ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಭಾಗ - 1

ತರಗತಿ

VIII

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ತಯಾರಿಸಿದವರು
ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ

2025

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

ಗಣಿತ

8

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಹಲವು ವಿಧದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದೆವು. ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪರಿಚಯವಾಯಿತು. ಆಯತ, ತ್ರಿಕೋನ, ವೃತ್ತ ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಹಲವು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದೆವು.

ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕವು ಇಂತಹ ಕಲಿಕೆಗಳ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಅಳತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಇಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಬೀಜಗಣಿತ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಬಹುತೇಕ ಎಲ್ಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದಲೇ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಇದೆ.

ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ಅಳತೆಗಳ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ ಅನುಭವವು ಇಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮಾನತೆ ಎಂಬ ಆಶಯವಾಗಿ ವಿಕಾಸವಾಗುವುದು. ಇದು ಮುಂದಿನ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂಬ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಯಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಅದಾದರೋ ನೇರವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ದೂರ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕವು ಗಣಿತದ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ತಾರ್ಕಿಕ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬ ನಿರೀಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ಪ್ರೀತಿ ಪೂರ್ವಕ ಶುಭ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಜಯಪ್ರಕಾಶ್ ಆರ್.ಕೆ.
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಕೇರಳ

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Retd.), Department of Mathematics
University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. Shikhi M.
Professor,
College of Engineering Trivandrum
Thiruvananthapuram

Experts

Dr. P. Ramesh Kumar
Head (Retd.), Department of Mathematics
University of Kerala,
Karyavattom Thiruvananthapuram

Dr. Sukesh A.
Associate Professor,
Government College of Engineering,
Kannur

Members

R. Ramanujam
H.S.S.T. Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher
Secondary School
Pulappatta, Palakkad

Unnikrishnan M .V.
H.S.T. Mathematics,
G.H.S.S. Kadannappalli, P.O.
Kadannappalli, Kannur

Padmaprasad K.
H.S.T. Mathematics,
Pandalloor H.S.S.,
Kadambode Post, Malappuram

Priya Raj
H.S.T. Mathematics,
M.G.D. High School Pudusseri,
Pudusseri South P O,
Pathanamthitta

Vijayakumaran T. K.
H.S.S.T. (Retd.)
G.M.R.H.S.S. for Girls
Paravanadukkam, Kasaragod

Nandakumar C.
H.S.T. Mathematics, Chothavoor
Higher Secondary School
Chambad, Kannur

Ubaidulla K.C.
H.S.T. Mathematics, S.O.H.S.
Areekode, Malappuram

Ayisha Kutty K. K.
H.S.T. Mathematics, G.H.S.
Beenachi, Sulthan Batheri,
Wayanad

C. T. Firos Babu
H.S.T. Mathematics,
G.G.V.H.S.S. Vandoor,
Malappuram

Shreejith Muriyambath
H.S.T. Mathematics,
G.H.S.S. Madappalli, Vadakara,
Kozhikode

Firosa Moidu
H.S.T. Mathematics, Calicut
Girls V.H.S.S. Kundungal, Kallai,
Kozhikode

Rajesh M.
H.S.T. Mathematics, Kalladi
H.S.S. Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

Kannada Version

Subject Expert

Mahalingeshwar Raj D.
Retd. DDE

Language Expert

Veena K
Retd. H.M.

Participants

Krishna Prakash S.
H.S.T., S.N.H.S. Perla

Nagaraja N.
H.S.T., S.S.H.S.S. Sheni

Subhas V. S.
H.S.T., G.H.S.S. Kasaragod

Raghurama M.
H.S.T., G.H.S.S. Pandi

Santhosh Raj P.
H.S.T., G.H.S.S. Kundamkuzhy

Ullas U. G., (Artist)
H.S.T. Physical Science, C.B.H.S.S. Vallikkunn, Malappuram

Academic Co-ordinator

Dr. Anilkumar A. K.
Research Officer, SCERT

State Council of Education Research and Training (SCERT)
Vidyabhavan, Poojappuram, Thiruvananthapuram - 695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

1	ವರ್ಗಗಳು	7
2	ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು	15
3	ವರ್ಗಸಮವಾಕ್ಯಗಳು	37
4	ಬಹುಭುಜಗಳು	61
5	ಸಮವಾಕ್ಯ ಪರಿಹಾರ	79
6	ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	93
7	ಸಮಭಾಜಕಗಳು	102

ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು
ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ

ಸಂಶೋಧನೆ

ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಭಾರತದ ಜನಗಳಾದ ನಾವು ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು [1]**[ಸಾರ್ವಭೌಮ ಸಮಾಜವಾದೀ ಸರ್ವಧರ್ಮ ಸಮಭಾವದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ]** ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ:

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ** ;
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಧರ್ಮಶ್ರದ್ಧೆ ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ** ;
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆ**

ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೌರವವನ್ನು,[2][ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು] ಸುನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಅವರಲ್ಲಿ **ಭ್ರಾತೃಭಾವನೆಯನ್ನು** ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ಶ್ರದ್ಧಾಪೂರ್ವಕ ಸಂಕಲ್ಪ ಮಾಡಿದವರಾಗಿ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 1949ನೆಯ ಇಸವಿ ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ತಾರೀಕಾದ ಈ ದಿವಸ **ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ, ಅಧಿನಿಯಮಿಸಿ ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.**

---

1. 1976ನೇ ಇಸವಿಯ ಭಾರತ ಸಂವಿಧಾನ (ನಲವತ್ತೆರಡನೆಯ ತಿದ್ದುಪಡಿ) ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಸೆಕ್ಷನ್ ಮೇರೆಗೆ “ಸಂಪೂರ್ಣ ಪ್ರಭುತ್ವ ಸಂಪನ್ನ ಲೋಕತಂತ್ರಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3-1-1977 ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಮೇಲ್ಕಂಡ ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನೂ” ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3 - 1 - 1977ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

1
ವರ್ಗಗಳು

ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು

ಈ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶೇಷತೆ ಏನು?

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯೇ? (**ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಚೌಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

$1 = 1 \times 1$ $\quad$ $4 = 2 \times 2$ $\quad$ $9 = 3 \times 3$ $\quad$ $16 = 4 \times 4$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ಆವರ್ತನ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠ).

$$1 = 1^2$$
$$4 = 2^2$$
$$9 = 3^2$$
$$16 = 4^2$$
$$25 = 5^2$$

....

ಇದನ್ನು 1 ರ ವರ್ಗ, 2 ರ ವರ್ಗ, 3 ರ ವರ್ಗ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರುವೆವು (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಚೌಕಗಳು ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಚೌಕ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗ ಎಂದೇ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{1}{2} \text{ ರ ವರ್ಗ } = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳಾಗಿರುವ 1, 4, 9, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು (Perfect squares)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

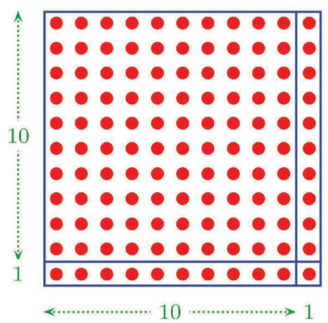
ಹಾಗಾದರೆ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಾಗಿವೆ.

10 ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದು ಕಷ್ಟವಲ್ಲ:

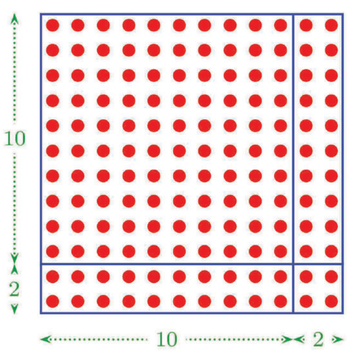
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

ನಂತರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೋ?

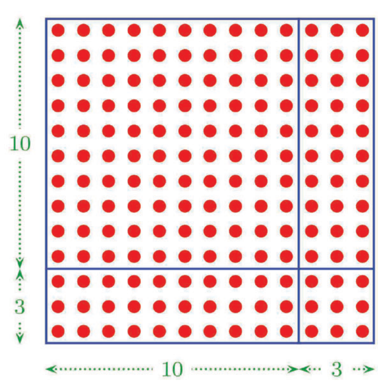
ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದ್ದು ಹೇಗೆ? (**ಗುಣಾಕಾರ ರೀತಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಆಯತ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗ).



	10	1	
10	100	10	110
1	10	1	11
			121



	10	2	
10	100	20	120
2	20	4	24
			144



	10	3	
10	100	30	130
3	30	9	39
			169

ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ನೀಟಕ್ಕೂ ಕೂಡಿಸುವುದರ ಬದಲು, ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

	10	1
10	100	10
1	10	1

	10	2
10	100	20
2	20	4

	10	3
10	100	30
3	30	9

ಈ ಕೂಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$11 \times 11 = 100 + (10 + 10) + 1$$
$$12 \times 12 = 100 + (20 + 20) + 4$$
$$13 \times 13 = 100 + (30 + 30) + 9$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$11^2 = 10^2 + (2 \times 10) + 1^2$$
$$12^2 = 10^2 + (2 \times 20) + 2^2$$
$$13^2 = 10^2 + (2 \times 30) + 3^2$$

ಇನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 14 ರ ಮತ್ತು 15 ರ ವರ್ಗವನ್ನು (ಕೋಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡದೆಯೇ) ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$\begin{aligned} 14^2 &= 10^2 + (2 \times 40) + 4^2 \\ &= 100 + 80 + 16 \\ &= 196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15^2 &= 10^2 + (2 \times 50) + 5^2 \\ &= 100 + 100 + 25 \\ &= 225 \end{aligned}$$

16, 17, 18, 19 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇನ್ನು 20 ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕಷ್ಟವೇನಿಲ್ಲ:

$$\begin{aligned} 20^2 &= 20 \times 20 \\ &= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \\ &= 2 \times 2 \times 10 \times 10 \\ &= 400 \end{aligned}$$

21, 22, 23 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಮೊದಲು ಕೋಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ:

