற பெரியவட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ பாகம் அல்லவா. (அது எவ்வாறு?) அப்போது சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு. பெரியவட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும். சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் அல்லவா. அப்போது வட்டப்பகுதியின் வில் அது வெட்டியெடுத்த வட்டத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும். ஆகவே, அதன் மையக்கோணம் $360° \times \frac{1}{3} = 120°$.

(1) ஆரம் 10 சென்டிமீட்டரும், மையக்கோணம் $60°$ உம் உள்ள வட்டப்பகுதியை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரமும் சாய்வுயரமும் எவ்வளவு ?

(2) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 10 சென்டிமீட்டரும் சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் உடைய வட்டக்கூம்பு உருவாக்குவதற்குத் தேவையான வட்டப்பகுதியின் மையக்கோணம் என்ன ?

(3) ஓர் அரைவட்டத்தை வளைத்து உருவாக்குகின்ற வட்டக்கூம்பின் ஆரத்திற்கும் சாய்வுயரத்திற்கும் இடையில் உள்ள விகிதம் என்ன?

வளைதளப் பரப்பளவு

உருளையில் உள்ளதைப் போன்று, வட்டக்கூம்பிற்கும் ஒரு வளைதளம் உள்ளது.அது சரிந்து உயர்கின்ற பாகம் ஆகும். வட்டக்கூம்பு வளைத்து உருவாக்குவதற்குப் பயன்படுத்திய வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவே இந்த வளைதளத்தின் பரப்பளவு (உருளையிலும், அதன் வளைதளம் வளைத்து உருவாக்கப் பயன்படுத்திய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அல்லவா, வளைதளப்பரப்பளவு)

> ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கிய வட்டக்கூம்பின் வளைதளப்பரப்பளவு Algebra இல் Surface என்பதில் காணலாம்.

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

ஆரம் 8 சென்டிமீட்டரும் சாய்வுயரம் 30 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பு வடிவில் ஒரு தொப்பி செய்வதற்கு எத்தனை சதுரசென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவைப்படும் ?

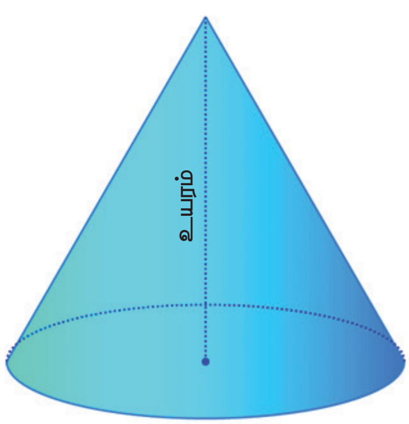
இத்தகைய தொப்பியைச் செய்வதற்குத் தேவையான வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். சாய்வுயரம் 30 சென்டிமீட்டர் வேண்டும் என்பதால், இத்தகைய ஆரம் உள்ள வட்டத்திலிருந்தே வட்டப்பகுதியை வெட்டி எடுக்க வேண்டும்.

மேலும், கூம்பின் அடிப்பக்கமான சிறிய வட்டத்தின் ஆரம் 8 சென்டிமீட்டராக இருக்க வேண்டும். அதாவது வட்டப்பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படும் பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$பாகமாகும். அப்போது சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இதே பாகம் ஆகும். சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவே, வெட்டியெடுக்க வேண்டிய வட்டப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் ஆகும். இவ்வாறு பார்க்கும் போது, வெட்டியெடுக்க வேண்டிய வட்டப்பகுதி வட்டத்தின் $\frac{4}{15}$ பாகம் எனக் காணலாம். அதனால், அதன் பரப்பளவு, இந்த வட்டத்தின் இதே பாகம் ஆகும். அதாவது

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

அப்போது தொப்பி செய்வதற்கு 240π சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை. (செயல் செய்து, இது ஏறக்குறைய 754 சதுர சென்டிமீட்டர் எனக் காணலாம்) .

சதுரக்கூம்பைப்போன்று வட்டக் கூம்பிலும் உச்சியிலிருந்து அடிப் பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரமே உயரம். இது வட்டக் கூம்பில் அடிப்பக்கமான வட்டத்தின் மையத்திற்கும், உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தூரமாகும்.



வளைதளப்பரப்பளவு

ஒரு வட்டக்கூம்பின் வளைதளப்பரப்பளவு, அதை உருவாக்குவதற்குப் பயன்படுத்திய வட்டக்கூம்பின் பரப்பளவு அல்லவா, கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரம் r எனவும், சாய்வுயரம் l எனவும் எடுத்தால், வட்டப்பகுதியின் ஆரம் l எனவும், மையக்கோணம் $\frac{r}{l} \times 360°$ எனக் கிடைக்கும். அப்பொழுதும் அதன் பரப்பளவு

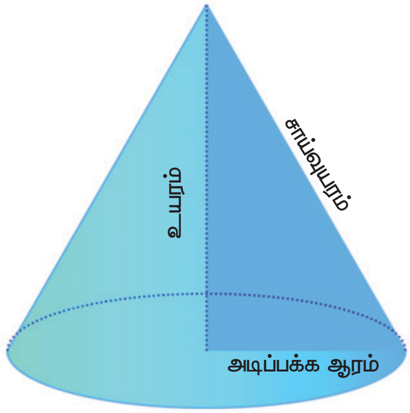
$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi rl$$

எனக் கணக்கிடலாம். (ஒன்பதாம் வகுப்பில் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு கண்டு பிடித்ததை நினைவில் கொள்க)

அதாவது. வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு என்பது அடிப்பக்கச்சுற்றளவு, சாய்வுயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதி ஆகும்.

சதுரக்கூம்பைப் போன்று வட்டக் கூம்பிலும், உயரம், சாய்வுயரம் என்பனவற்றின் இடையே ஒரு செங்கோண முக்கோணத் தொடர்பு உண்டு:

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர். உயரம் 10 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டக்கூம்பின் சாய்வுயரம் $\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ சென்டிமீட்டர் ஆகும்.



(1) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு எவ்வளவு ?

(2) அடிப்பக்கத்தின் விட்டம் 30 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 40 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) வட்டக்கூம்பு வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பூவாணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் விட்டம் 10 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 12 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இவ்வாறான 10000 பூவாணங்களின் வெளிப்பக்கம் முழுவதும் வண்ணக்காகிதம் ஒட்ட வேண்டும். வண்ணக் காகிதத்தின் ஒரு சதுரமீட்டருக்கு 2 ரூபாய் எனில் மொத்தம் எவ்வளவு செலவாகும் ?

(4) ஓர் அரைவட்டத்தை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு அதன் அடிப்பக்கப் பரப்பளவின் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

சதுரக் கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடிப்பதற்குச் செய்ததைப் போன்று ஒரு செய்முறைசார் பயிற்சியை இங்கும் மேற்கொள்வோம் ஒரு வட்டக்கூம்பு உருவாக்கவும். அதே அடிப்பக்கமும் உயரமும் உள்ள ஓர் உருளையை உருவாக்கவும். கூம்பில் மணல் நிறைத்து உருளையில் போடவும். இங்கும் கூம்பின் கனஅளவு, உருளையின் கனஅளவில் மூன்றிலொரு பாகம் எனக் காணலாம். அதாவது,

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

கூம்புகளின் கனஅளவு என்ற பகுதியில் செய்ததைப்போன்று ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் உள்ள ஒரு வட்டக் கூம்பும் ஓர் உருளையும் உருவாக்கவும். இவற்றின் கனஅளவுகளை ஒப்பிடுக.

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு என்பது அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கற் பலனின் மூன்றிலொன்றாகும்.

(இதன் கணிதம் சார்ந்த விளக்கம், பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது).

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 4 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 6 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

$$\frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times 6=32\pi \text{ கனசென்டிமீட்டர்}$$

(1) உருளை வடிவில் உள்ள ஒரு மரக்கட்டையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 15 சென்டிமீட்டர், உயரம் 40 சென்டிமீட்டர். இதிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு?