	20	1
20	400	20
1	20	1

	20	2
20	400	40
2	40	4

	20	3
20	400	60
3	60	9

ಕೂಡಿಸುವಿಕೆಯು ಹೀಗೂ ಆದೀತು:

$$21 \times 21 = 400 + (20 + 20) + 1 = 441$$
$$22 \times 22 = 400 + (40 + 40) + 4 = 484$$
$$23 \times 23 = 400 + (60 + 60) + 9 = 529$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ;

$$21^2 = 20^2 + (2 \times 20) + 1^2$$
$$22^2 = 20^2 + (2 \times 40) + 2^2$$
$$23^2 = 20^2 + (2 \times 60) + 3^2$$

ಇದರಲ್ಲಿ 20, 40, 60 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭಿಸಿದ್ದು ಹೇಗೆ?

$$21^2 = 20^2 + (2 \times 20 \times 1) + 1^2$$
$$22^2 = 20^2 + (2 \times 20 \times 2) + 2^2$$
$$23^2 = 20^2 + (2 \times 20 \times 3) + 3^2$$

ಇನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 24 ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ;

$$24^2 = 20^2 + (2 \times 20 \times 4) + 4^2$$
$$= 400 + 160 + 16$$
$$= 576$$

ಇದೇ ರೀತಿ 36 ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

	30	6
30	900	180
6	180	36

$$36^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 6) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

ಯಾವುದೇ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು, ಕೋಣೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 79^2 ನೋಡೋಣ:

$$79^2 = 70^2 + (2 \times 70 \times 9) + 9^2$$
$$= 4900 + 1260 + 81$$
$$= 6241$$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 64^2 (ii) 35^2 (iii) 47^2 (iv) 53^2 (v) 88^2

ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

436^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮೊದಲು 36^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$36^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 6) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

ಇನ್ನು 436^2 ಕೋಣೆ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ

	400	36
400	400^2	400×36
36	400×36	36^2

ಆಗ

$$436^2 = 400^2 + (2 \times 400 \times 36) + 36^2$$
$$= 160000 + 28800 + 1296$$
$$= 190096$$

ದಶಮಾಂಶ ವರ್ಗಗಳು

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3.7 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ಇಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು, 3.7×3.7 ಅಲ್ಲವೇ.

ಇಂತಹ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ್ದು ನೆನಪಿಲ್ಲವೇ? (**ದಶಮಾಂಶ ರೀತಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ದಶಮಾಂಶ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

$$3.7^2 = \frac{37}{10} \times \frac{37}{10} = \frac{37^2}{100}$$

ಇನ್ನು ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ 37^2 ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವ:

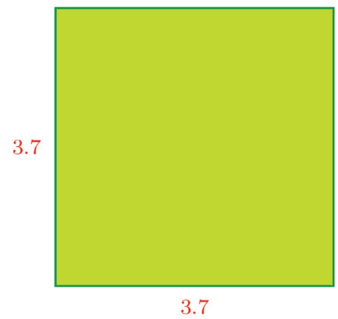
$$37^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 7) + 7^2$$
$$= 900 + 420 + 49$$
$$= 1369$$

ಹಾಗಾದರೆ

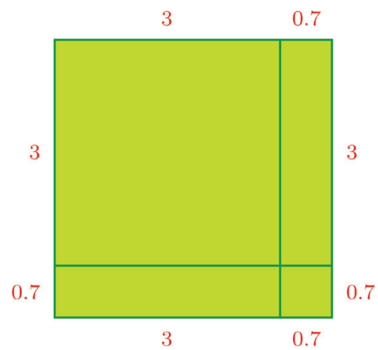
$$3.7^2 = \frac{37^2}{100} = \frac{1369}{100} = 13.69$$

ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 13.69 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

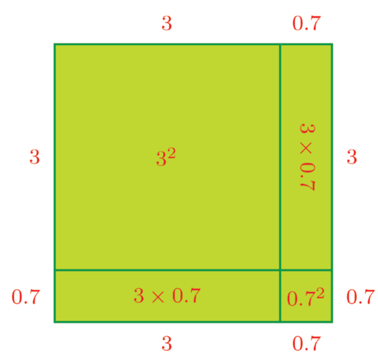
ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಮೊದಲು ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ:



ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 3 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 0.7 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಿದರೋ?



ಚೌಕದ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ:



ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ:

$$\begin{aligned} 3.7^2 &= 9 + (2 \times 3 \times 0.7) + (0.7 \times 0.7) \\ &= 9 + 4.2 + 0.49 \\ &= 13.69 \end{aligned}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೋಣೆ ಮಾಡಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಈ ವರ್ಗವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

	3	0.7
3	9	3×0.7
0.7	3×0.7	0.7×0.7

$$\begin{aligned} 3.7^2 &= 3^2 + (2 \times 3 \times 0.7) + (0.7)^2 \\ &= 9 + 4.2 + 0.49 \\ &= 13.69 \end{aligned}$$

ಚಿತ್ರವನ್ನೂ ಬಿಡಿಸದೆ, ಕೋಣೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಮಾಡಿ 5.8^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

	5	0.8
5	25	5×0.8
0.8	5×0.8	0.8×0.8

$$\begin{aligned} 5.8^2 &= 5^2 + (2 \times 5 \times 0.8) + (0.8)^2 \\ &= 25 + 8 + 0.64 \\ &= 33.64 \end{aligned}$$

ಇನ್ನು ಕೋಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡದೆ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 13.9^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಮೊದಲು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ 13^2 ನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$\begin{aligned} 13^2 &= 10^2 + (2 \times 10 \times 3) + 3^2 \\ &= 100 + 60 + 9 \\ &= 169 \end{aligned}$$

ಇನ್ನು ಈಗ ಮಾಡಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 13.9^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:

$$\begin{aligned} 13.9^2 &= 13^2 + (2 \times 13 \times 0.9) + (0.9)^2 \\ &= 169 + 23.4 + 0.81 \\ &= 193.21 \end{aligned}$$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 2.3 (ii) 8.7 (iii) 10.1 (iv) 12.5 (v) 15.7

(1) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

1.5^2	2.5^2	3.5^2
$= 1^2 + (2 \times 1 \times 0.5) + (0.5)^2$	$= 2^2 + (2 \times 2 \times 0.5) + (0.5)^2$	$= 3^2 + (2 \times 3 \times 0.5) + (0.5)^2$
$= 1 + 1 + 0.25$	$= 4 + 2 + 0.25$	$= 9 + 3 + 0.25$
$= 2.25$	$= 6.25$	$= 12.25$

4.5^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗ 0.5 ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗ 0.5 ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಸುಲಭ ದಾರಿಯಿದೆಯೇ?

(2) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$1.25^2 = 1^2 + (2 \times 1 \times 0.25) + (0.25)^2 = 1 + 0.5 + 0.0625 = 1.5625$$

$$2.25^2 = 2^2 + (2 \times 2 \times 0.25) + (0.25)^2 = 4 + 1 + 0.0625 = 5.0625$$

$$3.25^2 = 3^2 + (2 \times 3 \times 0.25) + (0.25)^2 = 9 + 1.5 + 0.0625 = 10.5625$$

$$4.25^2 = 4^2 + (2 \times 4 \times 0.25) + (0.25)^2 = 16 + 2 + 0.0625 = 18.0625$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗ 0.25 ಆಗಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾರ್ಗವಿದೆಯೇ?

2

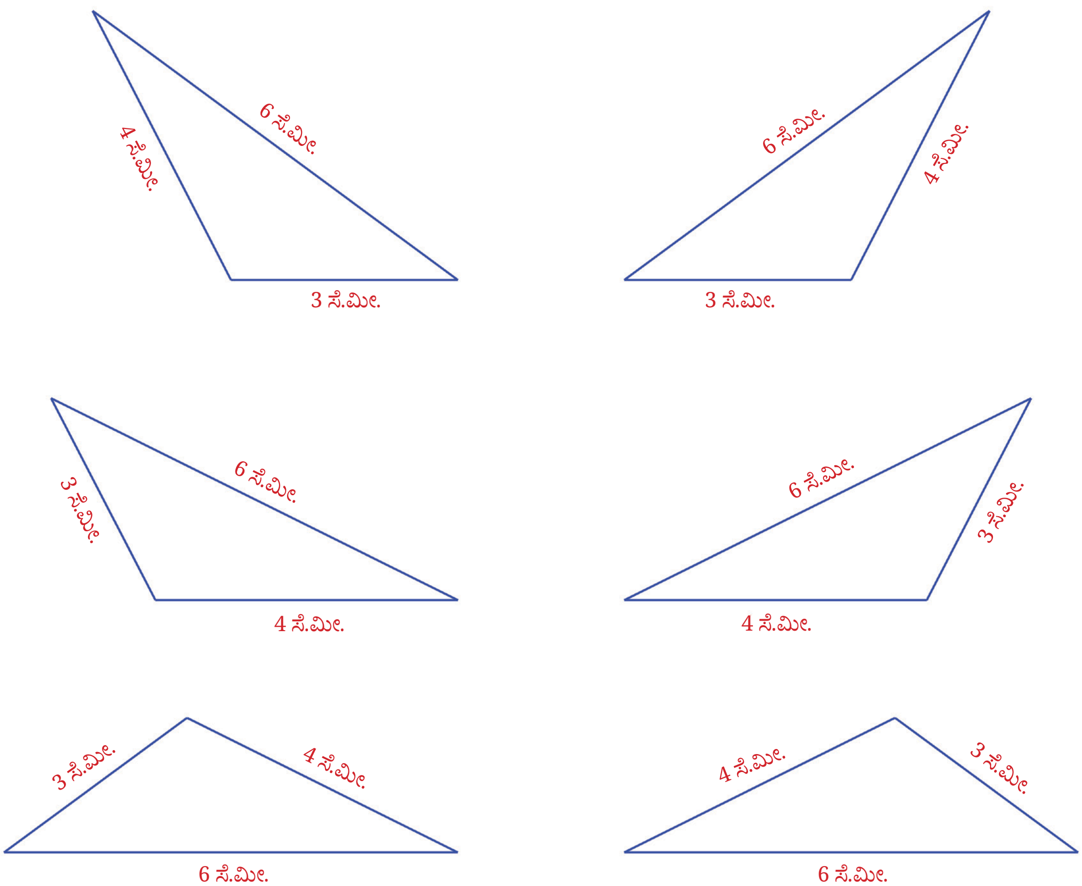
ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು?

ಇದನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು (**ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಗೆರೆಯೂ ಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).



ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಲ್ಲದೆ ಈ ಆರು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗೆ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೋಡಿದೆವು.

ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಲು, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಚಾರ್ಟ್ ಪೇಪರಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲೆ ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವಂತೆ ಇರಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಹಾಗೆ ಹೊಂದಿಸಿ ಇಡುವಾಗ, ಒಂದೇ ಉದ್ದದ ಭುಜಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

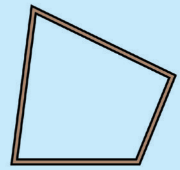
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

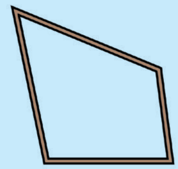
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಬದಲಾಗುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ನಾಲ್ಕು ಮಡಲಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:

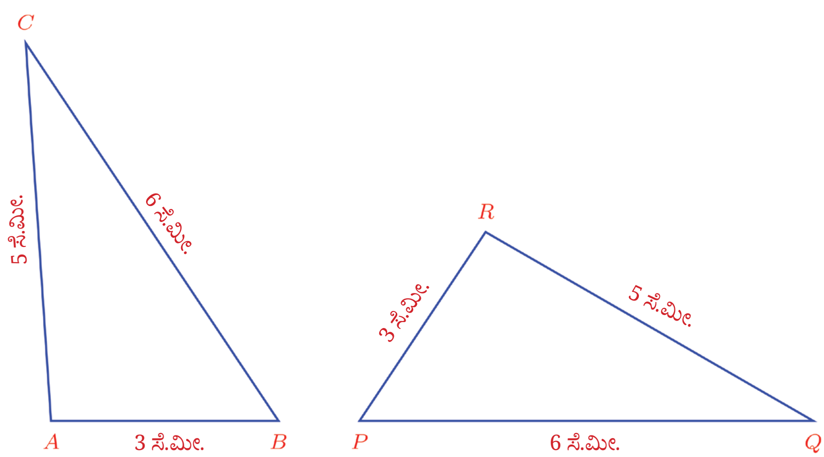


ಇನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಒತ್ತಿ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ:



ಈ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ; ಆದರೆ ಕೋನಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Move around Point tool ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು D ಯ ಸುತ್ತಲೂ ತಿರುಗಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೋ ಕೋನಗಳಿಗೋ ಬದಲಾವಣೆ ಉಂಟಾಗುವುದೇ?

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು PQR ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಯಾವ ಯಾವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು?

ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಗಳು, ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಗಳು, ಇವುಗಳ ಎಡೆಯ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳು ಎಂಬೀ ರೀತಿಯ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲವೇ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಬಹುದು?

ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರಗಳ ಕ್ರಮವು, ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲೇ ಇರುವುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ (**ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಗೆರೆಯೂ ಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ

- 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜವು ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು.
- 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜವು ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು.
- 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜವು ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದು.

ಆಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ

- ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರು ಇರುವುದು.
- ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರು ಇರುವುದು.
- ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರು ಇರುವುದು.

ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯ ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ತ್ರಿಕೋನ PQR ನ ಯಾವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ:

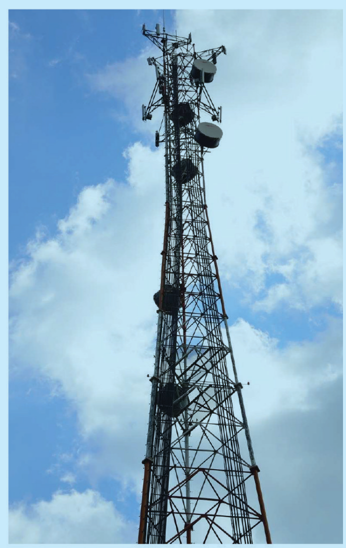
6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು
$\angle A = \angle R$ (ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಗಳು)

5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು
$\angle B = \angle P$ (ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು)

3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು
$\angle C = \angle Q$ (ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಗಳು)

ತ್ರಿಕೋನ ದೃಢತೆ

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು; ಚತುರ್ಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ ಬಲಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ ಅದು ವಾಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಆಗದು; ಯಾಕೆಂದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರುವ ಸರಳುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸೇತುವೆಗಳನ್ನೂ, ಟವರ್ ಗಳನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸುವರು.

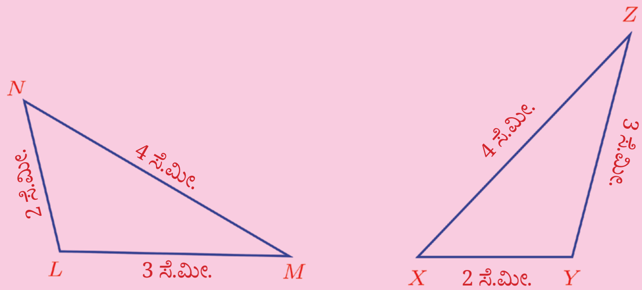


ಆಗ ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

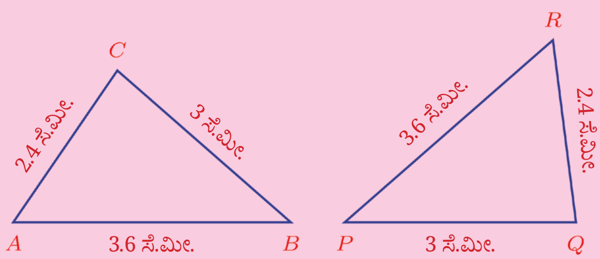
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೂ, ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

(i)



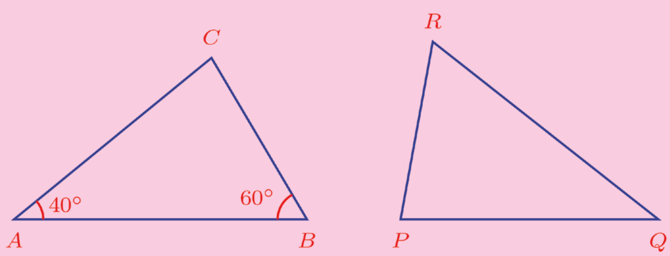
(ii)



(2) ಈ ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

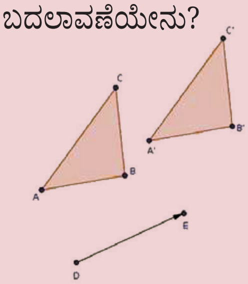
$AB = QR \qquad BC = RP \qquad CA = PQ$

ಆಗಿರುವುದು:

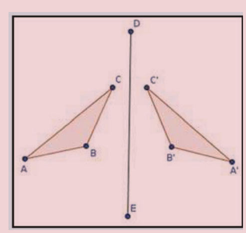


ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ $\angle C$ ಯನ್ನೂ *PQR* ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. D, E ಎಂಬೀ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Translate by Vector ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ΔABC, D, E ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ. ಹೊಸ ಒಂದು ΔA'B'C ' ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ΔABC ಯ ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ΔA'B'C' ಬದಲಾಗುವುದೇ? E ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. E ಎಂಬ ಬಿಂದು Dಗೆ ತಲಪುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯೇನು?



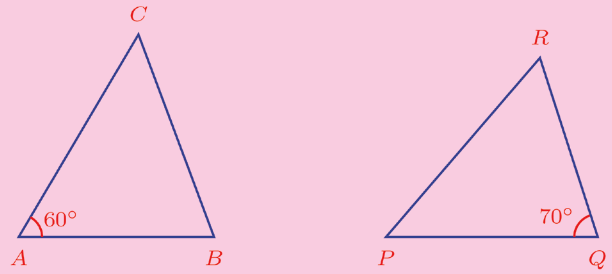
ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ DE ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನೂ ಎಳೆಯಿರಿ. Reflect about Line ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ. ΔA'B'C' ಸಿಗುವುದು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ΔABC ಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ, DE ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ಸ್ಥಾನ, ಬಾಗುವಿಕೆ ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



(3) ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

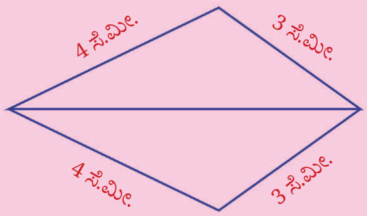
$AB = QR \qquad BC = PQ \qquad CA = RP$

ಆಗಿರುವುದು:



ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣವು ಅದನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.

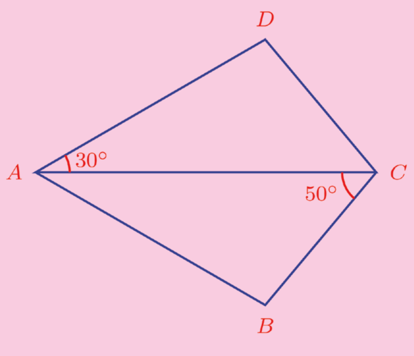


ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ;

$AB = AD, \qquad CB = CD$

ಆಗಿರುವುದು.