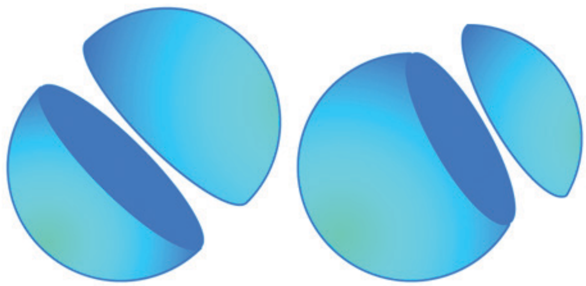
(2) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 20 சென்டிமீட்டரும் உள்ள கட்டியான உருளையை உருக்கி, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 4 சென்டிமீட்டரும் உயரம் 5 சென்டிமீட்டரும் உடைய எத்தனை வட்டக்கூம்புகள் உருவாக்கலாம் ?

(3) 216° மையக்கோணமும் 25 சென்டிமீட்டர் ஆரமும் உள்ள ஒரு வட்டப்பகுதியை வளைத்து, வட்டக்கூம்பு உருவாக்கினால், அதன் ஆரமும் உயரமும் எவ்வளவாக இருக்கும்? கனஅளவு ?

(4) இரு வட்டக்கூம்புகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 3 : 5, உயரங்களின் விகிதம் 2 : 3, இவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதம் எவ்வளவு ?

(5) ஒரேகன அளவு உள்ள இரு வட்டக்கூம்புகளின் ஆரங்கள் 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் ஆகும். அவற்றின் உயரங்களின் விகிதத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

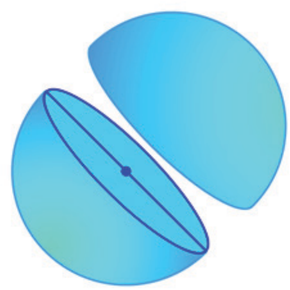
கோளம்



பந்து விளையாட்டின் ஈர்ப்பு, இனிப்பான லட்டு ஆகியவற்றின் வழியாகக் கோளங்களை அனுபவித்து உள்ளோம். இனி கோளத்தின் கணிதம் பற்றிப் பார்க்கலாம். (ஆங்கிலத்தில் கோளத்தை sphere என்று கூறுவர்).

உருளையையோ வட்டக்கூம்பையோ அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வெட்டினால் வட்டம் கிடைக்கும். கோளத்தை எவ்வாறு வெட்டினாலும் வட்டம் கிடைக்கும்:

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அதில் உள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் சமம் அல்லவா. கோளத்திற்கும் இது போன்ற மையம் உள்ளது. அதிலிருந்து கோளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் சமமாகும். இந்தத் தூரத்தை கோளத்தின் ஆரம் என்று கூறுவர். ஆரத்தின் இருமடங்கு விட்டம் ஆகும்.



ஒரு கோளத்தை இருசமபகுதிகளாக வெட்டினால் கிடைக்கும் வட்டத்தின் மையம், ஆரம், விட்டம் இவை எல்லாம் கோளத்தின் மைய மும், ஆரமும், விட்டமும் ஆகும்.

இதுவரை கண்ட வடிவங்களில் செய்ததைப்போன்று கோளத்தை வெட்டி நிமிர்த்தி மேற்பரப்பளவு கண்டுபிடிக்க இயலாது. சிறிய சுருக்கோ, இழுத்து நீட்டலோ இல்லாமல், கோளத்தை வெட்டி நிரப்பாக வைக்க இயலாது என்பதே காரணம்.

ஆனால், ஒரு கோளத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால், மேற்பரப்பளவு $4\pi r^2$ ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தலாம். (விளக்கம் பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது).

வேறொரு முறையில் கூறினால்,

கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு அதன் ஆரத்தின் வர்க்கத்தை 4π ஆல் பெருக்கியதாகும்.

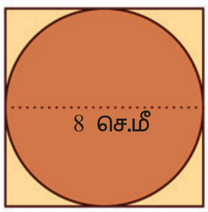
மேலும், ஆரம் r ஆன கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{4}{3}\pi r^3$ என்று விளக்கப்பட்டுள்ளது. (இதன் விளக்கமும் பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.)

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

எல்லா விளிம்புகளின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒரு சதுரக் கட்டையிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கப்படும் மிகப்பெரிய கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு?

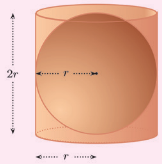
கோளத்தின் விட்டம், சதுரக் கட்டையின் விளிம்பின் நீளம் ஆகும் என்று படத்திலிருந்து காணலாம் அல்லவா. அப்போது கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$



கோளமும் உருளையும்

ஒரு கோளத்தை மிகச்சரியாக உட்கொள்ளும் உருளையின் ஆரம் கோளத்தின் ஆரம் ஆகும். உயரம் இந்த ஆரத்தின் இரு மடங்கு அல்லவா: அதாவது, கோளத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால், உருளையின் ஆரம் r, உயரம் $2r$. அப்போது உருளையின் மொத்தப் பரப்பளவு



$$(2\pi r \times 2r)+(2\times\pi r^2)=6\pi r^2$$

கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு $4\pi r^2$. இந்த இரு பரப்பளவுகளின் இடையே உள்ள விகிதம் $3 : 2$.

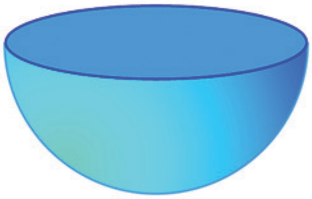
மேலும் உருளையின் கனஅளவு

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \text{ உம்}$$

கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{4}{3}\pi r^3$ ஆனதால், கனஅளவுகளின் இடையே உள்ள விகிதம் $3 : 2$ ஆகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

12 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள கட்டியான ஒரு கோளத்தை இரு சமப்பாகங்களாக வெட்டினால் கிடைக்கும் ஓர் அரைக் கோளத்தின் (hemisphere) மொத்த மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு ?



கோளத்தின் மேற்பரப்பளவின் பாதியும் ஒரு வட்டமும் சேர்ந்தது அல்லவா அரைக்கோளம்.

கோளத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், அதன் மேற்பரப்பளவு

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்.}$$

இதன் பாதியும் வட்டத்தின் பரப்பளவும் சேர்ந்ததே அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்பரப்பளவு. வட்டத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், அதன் பரப்பளவு

$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்.}$$

அப்போது அரைக்கோளத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ சதுரசெண்டிமீட்டர்}$$

(1) கட்டியான ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு 120 சதுரசெண்டிமீட்டர் ஆகும். அதை வெட்டி இரு அரைக்கோளங்கள் ஆக்கினால் ஒவ்வொன்றின் மொத்த மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு ?

(2) இரு கோளங்களின் கனஅளவுகளின் விகிதம் 27 : 64 ஆகும். அவற்றின் ஆரங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் எவ்வளவு? மொத்த மேற்பரப்பளவுகளின் விகிதமோ ?

(3) உலோகத்தால் உருவாக்கிய ஓர் உருளையின் நீளம் 10 செண்டிமீட்டரும். ஆரம் 4 செண்டிமீட்டரும் ஆகும். இதை உருக்கி 2 செண்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள எத்தனை கோளங்களை உருவாக்கலாம்?

(4) 12 செண்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள ஓர் உலோகக்கோளத்தை உருக்கி சமஅளவு உள்ள கட்டியான 27 சிறிய கோளங்கள் உருவாக்கப்பட்டன. சிறிய கோளங்களின் ஆரம் என்னவாக இருக்கும் ?

(5) 10 செண்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள கட்டியான ஒரு கோளத்திலிருந்து 16 செண்டிமீட்டர் உயரம் உள்ள மிகப் பெரிய வட்டக்கூம்பு வெட்டி எடுக்கப் பட்டது. கூம்பின் கனஅளவு கோளத்தின் கனஅளவின் எத்தனை பாகமாகும் ?

(6) கட்டியான ஒரு கோளம், இரு அரைவட்டங்களாக வெட்டப்பட்டுள்ளன; ஒன்றிலிருந்து மிகப்பெரிய சதுரக்கூம்பும், மற்றொன்றிலிருந்து மிகப்பெரிய வட்டக்கூம்பும் செதுக்கி எடுக்கப்படுகின்றன. இவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதம் எவ்வளவு?

(1) கட்டியான ஓர் அரைவட்டத்திலிருந்து செதுக்கி எடுக்கப்படும் மிகப்பெரிய சதுரக்கூம்பின் பக்கமுகங்களின் சிறப்புத்தன்மை என்ன ?

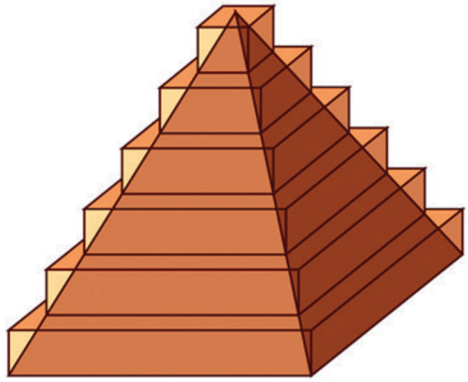
(2) ஒரு கனசதுரக் கட்டையில் சரியாகப் பொருந்துகின்ற (மிகப்பெரிய) உருளை, வட்டக்கூம்பு, சதுரக்கூம்பு, கோளம் இவைகளின் கனஅளவுகளுக்கு இடையேயான தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பின்னிணைப்பு

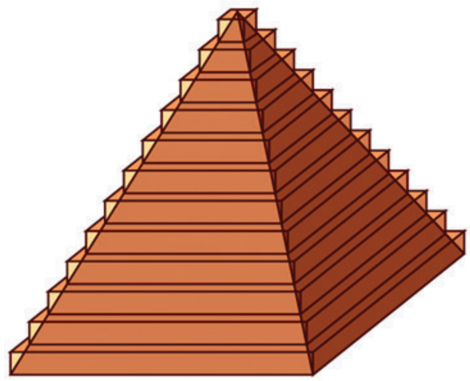
கூம்பின் கனஅளவு, கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு, கனஅளவு என்பனவும் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய செயல்பாடுகளும் அல்லவா பார்த்தோம். இவை எவ்வாறு கிடைத்தன என்று அறிய ஆர்வம் உள்ளவர்களுக்காக அவற்றின் விளக்கங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

சதுரக் கூம்பின் கனஅளவு

ஏறக்குறைய ஒரு சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தில் சில சதுரப்பலகைகளை அடுக்கி வைத்ததாக நினைத்துக் கொள்வோம்.



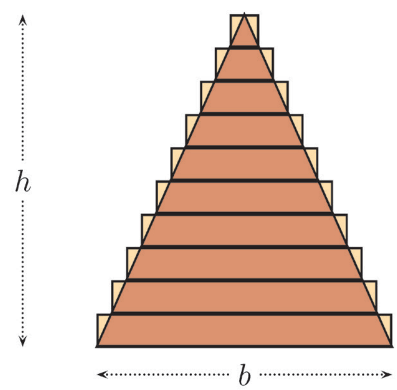
பலகைகளின் தடிமன் குறையும்போது அவற்றின் எண்ணிக்கை கூடுவதைப் பொறுத்து அவற்றின் அடுக்கு கூடுதல் கூம்பு வடிவில் ஆகிறது.



அப்போது இந்தப் பலகைகளின் கனஅளவுகளின் தொகை, கூம்பின் கனஅளவுடன் நெருங்கி வரும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 10 பலகைகள் பயன்படுத்தியதாகக் கருதவும், ஒவ்வொரு பலகையும் ஒரு சதுரப்பட்டகம் அல்லவா. இவற்றின் உயரங்களைச் சமமாக எடுக்கலாம். அப்போது கூம்பின் உயரம் h என எடுத்தால், ஒரு பலகையின் உயரம் $\frac{1}{10}h$. இனி ஒவ்வொரு பலகையின் அடிப்பக்கத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

கூம்பையும் அதைச் சுற்றியுள்ள பலகை களின் அடுக்கையும் உச்சியின் வழியே செங்குத்தாக வெட்டினால் இத்தகைய வடிவம் கிடைக்கும்:



மேலிருந்து தொடங்கி, இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள் பெரியதாகி வருகின்றன அல்லவா, இவற்றின் உயரம் அதிகரிப்பது, ஒவ்வொரு பலகையிலும் $\frac{1}{10}h$ என்ற அளவில் ஆகும். இவையெல்லாம் வடிவொத்தவைகள் ஆனதால் (எதனால்?) அடிப்பக்கங்களும் இந்த அளவில் அதிகரிக்கும். அதாவது கூம்பின் அடிப்பக்கத்தை b என எடுத்தால், மேலிருந்துள்ள முக்கோணங்களின் அடிப்பக்கம் $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, ..., b$ என்பதாகும்

அப்போது இந்தப் பலகைகளின் கனஅளவு

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ..., b^2 \times \frac{1}{10}h$$

என்பதாகும். அவற்றின் தொகையோ ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left[\frac{1}{10^2} + \frac{2^2}{10^2} + ... + \frac{9^2}{10^2} + \frac{10^2}{10^2}\right] = \frac{1}{1000}b^2h(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2)$$

இத்தகைய தொகைகள் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறை, **கூட்டுத் தொடர்கள்** என்ற பாடத்தில் **வர்க்கங்களின் தொகைகள்** என்ற பகுதியில் கூறப் பட்டுள்ளது.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

அப்போது கனஅளவுகளின் தொகை

$$\frac{1}{1000}b^2h \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = \frac{1}{6}b^2h \times \frac{10}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{21}{10} = \frac{1}{6}b^2h \times 1.1 \times 2.1$$

இனி இதைப்போன்று 100 பலகைகள் உள்ளன என கற்பனை செய்து பார்க்கவும். (அது எதுவாயினும் வரைய இயலாது) $\frac{1}{100}h$ பலகைகளின் தடிமன் ஆகும். அடிப்பக்கங்களின் விளிம்புகள் முறையே $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, ..., b$ என இவ்வாறாகும். கனஅளவுகளின் தொகை

$$\begin{aligned}\frac{1}{100^3}b^2h \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2) &= \frac{1}{100^3}b^2h \times \frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times \frac{100}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{201}{100} \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times 1.01 \times 2.01\end{aligned}$$

பலகைகளின் எண்ணிக்கையை 1000 எனக்கொண்டால்? கணக்கீடு செய்யாமல் கனஅளவுகளின் தொகை

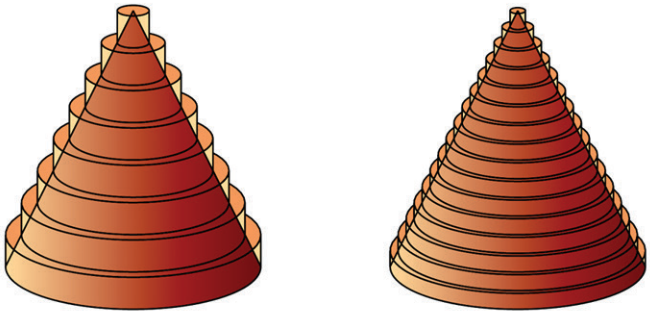
$$\frac{1}{6}b^2h \times 1.001 \times 2.001$$

எனக் காணலாம் அல்லவா. இந்தத் தொகைகள் எந்த எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன ?

இதுவே கூம்பின் கனஅளவு, அதாவது,

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}b^2h$$

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

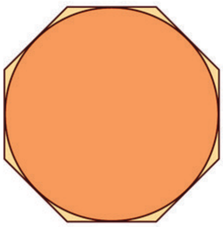


சதுரப் பலகைகளை அடுக்கி, ஏறக்குறைய சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தை உருவாக் கியது போன்று, வட்டப்பலகைகளை அடுக்கி ஏறக்குறைய வட்டக் கூம்பின் வடிவத்தை உருவாக்கலாம்.:

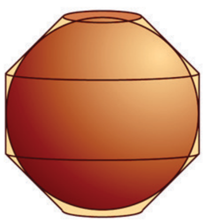
இதைப் பயன்படுத்தி வட்டக்கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடிக்கலாம். (முயற்சி செய்து பார்க்கவும்)

கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு

இதற்கு முதலில் கோளத்தின் நடுப்பாகம் வழியாக ஒரு வட்டத்தையும் பக்கங்களெல்லாம் அதை தொடும் ஓர் ஒழுங்கு பலகோணத்தையும் கற்பனை செய்யவும்.