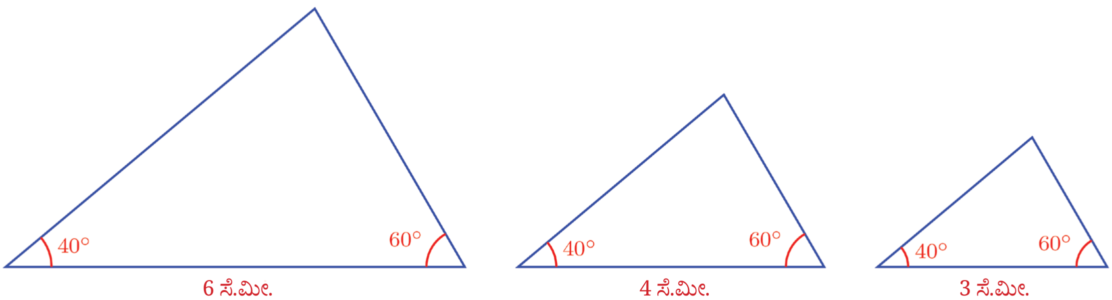
ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಕೋನಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಇದರ ಬದಲು, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಈ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಕೋನ ಲೆಕ್ಕ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಮೂರನೇ ಕೋನವು $80°$ ಆಗಿದೆ.

ಭುಜಗಳೋ?

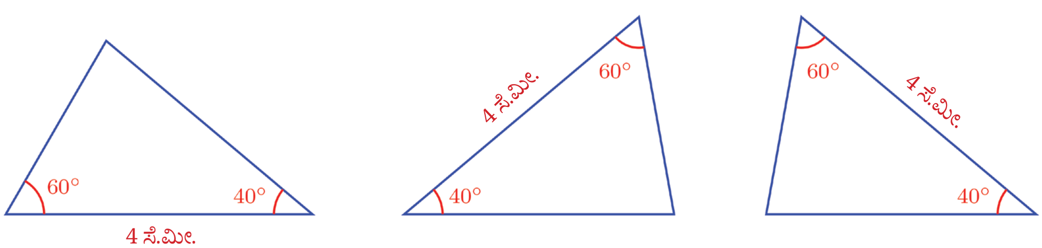
ಇದರಿಂದ ಏನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಬಹುದು?

> ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೂ, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

min = 0, max = 5 ಆಗಿರುವ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4, 5, 6 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ 4a, 5a, 6a ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. (Angle ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.) a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಏನಾಗುವುದು? a = 1 ಆಗುವಾಗಲೋ?

ಈಗ ನೋಡಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ವಿಭಿನ್ನ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ:



ಇವುಗಳೆಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಇದೇ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಆದರೆ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿರುವುದು ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೂರನೇ ಕೋನವೋ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೋ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

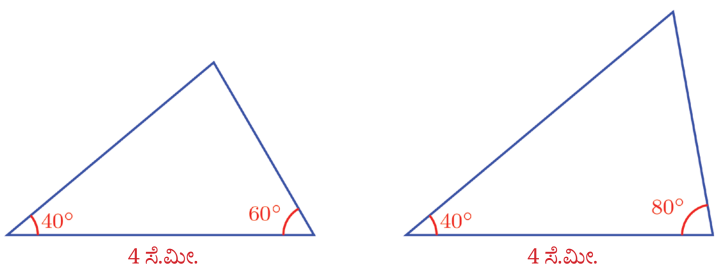
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವೂ ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೇ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು; ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಮೂರನೇ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

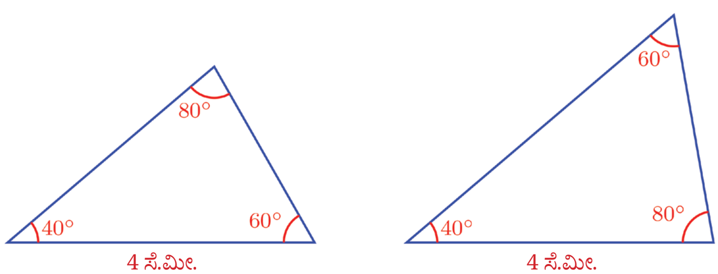
ಆಗ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಮೂರನೇ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:



ಮೂರನೇ ಕೋನಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

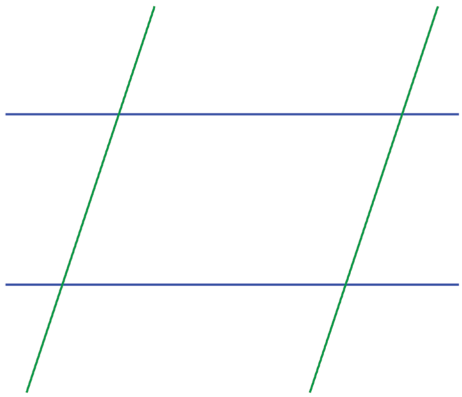


ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು; ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ನೋಡಿದರೆ ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲವೇ.

> ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳೂ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ತತ್ವದ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹಾದುಹೋಗುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕೃತಿಯಾಗಿದೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.



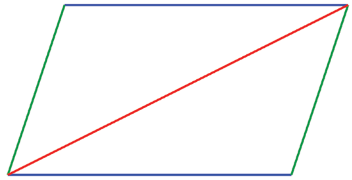
ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಅನಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಹೇಗೆ ಖಚಿತಪಡಿಸಬಹುದು?

ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವು, ಅವುಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡುವುದಾಗಿದೆ.

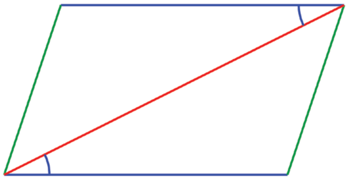
ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಇಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದರೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

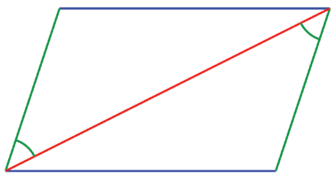


ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

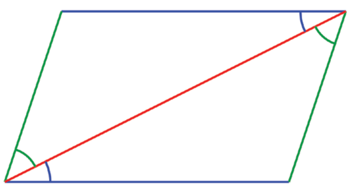
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೆಂಪು ಗೆರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಹಸಿರು ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳು ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಧಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.



ಅಂದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಂಪು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳು, ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಂಪು ಭುಜಕ್ಕೂ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.



ಆಗ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನ ವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.



ಅಂದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

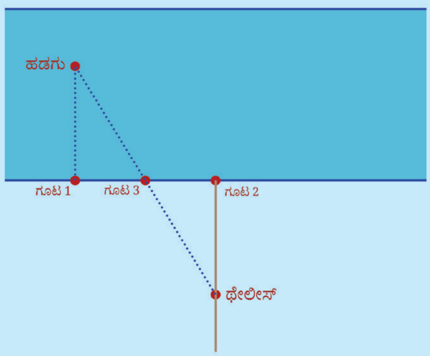
ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ತ್ರಿಕೋನ ತಂತ್ರ

ಬಿ.ಸಿ.ಇ ಆರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್ ನಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಥೇಲೀಸ್ ಎಂಬವನು ತತ್ವಜ್ಞಾನಿಯೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಆಗಿದ್ದನು. ಸಮುದ್ರದ ದಡದಿಂದ ದೂರದಲ್ಲಿ ಲಂಗರು ಹಾಕಿರುವ ಒಂದು ಹಡಗು, ದಡದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಥೇಲೀಸ್ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದನು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಮೊದಲು ಹಡಗಿನಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ದಡದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೂಟವನ್ನು ಊರಬೇಕು. ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ಅದೇ ತೀರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಗೂಟವನ್ನು ಊರಬೇಕು. ಈ ಎರಡೂ ಗೂಟಗಳ ಮಧ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಗೂಟವನ್ನು ಊರಬೇಕು.

ನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಗೂಟದಿಂದ ದಡಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ತೀರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದು; ಹಡಗನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಈ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ನಡೆದು, ಮಧ್ಯದ ಗೂಟವು ಹಡಗಿನ ನೇರಕ್ಕೆ ಕಾಣುವಾಗ ನಡೆಯುವುದನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ, ಆಗ ನಿಂತ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುವುದು.

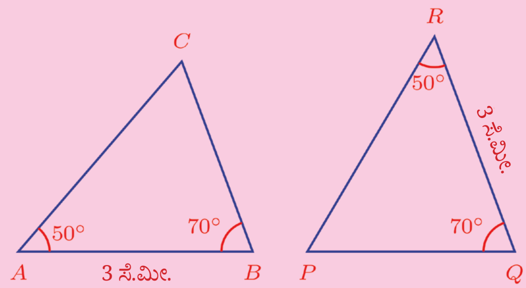


ಈಗ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮತ್ತು ತೀರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ತೀರಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಭುಜಗಳು, ಅವುಗಳ ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಯಾಕೆ?). ಹಾಗಾದರೆ ತೀರದಿಂದ ಹಡಗಿಗಿರುವ ದೂರವು, ಥೇಲೀಸ್ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಂತ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ತೀರದ ನಡುವಿನ ದೂರವೇ ಅಲ್ಲವೇ.

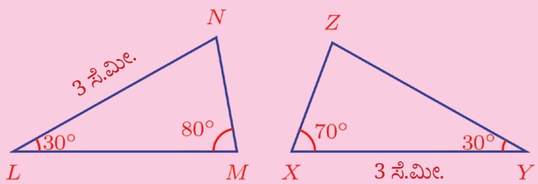
ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

(1) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ, ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬಲಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

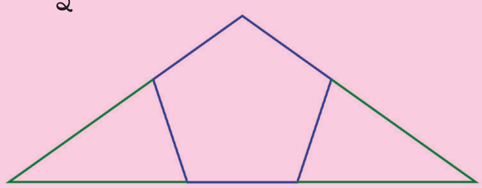
(i)



(ii)



(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಪಂಚಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ:



(i) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೇ? ಯಾಕೆ?

(ii) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ? ಯಾಕೆ?

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

(i) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಭುಜದಿಂದ ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಉನ್ನತಿ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಉನ್ನತಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ? ಯಾಕೆ?

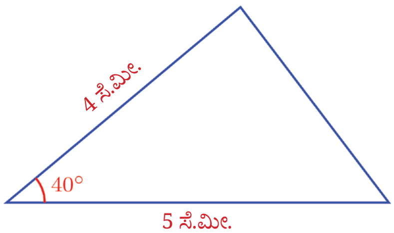
(ii) ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಕು; ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದರೂ ಸಾಕು.