இனி இந்த வடிவம் சுழற்றினால் உள்ளே ஒரு கோளமும் வெளியே வேறு ஒரு வடிவமும் கிடைக்கும்;

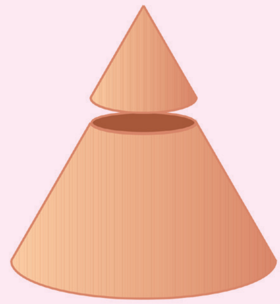


இந்தப் படத்தில் வெளியே உள்ள வடிவத்தை இரு கூம்பின் அடிக்கண்டங்கள் ஆகவும், ஓர் உருளை ஆகவும் பிரிக்கலாம்:

பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப வெளியே உள்ள வடிவம் கோளத்துடன் கூடுதலாக நெருங்கும்:

சிறியதும் பெரியதும்

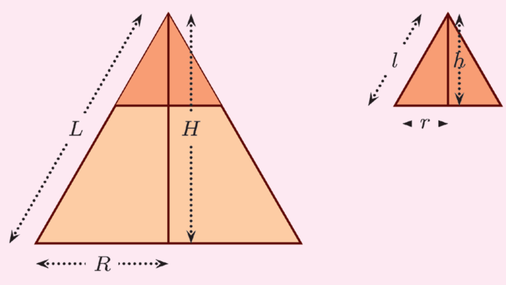
ஒரு வட்டக்கூம்பின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வெட்டினால் மேலே ஒரு சிறிய வட்டக்கூம்பு கிடைக்கும்.



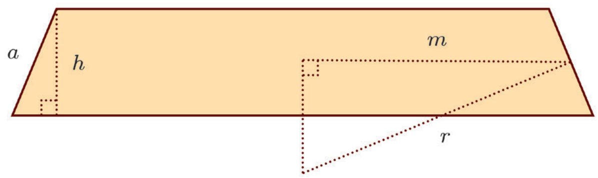
சிறிய கூம்பின் அளவுகளுக்கும் பெரிய கூம்பின் அளவுகளுக்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

அடிப்பக்கத்தின் ஆரம். உயரம், சாய்வுயரம் என்பன பெரிய கூம்பில் R, H, L என்றும், சிறிய கூம்பில் r, h, l என்றும் எடுத்தால், படத்திலிருந்து,

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$



இந்தக் கூம்பின் அடிக்கண்டங்களின் பக்கமுகப் பரப்பளவு கண்டுபிடிப்பதற்கு அவற்றில் ஒன்றை எடுத்துப் பார்க்கலாம். இதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம் m என்றும், உயரம் h என்றும் எடுக்கலாம். வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், அதனைச் சுற்றியுள்ள பலகோணத்தின் ஒரு பக்கம் a என்றும் எடுத்தால் கீழே காணப்படும் படம் கிடைக்கும்..



இதில் இரு செங்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. ஆதலால்,

$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

என்று காணலாம். அதாவது,

$$am = rh$$

இது சுழன்று உருவாகின்ற அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவு $2\pi ma$ ஆகும் என **அடிக் கண்டமும் பட்டகமும்** என்ற பகுதியில் பார்த்தோம் அல்லவா, மேலே உள்ள சமன்பாட்டின்படி, இது $2\pi rh$ க்குச் சமமாகும். அதாவது. அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் உம், உயரம் r உம், உயரம் h உம் உடைய உருளையின் வளைதளப் பரப்பளவாகும்.

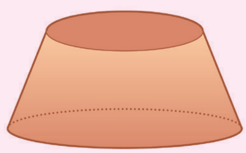
அப்போது என்ன கிடைத்தது? மேலே பார்த்த கோளத்தின் ஏறக்குறைய வடிவத்தில் ஒவ்வொரு அடிக்கண்டத்தின் வளைதளப்பரப்பளவு, அதே உயரமும் கோளத்தின் ஆரமும் ஆன உருளை யின் வளைதளப்பரப்பளவாகும்.

அப்போது ஏறக்குறைய இதன் வடிவத்தின் மொத்த பக்கமுகப் பரப்பளவு இந்த உருளையின் மொத்த வளைதளப் பரப்பளவு அல்லவா. இந்த உருளைகளைச் சேர்த்து வைத்தால் கிடைப்பது? பெரிய ஓர் உருளை ஆகும்:

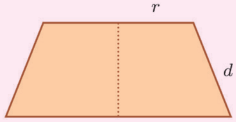
வட்டத்தை முழுமையாகப் பொதிந்துள்ள ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுவதற்கு ஏற்ப அது வட்டத்துடன் நெருங்குகிறது. கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவம் கோள வடிவத்தில் ஆகும். இப்போது நாம் பார்த்ததற்கு ஏற்ப பக்கங்கள் எத்தனை அதிகரித்தாலும் இந்த வடிவத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு, கோளத்தைப் பொதிந்த உருளையின் வளைதளப் பரப்பளவு ஆகும். அப்போது கோளத்தின் மேற்பரப்பளவும்,

வட்டக்கூம்பின் அடிக்கண்டம்

ஒரு வட்டக்கூம்பின் மேலிருந்து ஒரு சிறு கூம்பை வெட் டியெடுத்தால் கீழே மீதியாக வரும் பகுதிக்கு வட்டக்கூம்பின் அடிக்கண்டம் என்று பெயர் (frustum of a cone.



ஓர் அடிக்கண்டத்தின் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள வட்டங்களின் ஆரமும் சாய்வுயரமும் தெரியுமெனில் பக்கமுகப் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?



பெரிய கூம்பிலும் சிறிய கூம்பிலும் உள்ள சாய்வுய ரங்கள் L, l என எடுத்தால் படத்தில் $d = L - l$. அப்போது அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு

$$\begin{aligned} \pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl) \\ &= \pi(R(l + d) - rl) \\ &= \pi(Rl + Rd - rl) \end{aligned}$$

இதில் முன்பு கண்டதற்கு ஏற்ப, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$

ஆனதினால், $Rl = rL$ எனக் கிடைக்கும். அப்போது அடிக்கண்டத் தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு

$$\begin{aligned} \pi(rL + Rd - rl) &= \pi(r(L - l) + Rd) \\ &= \pi(rd + Rd) \\ &= \pi(r + R)d \end{aligned}$$

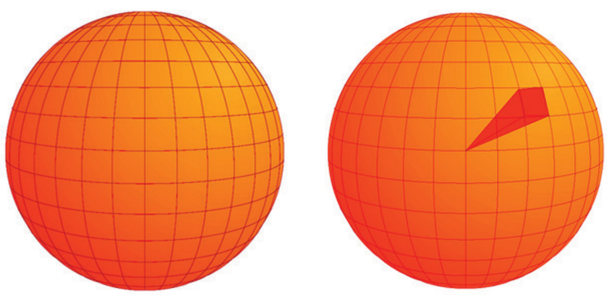
அதனைப் பொதிகின்ற உருளையின் பக்கமுகப் பரப்பளவே. உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் r உம், உயரம் $2r$ உம் ஆனதால், அதன் வளைதளப்பரப்பளவு

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

இதுவே கோளத்தின் மேற்பரப்பளவும்.

கோளத்தின் கனஅளவு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

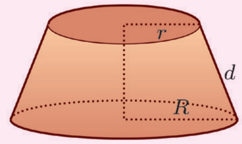


நெடுக்காகவும் குறுக்காகவும் வட்டங்கள் வரைந்து கோளம் சிறிய கட்டங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய ஒரு கட்டத்தின் உச்சிகளைக் கோள மையத்துடன் இணைத்தால், சதுரக் கூம்பு போன்ற ஒரு வடிவம் கிடைக்கும்:

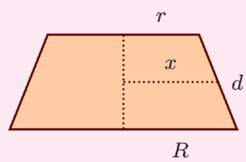
இத்தகைய வடிவங்கள் சேர்ந்ததே கோளம். அதனால் கோளத்தின் கனஅளவு இந்த வடிவங்களின் கனஅளவுகளின் தொகை ஆகும். இனிக் கோளத்தின் கட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கோளத்தைத் தொடுகின்ற சிறிய சதுரங்களாக ஆக்கினால், கோளத்தைப் பொதிந்த ஒரு வடிவம் கிடைக்கும். அது சரியான சதுரக்கூம்புகளை இணைத்தது ஆகும். இந்தக் கூம்புகளின் உயரம் கோளத்தின் ஆரம் ஆகும். இதனை r என்றும், ஒரு கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு a என்றும் எடுத்தால், அதன் கனஅளவு $\frac{1}{3}ar$ எனக்கிடைக்கும். கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவத்தின் கனஅளவு, இந்தக் கூம்புகளின் கனஅளவுகளின் தொகை அல்லவா. கூம்புகளின் அடிப்பக்கங்கள் சேர்ந்தால், இந்த வடிவத்தின் மேற்பரப்பளவு ஆகும். அப்போது

அடிக்கண்டமும் உருளையும்

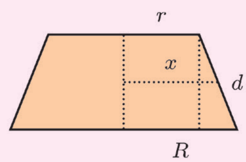
படத்தில் வட்டக்கூம்பின் அடிக்கண்டத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு $\pi(r+R)d$ எனக் கண்டோம் அல்லவா.



இதன் நடுவிலுள்ள வட்டத்தின் ஆரம் x என எடுத்தால், இத்தகைய ஒரு படம் கிடைக்கும்?



இவ்வாறு மேலும் ஒரு கோடு வரைந்தாலோ?



வலதுபக்கம் உள்ள இரு வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களிலிருந்து,

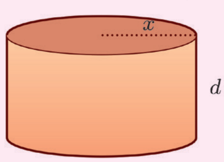
$$\frac{x-r}{R-r} = \frac{1}{2}$$

என்று காணலாம். இதனை எளிதாக்கினால்

$$x = \frac{1}{2}(R+r)$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு, $2\pi xd$.

இது. அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் x உம், உயரம் d உம் உடைய உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவு அல்லவா. ?



இந்தக் கூம்புகளின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவுகளின் தொகை இந்த வடிவத்தின் மேற்பரப்பளவு ஆகும். அதை s என எடுத்தால், வடிவத்தின் கனஅளவு $\frac{1}{3}sr$ எனக் கிடைக்கும்.

கோளத்தின் கட்டங்கள் சிறியதாக மாறும்போது அவற்றின் எண்ணிக்கை கூடுவதற்கு ஏற்ப கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவம் கோளத்துடன் நெருங்குகிறது; s என்பது, கோளத்தின் மேற்பரப்பளவினோடும் நெருங்கும், அது $4\pi r^2$ ஆகும் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அப்போது கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவத்தின் கனஅளவு

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது. இதுவே கோளத்தின் கனஅளவு.

13 புள்ளிவிவரக் கணக்கு

சரி அல்லாத சராசரி

அடுத்தடுத்து வசிக்கின்ற 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் இவ்வாறாகும்.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

இந்தக் குழுவின் சராசரி வருமானம் எத்தனை ரூபாய் ?

வருமானம் அனைத்தையும் கூட்டி, 10 ஆல் வகுத்தால் சராசரி 19285 ரூபாய் என்று கிடைக்கும்..

இனி இந்தப் பத்துக் குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தின் பல்வேறு விவரங்களுக்குப் பதிலாக, சராசரி தொகை மட்டும் கிடைத்தாலும், இவர்களின் மொத்தத்தில் உள்ள பெருளாதார நிலையைக் குறித்துப் பொதுவாகச் சிலவற்றைக் கூறலாம்;

- இவர்களின் மாத வருமானம் 19285 ரூபாயுடன் மிக நெருங்கி வரும் தொகை ஆகும்.
- எவருடைய மாத வருமானமும் 19285 ரூபாயிலிருந்து மிகக் கூடுதலாகவோ மிகக் குறைவாகவோ இல்லை.
- 19285 ரூபாயைவிடக் கூடுதல் மாதவருமானம் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கையும், இந்தத் தொகையைவிடக் குறைந்த மாத வருமானம் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கையும் ஏறக்குறைய சமம் ஆகும்.

இவர்களின் அருகிலேயே 175000 ரூபாய் மாதவருமானம் உள்ள ஒரு குடும்பமும் வசிக்கிறார்கள் எனக் கருதவும். இப்போது 11 குடும்பங்களின் சராசரி வருமானம் என்ன?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} = 33441 \text{ ரூபாய்}$$

இனி, இந்த விவரங்கள் ஒன்றையும் கூறாமல், இப்போது கிடைத்துள்ள சராசரியை மட்டும் கூறினால், இந்த 11 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் சுமார் 30000 ரூபாய் என்ற தவறான கருத்து உண்டாகும் அல்லவா. இந்த எண் பத்துக் குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தின் ஏறக்குறைய ஒன்றரை மடங்கு ஆகும்.

சராசரியைக் கணக்கிடுவதன் நோக்கம், ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளைப் பற்றிய எண்களின் எண்ணிக்கையைக் குறைத்து, ஒரு பொதுவான கருத்தை வழங்கும் ஓர் எண்ணாக சுருக்குவதாகும். ஆனால் குழுவில் மற்ற எண்களை விட மிகப் பெரியதோ, மிகச் சிறியதோ ஆன எண்கள் (எண்ணிக்கையில் குறைவாக இருந்தாலும் கூட) சராசரியில் மிக அதிகமாகத் தாக்கம் செலுத்துகின்றன.

நமது எடுத்துக்காட்டில், முதலில் உள்ள பத்து எண்களை விட மிகப்பெரிய ஒரேயொரு எண்ணே சராசரியை மிக அதிகமாக மாற்றியது. இதைப்போன்று மிகப்பெரியதோ, மிகச் சிறியதோ ஆன எண்கள் சராசரியைக் குறித்துள்ள பொதுக் கருத்தைத் தவறாக்கும் பிற சூழல்களைக் கூறலாமா?

வேறொரு சராசரி

நமது எடுத்துக்காட்டில் உள்ள 11 குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தைக் குறித்துள்ள சரியான குறிப்புத் தருகின்ற வேறொரு எண்ணைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

அவ்வாறான ஒரு எண்ணைக் குறித்து சிந்தித்துப் பார்க்கலாம். வருமானங்கள் அனைத்தையும் எண்களின் ஏறுவரிசையில் எழுதி, நடுவில் உள்ள எண்ணை எடுத்தால், 5 குடும்பங்களின் வருமானம் அதைவிடக் குறைவாகவும், மற்ற 5 குடும்பங்களின் வருமானம் அதைவிடக் கூடுதலாகவும் இருக்கும் அல்லவா.

முதலில் எண்களை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் எழுதலாம்.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

இதில் நடுவில் உள்ள எண் 19500. இதனை மேலே எழுதப்பட்டுள்ள எண்களின் இடைநிலை (median) என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, இந்த 11 குடும்பங்களின் இடைநிலை மாதவருமானம் 19500 ரூடாய் ஆகும். இதை வேறொரு முறையில் கூறலாம். மொத்தம் உள்ள 11 குடும்பங்களில் 5 இன் மாதவருமானம் 19500 ஐ விடக்குறைவும், 5 குடும்பங்களின் மாதவருமானம் 19500 ஐ விடக் கூடுதலும் ஆகும். அதாவது, இடைநிலை வருமானத்தைவிடக் குறைந்த வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும், இடைநிலை வருமானத்தை விடக்கூடுதல் வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம் ஆகும். இனி முதலில் உள்ள 10 குடும்பங்களை மட்டும் எடுத்தால்? இவர்களின் மாத வருமானத்தை மட்டும் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் எழுதினால் நடுவில் ஓர் எண்ணிற்குப் பதிலாக, 18600, 19500 என்ற இரு எண்கள் கிடைக்கும்.

இங்கும் இடைநிலையாக எடுக்க வேண்டியது, அதைவிடக் குறைந்த வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் அதைவிடக் கூடுதல் வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாகின்ற விதத்தில் ஆகும். 18600 க்கும் 19500 க்கும் இடைநிலையாக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் இது சரியாகும். சாதாரணமாக இவற்றின் தொகையின் பாதியே இடைநிலையாக எடுக்கப்படுகிறது .. அதாவது 10 குடும்பங்களின் இடைநிலை மாதவருமானம் $\frac{1}{2}(18600 + 19500) = 19050$ ரூபாய்.

இடைநிலையான 19050 ரூபாய் என்பது சராசரியான 19285 ரூடாய் என்பதைப் போன்றே முதலில் உள்ள பத்துக் குடும்பங்களின் பொருளாதார நிலையைக் குறித்துள்ள பொதுக் கருத்தைத் தருகிறது அல்லவா. (சராசரிக்கும், இடைநிலைக்கும் இடையில் பெரிய வேறுபாடும் இல்லை).