ಇತರ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವಾದರೋ?

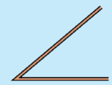


ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಭುಜಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

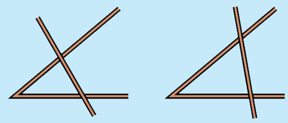
ಈ ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳಂತೆ, ಮೂಲೆಗಳ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿ ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ:

ತ್ರಿಕೋನ ನಿರ್ಧಾರ

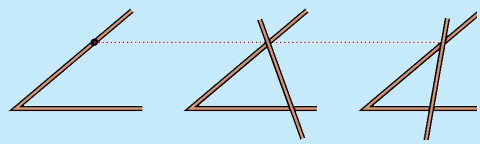
ಉದ್ದದ ಒಂದು ಮಡಲಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿರಿ.



ಈ ಕೋನದ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಮಡಲಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಇರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

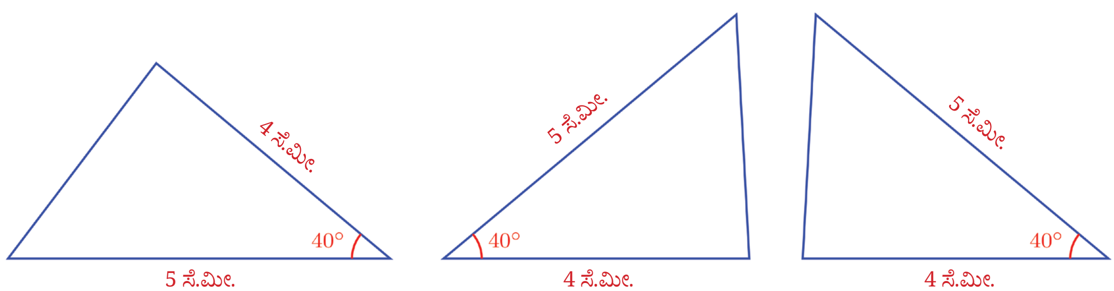


ಮೇಲಿನ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುರುತು ಹಾಕಿ ಎರಡನೆಯ ಮಡಲಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅದರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಬೇಕೆಂದು ಹೇಳಿದರೋ?



ಮೇಲಿನ ಭುಜದಲ್ಲೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದಲ್ಲೂ ಗುರುತು ಹಾಕಿ, ಈ ಎರಡು ಗುರುತುಗಳ ಮೂಲಕವೇ ಎರಡನೇ ಕಡ್ಡಿಯು ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಇಡಬೇಕೆಂದು ಹೇಳಿದರೋ? ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುವುವು?

ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಅಲ್ಲವೇ?

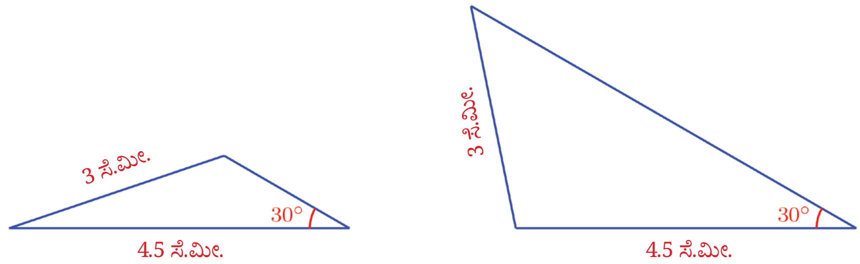


ಆದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೂರನೇ ಭುಜವೋ ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳೋ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

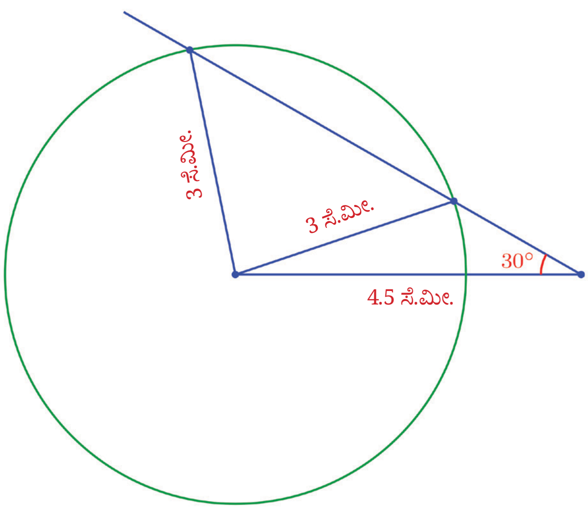
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು; ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಭುಜಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಬದಲು ಉಳಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:

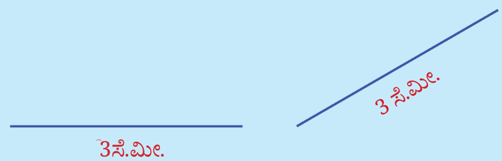


ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ, ಒಂದು ಕೋನವೂ ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಆದರೆ ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳೋ, ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳೋ, ಸಮಾನವಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ?

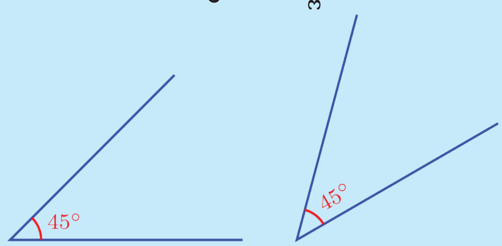
> ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವೂ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದರೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜ ಮತ್ತು ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಸಮಾನತೆ

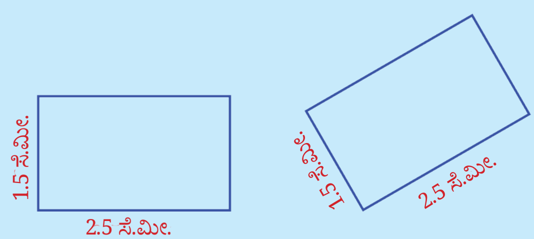
ಗೆರೆಗಳು, ಕೋನಗಳು, ಆಯತಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮೊದಲಾದ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಿವೆ.



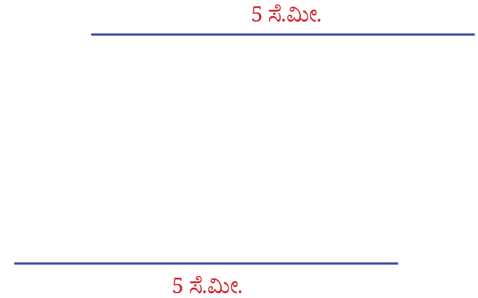
ಉದ್ದ ಸಮಾನವಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆದರೂ ಅವುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳುವುದಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



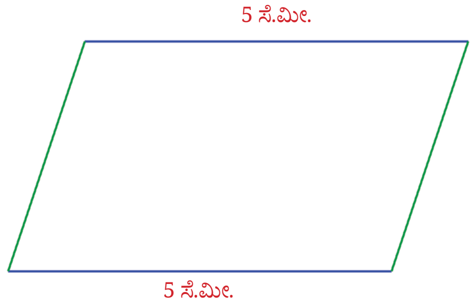
ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಹೇಳುವರು. ಸಮಾನ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನೂ ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ:

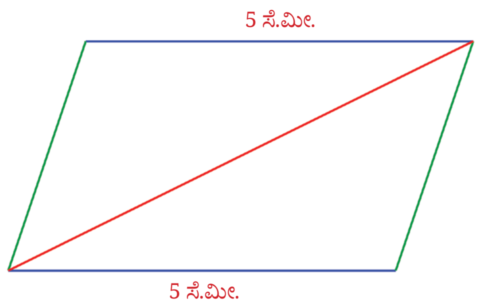


ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ:



ಚಿತ್ರದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ (ಹಸಿರು) ಗೆರೆಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಈ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು ಎಂದು ಅನಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಹೇಗೆ ಖಚಿತಪಡಿಸಬಹುದು?

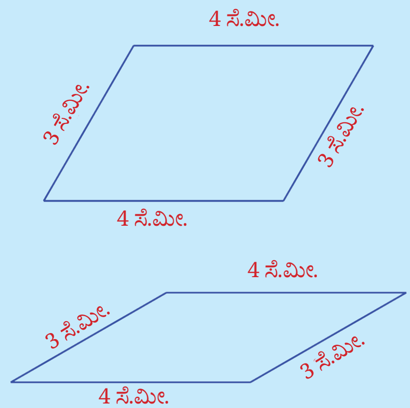


ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ನೀಲ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಾನತೆ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

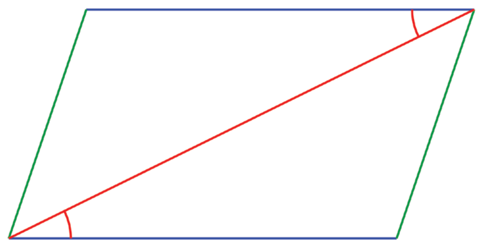


ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು. ಆದರೆ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳ ಸಮಾನತೆಯ ಕುರಿತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಹೀಗೆ ಹೇಳಿರುವನು;

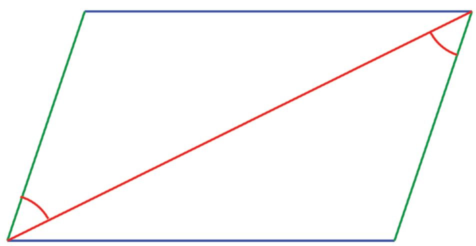
ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಸರಿಹೊಂದುವುದು ಸಮಾನ ವಾಗಿರುವುದು.

ಪುಟ 26 ರ ಗೆರೆಗಳು, ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳೆಲ್ಲಾ ತಿರುಗಿಸಿ ಇರಿಸಿದಾಗ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ
ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳೋ?



ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ನೀಲ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಕೆಂಪು ಗೆರೆ ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಇವುಗಳು; ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
ಅಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.
ಆಗ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಹಸಿರು ಗೆರೆಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದ ಇರಬೇಕಲ್ಲವೇ.
ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.