பதினொன்றாவது குடும்பத்தின் கூடிய வருமானம் இடைநிலையில் பெரிய மாற்றத்தை உண்டாக்கவில்லை என்பதே இங்கு முக்கியம். மட்டுமல்ல, சில குடும்பங்களின் இடைநிலை வருமானம் 19050 ரூபாய், அதில் ஒரு குடும்பத்தின் மாதவருமனாம் 21000 ரூபாய் என்று மட்டும்

கூறினால், இவற்றில் பாதிக்கும் மேற்பட்ட குடும்பங்களின் வருமானத்தை விட இந்தக் குடும்பத்திற்கு உண்டு என்றும் புரிந்துகொள்ளலாம்.

(1) நீளம் தாண்டுதல் பயிற்சியில் அஹிரத் தாண்டிய தூரங்கள் இவ்வாறாகும்.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

தூரங்கள் அனைத்தும் மீட்டரில் ஆகும். இவற்றின் சராசரியையும், இடை நிலையையும் கண்டு பிடிக்கவும். அவற்றின் இடையில் பெரிய வேறுபாடு இல்லாதது எதனால்?

(2) கேரளாவில் உள்ள பல்வேறு மாவட்டங்களில் 2025 ஜூன் மாதத்தில் முதல் ஒரு வாரம் பெய்த மழையின் அளவு. பதிவு செய்யப்பட்ட அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மாவட்டம்	மழையின் அளவு (மி.மீ)
காசர்கோடு	108.7
கண்ணூர்	89.4
கோழிக்கோடு	74.8
வயநாடு	72.0
மலப்புறம்	42.6
பாலக்காடு	35.7
திருச்சூர்	66.4
எர்ணாகுளம்	73.5
கோட்டயம்	69.1
இடுக்கி	50.5
பத்தனம்திட்டை	43.6
ஆலப்புழை	93.1
கொல்லம்	39.0
திருவனந்தபுரம்	37.5

இந்த வாரத்தில் கேரளாவின் மழையின் சராசரியையும் இடைநிலையையும் கணக்கிடுக. சராசரியைவிட, இடைநிலை குறைந்தது எதனால்?

(3) கூட்டுத்தொடரில் உள்ள சில எண்களின் இடைநிலையும் சராசரியும் சமம் ஆகும் என நிறுவுக.

நிகழ்வெண்ணும் இடைநிலையும்

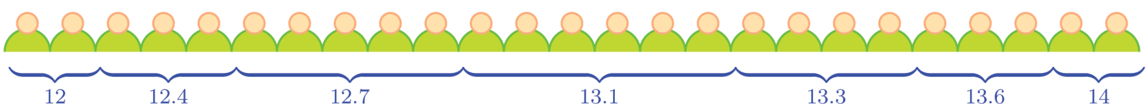
இரத்தத்தில் ஹீமோகுளோபின் அளவு சாதாரணமாக ஒரு டெசிலிட்டரில் (அதாவது 100 மில்லிலிட்டர்) எத்தனை கிராம் என்ற வீதத்தில் தான் கூறப்படுகிறது. 25 குழந்தைகளிடம் இரத்தப் பரிசோதனை நடத்தி, ஹீமோகுளோபின் அளவுக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்திய அட்டவணையே இது.

ஹீமோகுளோபின் (கிராம் /டெ.லி)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

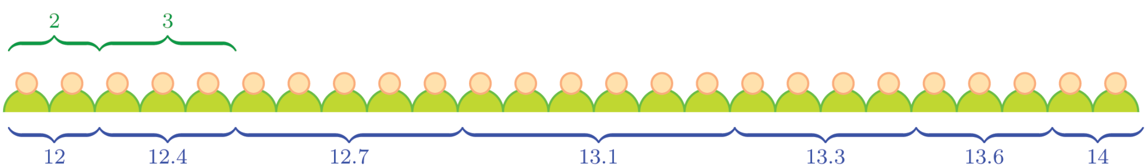
இதிலிருந்து ஹீமோகுளோபின் அளவின் சராசரியைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இடைநிலையை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

நடுவில் வருவதே இடைநிலை. அதாவது இந்த அட்டவணையில் உள்ள 25 குழந்தைகளில்,12 பேரின் ஹீமோகுளோபின் அளவு இடைநிலையை விடக்குறைவாக இருக்க வேண்டும்; 12 குழந்தைகளின் அளவு கூடுதலாகவும் இருக்க வேண்டும்.

இதைக் கணக்கிட, அளவுகளின் வரிசையில் குழந்தைகளை நிறுத்தி, 13 ஆவது குழந்தையின் அளவை எடுத்தால் போதும். இவ்வாறு நிறுத்துவதாக நினைத்துப் பார்க்கவும்.

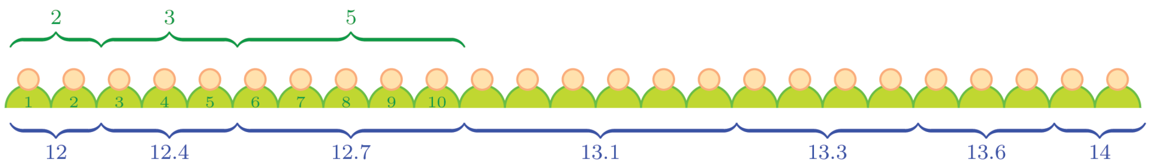


முதலில் உள்ள 2 குழந்தைகளின் ஹீமோகுளோபின் 12, அடுத்த 3 குழந்தைகளுக்கு 12.4 இவ்வாறு வரிசை நீண்டு போகிறது.



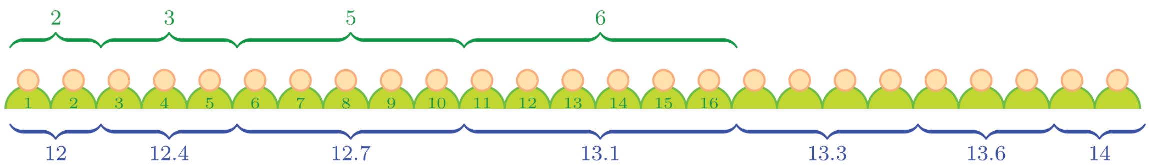
நமக்குத் தேவை 13-ஆவது குழந்தையின் அளவு அல்லவா. அட்டவணையின் எண்ணிக்கையைக் கூட்டிக்கூட்டி ஹீமோகுளோபின் தொடரில் இந்தக் குழந்தையின் இடத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். முதலில் உள்ள 2 குழுவில் உள்ள 2 + 3 = 5 குழந்தைகளை எடுக்கும்போது அளவு 12.4 வரை ஆகிறது. அதாவது, 5-ஆவது குழந்தையின் அளவு 12.4.

மீண்டும் அடுத்தக் கூட்டத்தில் உள்ள 5 குழந்தைகளையும் சேர்த்துக்கூட்டினால் 5 + 5 = 10 குழந்தைகள் ஆயினர். அளவு 12.7 இல் வந்து சேரும்.

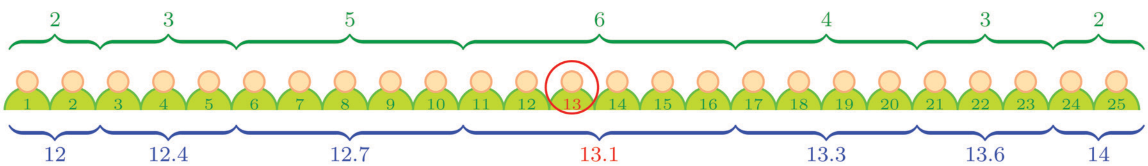


அதாவது 10-ஆவது குழந்தையின் அளவு 12.7

இனி அடுத்தக் குழுவிலுள்ள 6 குழந்தைகளையும் சேர்த்துக் கூட்டினால் 10 + 6 = 16 குழந்தைகள் ஆயினர்.



நமக்குத் தேவை 13-ஆவது குழந்தையின் அளவாகும். வரிசையில் 11 முதல் 16 வரை உள்ள குழந்தைகளின் அளவு 13.1 அல்லவா. அப்போது 13-ஆவது குழந்தையின் ஹீமோகுளோபின் அளவும் 13.1 தான். இதுதான் அளவுகளின் இடைநிலையும்.



படத்திற்குப் பதிலாக இதனை அட்டவணையாக்கலாம்.

ஹீமோகுளோபின் அளவு (கிராம்/டெ.லி)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
12.0 வரை	2
12.4 வரை	5
12.7 வரை	10
13.1 வரை	16
13.3 வரை	20
13.6 வரை	23
14.0 வரை	25

அட்டவணையிலிருந்து 11 முதல் 16 வரை உள்ள இடங்களில் குழந்தைகளின் ஹீமோகுளோபின் அளவு 13.1 எனக் காணலாம். மொத்தக் குழந்தைகளின் நடுவில் உள்ள 13-ஆவது குழந்தையும் இந்தக் குழுவில் உள்ளதால் இடைநிலை 13.1 என்று கணக்கிடலாம்.

(1) கீழே உள்ள அட்டவணையில் ஒரு பகுதியில் வசிக்கும் 35 குடும்பங்கள் மாத வருமானத்தின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன:

மாதவருமானம் (ரூபாய்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
10000	3
11000	7
12000	8
13000	5
14000	5
15000	4
16000	3

இடைநிலை வருமானத்தைக் கணக்கிடுக..

(2) ஒரு தொழிற்சாலையில் பல்வேறு பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை தினக்கூலிக்கு ஏற்ப எழுதப்பட்டுள்ள அட்டவணையே இது.

தினக்கூலி (ரூபாய்)	பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை
700	2
800	4
900	5
1000	7
1100	5
1200	4
1300	3

தினக்கூலியின் இடைநிலையைக் காண்க..

(3) ஒரு மருத்துவமனையில், ஒருவாரம் பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை எடைக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

குழந்தைகளின் எடை (கி.கிராம்)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

எடையின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

பிரிவுகளும் இடைநிலையும்

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள பணியாளர்களின் தினக்கூலியின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணையே கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தினக்கூலி (ரூபாய்)	பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை
400 - 500	6
500 - 600	7
600 - 700	10
700 - 800	9
800 - 900	5
900 - 1000	4
மொத்தம்	**41**

இந்தத் தொழிற்சாலையின் இடைநிலை தினக்கூலியை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்? மிகக் குறைந்த கூலி கிடைப்பவர் முதல், மிகக் கூடுதல் கூலி கிடைப்பவர் வரையிலான பணியாளர்களை வரிசைப்படுத்தினால் நடுவில் வருகின்ற நபரின் கூலியையே கணக்கிட வேண்டும். மொத்தம் 41 பணியாளர்கள் உள்ளனர். அப்போது நடுவில் வருபவர் இந்த வரிசையின் 21-ஆவது நபர். .

அட்டவணையில் தினக்கூலியைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்ததில் எந்தப் பிரிவில் உள்ளவர் 21 ஆவது நபர் என முதலில் கண்டுபிடிக்கலாம். முன்பு செய்த கணக்கினைப் போன்று ஒவ்வொரு பிரிவிலும் பணியாளர்களைச் சேர்க்கும் போது மொத்தம் எத்தனை பேர் உள்ளனர் என்று பார்க்கலாம்.

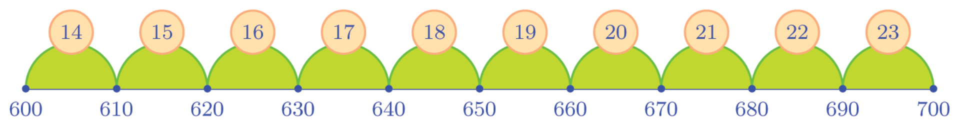
தினக் கூலி (ரூபாய்)	பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை
500 ஐவிடக் குறைவு	6
600 ஐவிடக் குறைவு	13
700 ஐவிடக் குறைவு	23
800 ஐவிடக் குறைவு	32
900 ஐவிடக் குறைவு	37
1000 ஐவிடக் குறைவு	41

அட்டவணைக்கு ஏற்ப 600 ரூபாயைவிடக் குறைந்த கூலி பெறுபவர்களை ஒன்றாகச் சேர்க்கும் போது 13-ஆவது நபர் வரை வருகின்றனர். 700 ரூபாயைவிடக் குறைந்த கூலி பெறுபவர்களையும் சேர்க்கும் போது 23-ஆவது நபர் வரை வருகின்றனர். இந்த இரு பணியாளர்களுக்கும் இடையில் அல்லவா நம்முடைய 21-ஆவது நபர். அப்போது அந்த நபரின் கூலி 600 ரூபாய்க்கும் 700 ரூபாய்க்கும் இடையிலாகும் எனக் கிடைத்தது.

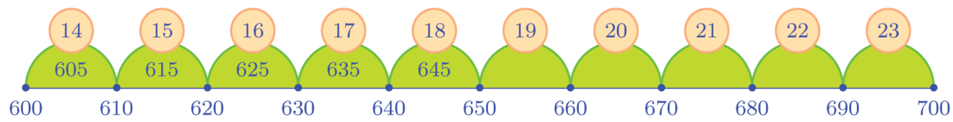
கூலியை மேலும் சரியாகக் கணக்கிட என்ன செய்யலாம்?

14-ஆவது நபர் முதல் 23-ஆவது நபர் வரையுள்ள 10 பணியாளர்களின் தினக்கூலி 600 ரூபாய்க்கும் 700 ரூபாய்க்கும் இடையில் ஆகும் என்பதல்லாமல் இவர்களில் ஒவ்வொருவரின் தினக்கூலி எவ்வளவு எனத் தெரியாது அல்லவா.

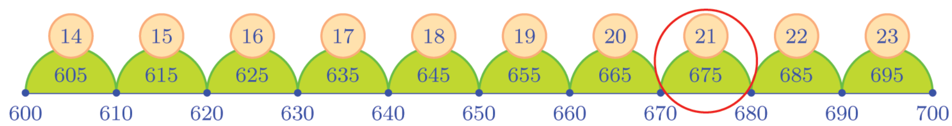
அப்போது சில ஊகங்கள் தேவைப்படும். (பிரிவுகளாக்கியவற்றிலிருந்து சராசரி கணக்கிடுவதற்கும் சில ஊகங்கள் தேவை அல்லவா) 600 முதல் 700 வரையிலான 100 ரூபாயைச் 10 சமப் பிரிவுகளாக்கி ஒவ்வொரு பிரிவிலிருந்தும் ஒருவர் என எடுக்கலாம்.:



இதில் ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவிலும் நபரின் கூலி இந்தத் துணைப் பிரிவின் நடுவில் எனவும் ஊகிக்கலாம் :



இந்த ஊகங்களின் அடிப்படையில் 21-ஆவது நபரின் கூலியைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா..



அதாவது தினக்கூலியின் இடைநிலை 675 ரூபாய்.

படம் வரையாமலே இதனைக் கணக்கிடலாம். தினக்கூலியின் அடிப்படையில் பணியாளர்களை வரிசைப்படுத்துவதைக் குறித்துள்ள நம் ஊகங்களைப் பயன்படுத்தி இடைநிலையாக வரும் கூலியைக் கணக்கிட்டது எவ்வாறு ?

- 14-ஆவது நபரின் கூலி 605 ரூபாய்.
- தொடர்ந்து 23-ஆவது நபர் வரையிலான ஒவ்வொருவரின் கூலி 10 ரூபாய் வீதம் கூடுகிறது.
- 14-ஆவது நபர் முதல், நமக்குத் தேவையான 21-வது நபர் வரை சென்றடைய 7 பேரைச் சேர்க்க வேண்டும்.

அப்போது இது ஓர் எண் பிரச்சினை அல்லவா ?

605 இல் தொடங்கி, 10 வீதம் 7 தடவை கூட்டினால் கிடைக்கின்ற எண் எது? இதன் விடை

$$605 + (7 \times 10) = 675$$

எனக் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

இத்தகைய ஏராளமான கணக்குகளைக் **கூட்டுத் தொடர்கள்** என்ற பாடத்தில் செய்திருக்கிறீர்கள் அல்லவா.