ಅಂದರೆ, ಕೆಂಪು ಗೆರೆ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

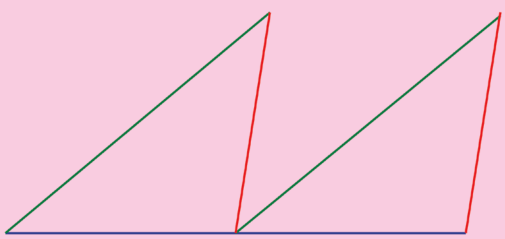
ಆಗ ಹಸಿರು ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಆಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ, ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ:

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದಾದರೆ, ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದು.

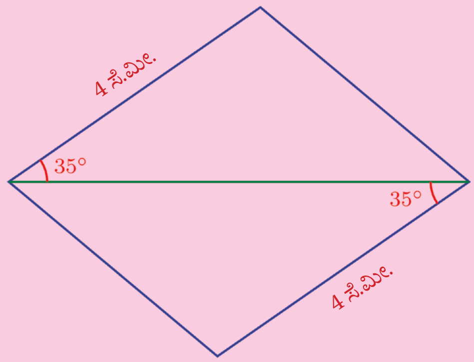
(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಹಸಿರು ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಅಡ್ಡವಾಗಿರುವ ನೀಲ ಗೆರೆಯ ಎಡ ತುದಿಯಿಂದಲೂ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ನೀಲ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



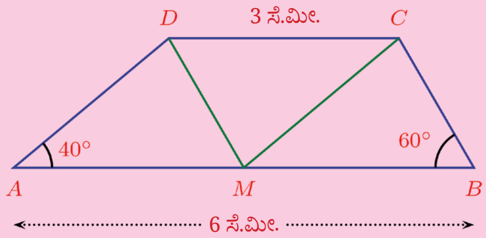
(i) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

(ii) ಕೆಂಪು ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೇ?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ?



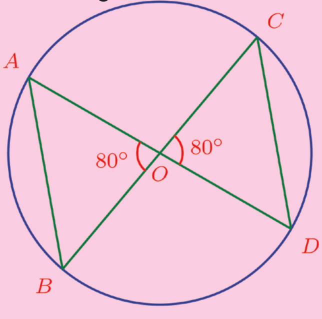
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, AB, CD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ M.



(i) $AMCD$, $MBCD$ ಎಂಬೀ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

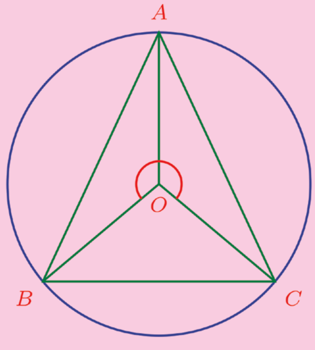
(ii) AMD, MBC, DCM ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು A, B, C, D ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.



AB, CD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು A, B, C ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $\angle AOB$, $\angle AOC$ ಎಂಬೀ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.



AB, AC ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

ಈ ವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳೋಣ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ ಮೂರು ಕೋನಗಳೂ ಸೇರಿ ಆರು ಅಳತೆಗಳಿರುವುವಲ್ಲವೇ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಆರು ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಇಡಬಹುದು;

ಅಂದರೆ, ಅವುಗಳು **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ (Equal Triangles)**.

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು, ಈ ಆರೂ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆಯೇ? ಪ್ರತ್ಯೇಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕು ಎಂದಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದು:

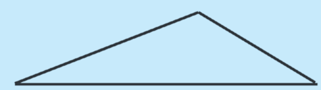
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು; ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

- **ಮೂರು ಭುಜಗಳು**
- **ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವೂ**
- **ಒಂದು ಭುಜವೂ ಅದರ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ**

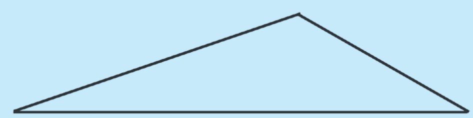
ಸರಿಯಲ್ಲದ ಹೊಂದಿಕೆ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಎಂಬೀ ಒಟ್ಟು ಆರು ಅಳತೆಗಳು ಇರುವುದು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಈ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು (ಮೂರು ಭುಜಗಳು, ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ, ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು) ಸಮಾನವಾದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವುದೆಂದೂ (ಅಂದರೆ ಬಾಕಿ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು) ನೋಡಿದೆವು.

ಇನ್ನು ಒಂದು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳು 4, 6, 9 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



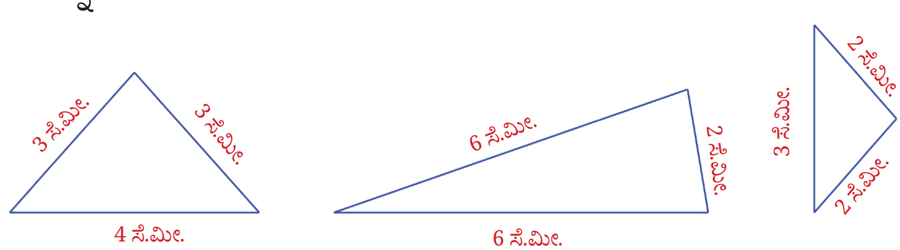
ನಂತರ 6, 9, 13.5 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರಿ.



ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? (ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ನೋಡಿದರೂ ಸಾಕು.) ಅಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಐದು ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

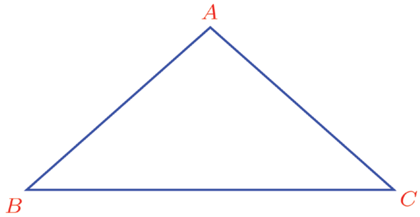
ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು **ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು (Isosceles triangles)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಈ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



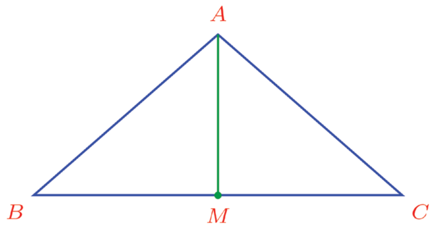
ಇದರ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಚಾರ್ಟ್ ಪೇಪರಿನಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಸಮಾನವಾದ ಭುಜಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವಂತೆ ನಡುವಿನಲ್ಲಿ ಮಡಚಿ ನೋಡಿರಿ. ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಕೋನಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ?

ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಮಡಚಿದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆದು ನೋಡುವ; ಅಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ಮೂಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು:



ಚಿತ್ರದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳು *ABM, ACM* ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

> min = 3, max = 15 ಆಗುವಂತೆ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಉದ್ದ 6 ಆಗಿರುವ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. A, B ಎಂಬಿವುಗಳು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ a ಆಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನುಗುರುತಿಸಿರಿ. ΔABC ಯನ್ನುಎಳೆಯಿರಿ. ಇನ್ನು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಮರೆಮಾಡಿರಿ. a ಯ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಕೋನಗಳೋ?
>
> a = 6 ಆಗುವಾಗ ಕೋನಗಳು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

- $AB = AC$ ಎಂದು ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿರುವೆವು.
- M ಎಂಬ ಬಿಂದು BC ಎಂಬ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $BM = CM$
- AM ಎಂಬ ಗೆರೆ, ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜವಾಗಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, *ABM, ACM* ಎಂಬೀ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ.

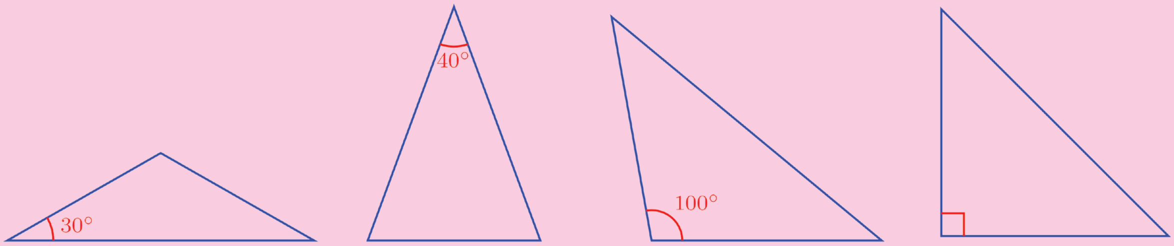
ಆಗ $\angle B = \angle C$

ಇವುಗಳು ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳೇ ಅಲ್ಲವೇ?

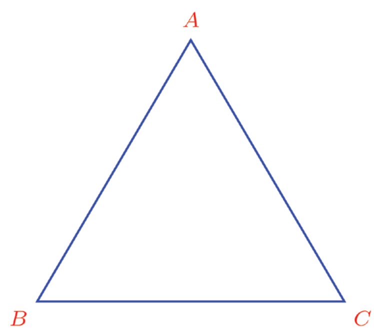
ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯುವ:

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?



ಇನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ : ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾದರೋ?



ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

AB, AC ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನನುಸರಿಸಿ B ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ;

BA, BC ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನನುಸರಿಸಿ, A ಮತ್ತು C ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ;

ಆಗ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ?

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು $180° \div 3 = 60°$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ $60°$ ಆಗಿರುವುದು.

min = 0, max = 90° ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು Angle Slider 'a' ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. (Slider Tool ತೆಗೆದು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಸಿಗುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ Angle ಎಂಬುದನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು).

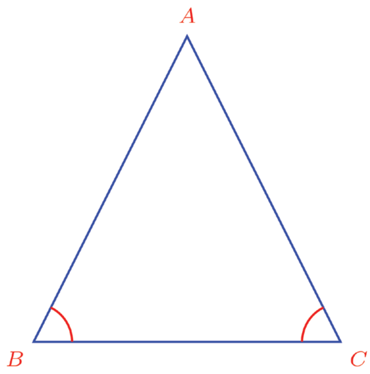
ಉದ್ದ 6 ಆಗುವಂತೆ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle A = \angle B = a$ ಆಗುವಂತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ΔABC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

a ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. a = 60° ಆಗುವಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಏನು? 45° ಆದರೋ?

ಇನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

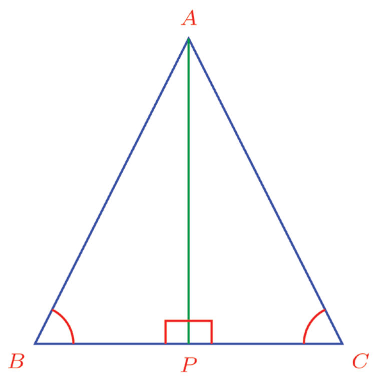


ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ *B* ಮತ್ತು *C* ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

AB, *AC* ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಪ್ರಶ್ನೆ.

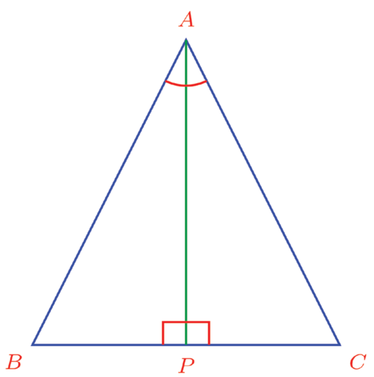
ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನ *ABC* ಯನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ:

ಇಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಮೂಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಬದಲು, ಮೇಲಿನ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಸುಲಭ:



ಈಗ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ *ABP*, *ACP* ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, *B*, *C* ಎಂಬೀ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ *P* ಎಂಬ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಆಗ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೇ ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ.



AP ಎಂಬ ಗೆರೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಲಂಬ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ AB, AC ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

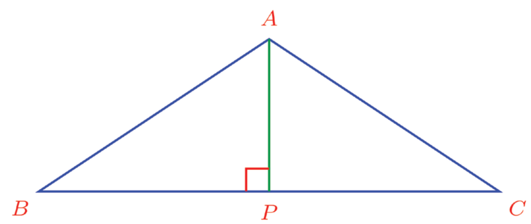
ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಇವುಗಳೇ ಅಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಮೊದಲು ಬರೆದ ತತ್ವವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೂ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಮೂಲೆಯಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



AB, AC ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle B, \angle C$ ಎಂಬಿವುಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳು ABP, ACP ಎಂಬೀ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಕೋನವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\angle BAP = \angle CAP$$

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

AP ಎಂಬ ಗೆರೆ, BAC ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ AP ಎಂಬ ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

$$BP = CP$$

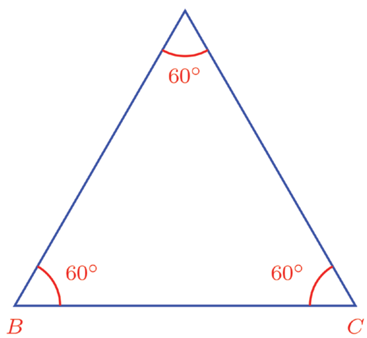
ಅಂದರೆ, AP ಎಂಬ ಲಂಬವು BC ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ಸಮಾನವಾದ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಮೂಲೆಯಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬವು, ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನೂ ಆ ಮೂಲೆಯ ಕೋನವನ್ನೂ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ:

ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ $60°$ ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದರ ಬದಲು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು $60°$) ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ?



ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವು.

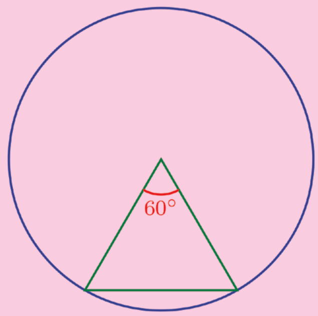
ಅಂದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle B = \angle C$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ $AC = AB$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

$\angle A = \angle C$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $BC = AB$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಆಗ $AB = BC = AC$ ಆಯಿತು. ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದು.

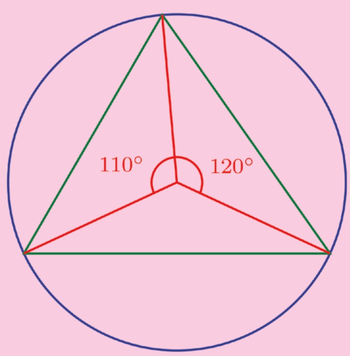
(1) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನ $120°$ ಆಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

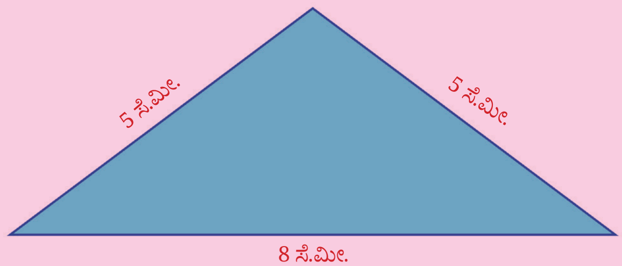


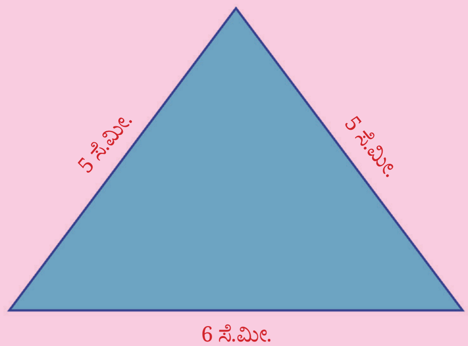
ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಮೂರು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರ ಅಳತೆಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿವೆ.

(i) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರನೇ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ (ಹಸಿರು) ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.





(5) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನವು 70° ಆಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು?

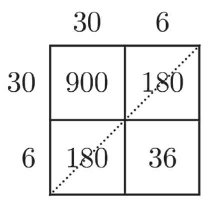
(6) ಒಂದು ಕೋನ 70° ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಸಮಾನವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?

3

ವರ್ಗಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗ

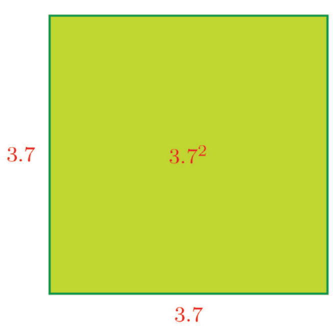
ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು **ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

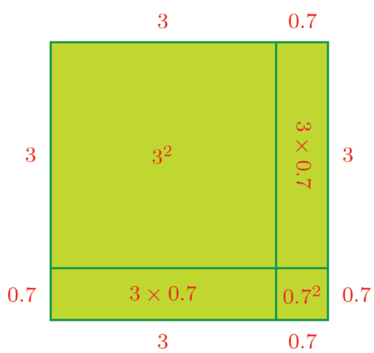


$$36^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 6) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

3.7^2 ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಹೇಗೆ?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3.7 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ? (**ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ದಶಮಾಂಶ ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ):





$$3.7^2 = 3^2 + (2 \times 3 \times 0.7) + (0.7)^2$$
$$= 9 + 4.2 + 0.49$$
$$= 13.69$$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, 36 ನ್ನು 30 + 6 ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದು ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು; ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ 3.7 ನ್ನು 3 + 0.7 ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವ ಮೂಲಕವೂ.

ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ 36^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದನ್ನೆಲ್ಲ ಕೂಡಿಸಿದ್ದೇವೆ?

$30^2 = 30$ ರ ವರ್ಗ

$6^2 = 6$ ರ ವರ್ಗ

$2 \times 30 \times 6 = 30$ ಮತ್ತು 6 ರ ಗುಣಲಬ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿ.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ 3.7^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು ಯಾವುದನ್ನೆಲ್ಲ?

$3^2 = 3$ ರ ವರ್ಗ

$0.7^2 = 0.7$ ರ ವರ್ಗ

$2 \times 3 \times 0.7 = 3$ ಮತ್ತು 0.7 ರ ಗುಣಲಬ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿ.

ಇತರ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕ್ರಿಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚುಟುಕಾಗಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೇ (**ಬೀಜಗಣಿತ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ವರ್ಗ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು x, y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಮೊತ್ತವು $x + y$

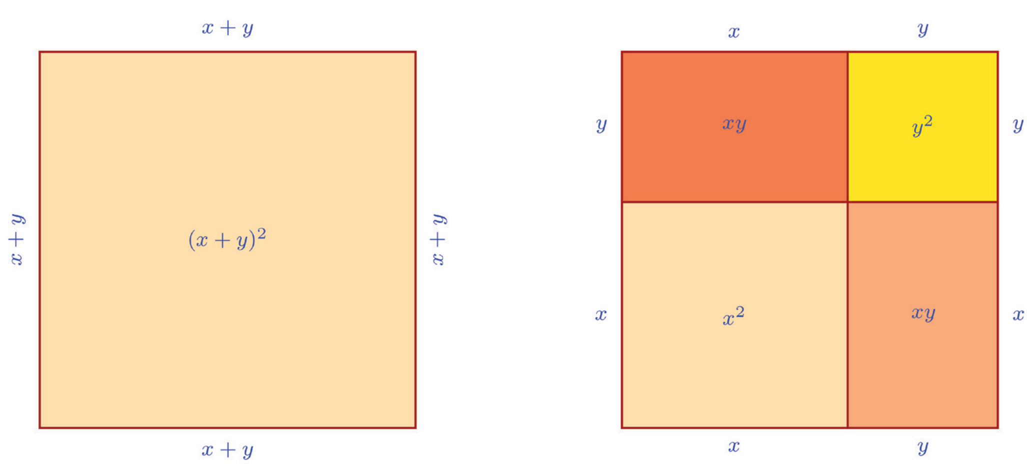
ಇದರ ವರ್ಗವೋ?