படம் ஒன்றும் வரையாமல் இதைப் போன்று ஒரு கணக்கைச் செய்து பார்ப்போம். ஒரு நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை வயதுக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
25 - 30	4
30 - 35	7
35 - 40	8
40 - 45	10
45 - 50	9
50 - 55	8
மொத்தம்	**46**

இடைநிலை வயதைக் கணக்கிட வேண்டும். இதில் ஆட்களின் எண்ணிக்கை 46 என்ற இரட்டை எண் என்பதால், ஆட்களை வயதுக்கு ஏற்ப வரிசைப்படுத்தி 23, 24 ஆவது இடங்களில் வருகின்றவர்களின் வயதுகளின் தொகையின் பாதியை எடுக்க வேண்டும்.

முதலில் கூட்டு நிகழ்வெண்களை எழுதலாம்.

வயது	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
30 ஐ விடக்குறைவு	4
35 ஐ விடக்குறைவு	11
40 ஐ விடக்குறைவு	19
45 ஐ விடக்குறைவு	29
50 ஐ விடக்குறைவு	38
55 ஐ விடக்குறைவு	46

இதிலிருந்து, வயதின் வரிசையில், 20 முதல் 29 வரையுள்ள இடங்களில் உள்ள 10 ஆட்கள், 40 க்கும் 45 க்கும் இடையில் வயதுடையவர்கள் ஆவர். நமக்குத் தேவையான 23 ஆவது 24 ஆவது இடங்களில் உள்ளவர்கள் இக்குழுவில் அல்லவா.

முன்பு செய்ததைப் போன்று 40 முதல் 45 வரையுள்ள 5 ஆண்டுகளை 10 சமபாகங்களாகக் கொண்டு, இந்த ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவிலும் ஒருவர் வீதம் உண்டு என்றும் அந்த ஒருவரின் வயது துணைப்பிரிவின் நடுவில் உள்ள எண் ஆகும் என்றும் நினைத்துக்கொள்வோம். அப்போது ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவின் நீளம் $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ஆண்டு.

இதற்கு ஏற்ப 20-ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது, 40 ஆண்டினுடையவும் $40\frac{1}{2}$ ஆண்டினுடையவும் நடுவில், அதாவது $40\frac{1}{4}$ ஆண்டு, தொடர்ந்து 29-ஆவது இடம் வரையிலான ஒவ்வொருவரினுடையவும் வயது $\frac{1}{2}$ கூடும் என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. அப்போது 23-ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது

$$40\frac{1}{4}+\left(3\times\frac{1}{2}\right)=40\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}=41\frac{3}{4} \text{ ஆண்டு}$$

24-ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது

$$41\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=42\frac{1}{4} \text{ ஆண்டு}$$

இனி இடைநிலை வயது கிடைப்பதற்கு இந்த வயதுகளின் தொகைகளின் பாதியை எடுக்க வேண்டும்.

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{3}{4}+42\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

இவ்வாறு இடைநிலை வயது 42 எனக் காணலாம்.

இந்தக் கணக்கில் 23 உம் 24 உம் இடங்களில் வருகின்றவர்கள் 40 – 45 என்ற ஒரே வயது பிரிவினராகும். இவ்வாறல்லாத சூழல்களில் சிறிது வேறுபாட்டுடன் இடைநிலை கணக்கிடப்படுகிறது. இந்த எடுத்துக்காட்டைப் பாருங்கள்:

ஒரு தேர்வு எழுதிய குழந்தைகளின் மதிப்பெண்களை அடியொற்றி வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
0 - 10	4
10 - 20	7
20 - 30	9
30 - 40	12
40 - 50	8
மொத்தம்	**40**

இடைநிலை மதிப்பெண் கணக்கிடவும்.

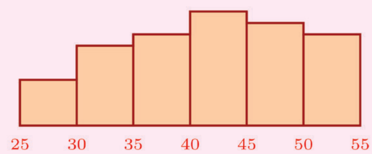
முதலில் கூட்டு நிகழ்வெண்களை எழுதலாம்:

மதிப்பெண்	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
10 ஐவிடக் குறைவு	4
20 ஐவிடக் குறைவு	11
30 ஐவிடக் குறைவு	20
40 ஐவிடக் குறைவு	32
50 ஐவிடக் குறைவு	40

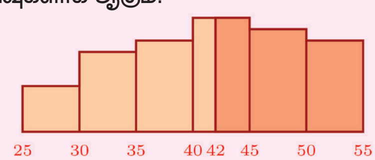
இங்கே குழந்தைகளின் மதிப்பெண் அடிப்படையில் (மிகக் குறைவு முதல் மிகக் கூடுதல் வரை) வரிசைப்படுத்தினால், 30 க்குக் கீழ் மதிப்பெண்கள் உள்ளவர்கள் 20; அதாவது மொத்தமான 40 குழந்தைகளில் பாதி.

இடைநிலைப் பரப்பளவு

நிகழ்வெண் அட்டவணையின் செவ்வகப் படம் வரைந்தது நினைவில் உண்டல்லவா? வயதுக் கணக்கின் செவ்வகப் படம் இதுவாகும்.



இதில் இடைநிலையான 42 வழியாக நேராக ஒரு கோடு வரைந்தால் படம் இரண்டு பிரிவுகளாக ஆகும்.



இந்த இரண்டு பிரிவுகளினுடையவும் பரப்பளவு சமம் எனக் காண சிரமம் இல்லை அல்லவா. (செய்து பார்க்கவும்)

எல்லாக் கணக்கிலும் இடைநிலைக்கு இந்தத் தன்மை உண்டா?

அப்போது மதிப்பெண்களின் இடைநிலை 30 ஆகவே எடுக்கப்படுகிறது. மொத்தம் உள்ளவர்களில் பாதி குழந்தைகளின் மதிப்பெண் 30க்குக் கீழேயும் மீதம் உள்ள பாதி குழந்தைகளின் மதிப்பெண் 30 க்குக் கூடுதல் அல்லது 30 தான் என்பது தான் இதன் பொருள்.

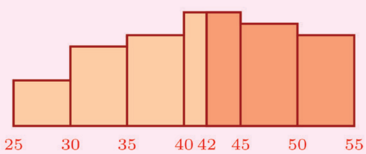
(1) ஒரு வட்டாரத்தில் உள்ள சில வீடுகளை மின்சாரப் பயன்பாட்டின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே உள்ளது.

மின்சாரப் பயன்பாடு (யூனிட்)	வீடுகளின் எண்ணிக்கை
220 - 240	3
240 - 260	6
260 - 280	7
280 - 300	10
300 - 320	9
320 - 340	4

மின்சாரப் பயன்பாட்டின் இடைநிலையைக் காண்க..

இடைநிலை வாய்ப்பு

நடுவில் உள்ள செங்குத்துக் கோடு செவ்வகத்தை ஒரே பரப்பளவு உள்ள இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது எனப் பார்த்தோம்.



அப்போது, இப்படத்தில் ஒரு புள்ளி வைத்தால் அது இதில் ஏதேனும் பகுதியில் வர ஒரே வாய்ப்பு உள்ளது (அதாவது வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$).

அதாவது கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள நிறுவனத்தில் தனிப்பட்ட முன்னுரிமை ஒன்றுமில்லாமல் ஒருவரை எடுத்தால், அந்த நபரின் வயது 42 க்கு குறைவாகவும், கூடுதலாகவும் வர ஒரே வாய்ப்பு உள்ளது.

(2) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களை கணக்குத் தேர்வில் கிடைத்த மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	10
30 - 40	9
40 - 50	5

வகுப்பின் இடைநிலை மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு நிறுவனத்தில் உள்ள அலுவலர்கள் ஓர் ஆண்டு கொடுத்த வருமான வரி அட்டவணை கீழே உள்ளது.

வருமான வரி (ரூபாய்)	அலுவலர்களின் எண்ணிக்கை
1000 - 2000	8
2000 - 3000	10
3000 - 4000	15
4000 - 5000	20
5000 - 6000	22
6000 - 7000	8
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3

வருமான வரியின் இடைநிலையைக் காணக்கிடுக.

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

பாகம் 4 அ

இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

51 அ பிரிவுக்கூறு

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதிநான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

குழந்தைகளின் உரிமைகள்

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:

கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்

ஸ்ரீ கணேஷ், TC. 14/2036, வான்ரோஸ் ஜங்ஷன்,
கேரளா பல்கலைகழகம் P.O, திருவனந்தபுரம்-34, தொலைபேசி : 0471-2326603

இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்-1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்-1090, நிர்பயா-1800 425 1400
கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் - 0471-324300/44000/45000

Online ***R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***