$(x + y)^2$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

ಆಗ ತತ್ವದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ ಯಾವುದು?

x, y ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸಬಹುದು:



$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x, y ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

y ಆಗಿ 1 ತೆಗೆದರೋ?

$$(x+1)^2 = x^2 + 1 + 2x$$

ಬೀಜಗಣಿತವಾಚಕದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯುವುದು ಕ್ರಮವಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನನುಸರಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಆಗ ಮೊದಲು ಬರೆದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ಒಂದು ಉಪತತ್ವವಾಗಿ:

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೂ, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

ಅಂದರೆ,

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದೊಂದಿಗೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

$$2^2 = 1^2 + (2 \times 1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$3^2 = 2^2 + (2 \times 2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$4^2 = 3^2 + (2 \times 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

....

$$11^2 = 10^2 + (2 \times 10) + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$$

$$12^2 = 11^2 + (2 \times 11) + 1 = 121 + 22 + 1 = 144$$

....

ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. (**ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ).

ಇನ್ನು $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ y ಆಗಿ $\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 \times x \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{1}{4} + x$$

$$= x^2 + x + \frac{1}{4}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಉಪತತ್ವವಾಗಿ:

x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

ಇದರಲ್ಲಿಯೂ x ಆಗಿ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$
$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + 2 + \frac{1}{4} = 4 + 2 + \frac{1}{4} = 6\tfrac{1}{4}$$
$$\left(3\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3^2 + 3 + \frac{1}{4} = 9 + 3 + \frac{1}{4} = 12\tfrac{1}{4}$$

ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು **ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ದಶಮಾಂಶ ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಇನ್ನು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

x ಆಗಿ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$$
$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 2, 3, 4, ... ಎಂಬೀ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{1}{2^2} + 2 = 6\tfrac{1}{4}$$
$$\left(3\tfrac{1}{3}\right)^2 = 3^2 + \frac{1}{3^2} + 2 = 11\tfrac{1}{9}$$
$$\left(4\tfrac{1}{4}\right)^2 = 4^2 + \frac{1}{4^2} + 2 = 18\tfrac{1}{16}$$

....

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ:

(i) 15^2 (ii) 25^2 (iii) 33^2 (iv) $\left(5\tfrac{1}{2}\right)^2$ (v) $\left(10\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vi) $\left(25\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vii) $\left(5\tfrac{1}{5}\right)^2$

(2) ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗದ ಕುರಿತು ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಸಿಗುವ ಉಪತತ್ವ ಯಾವುದು? ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವವುಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) 22^2 ಎಷ್ಟು?

(ii) 52^2 ಎಷ್ಟು?

(iii) $25^2 = 625$ ಆಗಿದೆ; 27^2 ಎಷ್ಟು?

(3) $43^2 = 1849$ ಆಗಿದೆ.

(i) 44^2 ಎಷ್ಟು? (ii) 46^2 ಎಷ್ಟು?

ಸವಿಶೇಷ ಸ್ವಭಾವವಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗದ ಕುರಿತು ಇರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ:

15^2	25^2	35^2
$= (10+5)^2$	$= (20+5)^2$	$= (30+5)^2$
$= 10^2 + (2 \times 10 \times 5) + 5^2$	$= 20^2 + (2 \times 20 \times 5) + 5^2$	$= 30^2 + (2 \times 30 \times 5) + 5^2$
$= 100 + 100 + 25$	$= 400 + 200 + 25$	$= 900 + 300 + 25$
$= 225$	$= 625$	$= 1225$

ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆ (ಒಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ) 5 ಆಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು 25 ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿರುವುದೇ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವಲ್ಲವೇ; (ಐದನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಶೇಷ ಲೆಕ್ಕಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಆಗ 5 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 5.

ಇದರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು n ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $10n + 5$ (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬೀಜಗಣಿತ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಮಡಿಯೂ ಶೇಷವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ).

ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

$$(10n+5)^2 = (10n)^2 + (2 \times 10n \times 5) + 5^2$$
$$= 100n^2 + 100n + 25$$

ಇದರ $100n^2 + 100n$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

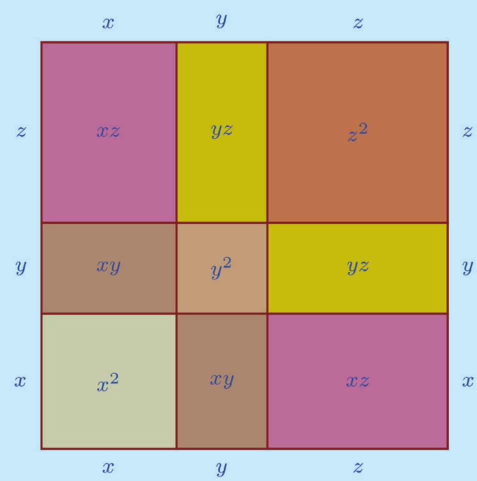
$$100n^2 + 100n = 100(n^2 + n)$$

ಆಗ

$$(10n+5)^2 = 100(n^2+n) + 25$$

ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚೌಕವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವಂತೆ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವನ್ನೂ ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಿಗುವುದು:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

ಅಂದರೆ, $n^2 + n$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 25 ಕೂಡಿಸಿರುವುದು $10n + 5$ ರ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.
ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು 0.
ಆಗ 25 ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು 25 ಆಗುವುದು.
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನನುಸರಿಸಿ

$$\begin{aligned} 65^2 &= ((6^2 + 6) \times 100) + 25 \\ &= (42 \times 100) + 25 \\ &= 4200 + 25 \\ &= 4225 \end{aligned}$$

ಇಂತಹ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಅಂಕೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು; ಅದಕ್ಕಾಗಿ $(10n + 5)^2 = 100(n^2 + n) + 25$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $n^2 + n$ ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವಾ

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

ಆಗ

$$(10n + 5)^2 = (n(n + 1) \times 100) + 25$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದರಿಂದ, ವರ್ಗದ ಕೊನೆಯ 25 (ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು) ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ $n(n + 1)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.
ಇದರಲ್ಲಿ n ಎಂಬುದು, ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ ಅಂಕೆಯಾದ 5 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ವರ್ಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ, ಅಂದರೆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ 25 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ.
ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\begin{aligned} 75^2 &= (7 \times 8 \times 100) + 25 \\ &= 5600 + 25 \\ &= 5625 \end{aligned}$$

195^2 ಆದರೋ?

ಮೊದಲು 19×20 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ:

$$19 \times 20 = 380$$

ಇದರ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 25 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ 195 ರ ವರ್ಗವಾಗುವುದು.

$$195^2 = 38025$$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 0, 1, 2 ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ.

ಶೇಷ 0 ಆದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ; ಆಗ ಮೂರರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 1 ಅಥವಾ 2.

76 ರ ಆಟ

$$76^2 = 5776$$

$$176^2 = 30976$$

$$276^2 = 76176$$

76 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನೋಡಿರಿ. ಯಾವ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ?

ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ?

76 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $100n + 76$ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(100n + 76)^2 = 10000n^2 + 15200n + 5776.$$

n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $10000n^2$ ಮತ್ತು $15200n$ ನ ಮೊತ್ತದ ಒಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಹತ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದೊಂದಿಗೆ 5776 ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು 76 ಆಗಿರುವುದು.

76 ರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಇರುವುದೇ?

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೋ?

ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಗ	3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ
1	1	1
2	4	1
4	16	1
5	25	1

ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುವುದೋ? ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ.

3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 1 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ

$$3n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬೀಜಗಣಿತ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಮಡಿಯೂ ಶೇಷವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೋ?

$$(3n + 1)^2 = (3n)^2 + (2 \times 3n \times 1) + 1^2$$

$$= 9n^2 + 6n + 1$$

ಇದರ $9n^2 + 6n$ ಎಂಬುದನ್ನು 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯುವ:

$$9n^2 + 6n = 3(3n^2 + 2n)$$

ಆಗ

$$(3n + 1)^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1$$

ಅಂದರೆ, ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗವು, 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯದೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ; ಅಥವಾ, 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 1 ಶೇಷ ಸಿಗುವವುಗಳಾಗಿವೆ.

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸಹಾಯ

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಪೈಥನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರೋಗ್ರಾಮ್ ಬರೆಯುವ;

```
for n in range(1,11):
    if n%3! = 0:
        print (n, n**2, (n**2)%3)
```

ಇದರ ಮೊದಲ ಸಾಲು, 1 ರಿಂದ 10 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ *n* ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ *n*%3 ಎಂಬುದು *n* ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶವೂ, ! = 0 ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರಬಾರದು ಎಂದು. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ if n% 3! = 0 ಎಂದು ಓದುವುದರ ಅರ್ಥವು *n* ನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು 0 ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಕೊನೆಯ ಗೆರೆಯು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಇದು, ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು, ಅವುಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಬರೆದು ತೋರಿಸಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರೋಗ್ರಾಮ್ ನಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯು ಸಿಗುವುದು.

```
1   1    1
2   4    1
4   16   1
5   25   1
7   49   1
8   64   1
10  100  1
```

ಇನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 2 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ?

ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು,

$$3n + 2, \ (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು

$$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n) + 4$$

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 4 ನ್ನು 3 + 1 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ

ಆಗ

$$\begin{aligned}(3n + 2)^2 &= 3(3n^2 + 4n) + 3 + 1 \\ &= 3(3n^2 + 4n + 1) + 1\end{aligned}$$

ಪುನಃ 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯದೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 2 ಆದರೂ, ಅದರ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಆಗಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

3 ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷ 1 ಆಗಿದೆ.

3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವೇ ಅಲ್ಲವೇ (ಯಾಕೆ?)

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 0 ಅಥವಾ 1 ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 2 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಲ್ಲ.

(1) ಹಲವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಯಾಗಲಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(i) ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

(ii) ಯಾವುದೇ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 1 ಆಗಿದೆ.

(iii) ಯಾವುದೇ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 1 ಆಗಿದೆ.

(2) ಹಲವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಚಾರಗಳ ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(i) ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು 0 ಅಥವಾ 1 ಆಗಿದೆ.

(ii) 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವು 2 ಅಥವಾ 3 ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಲ್ಲ.

(3) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

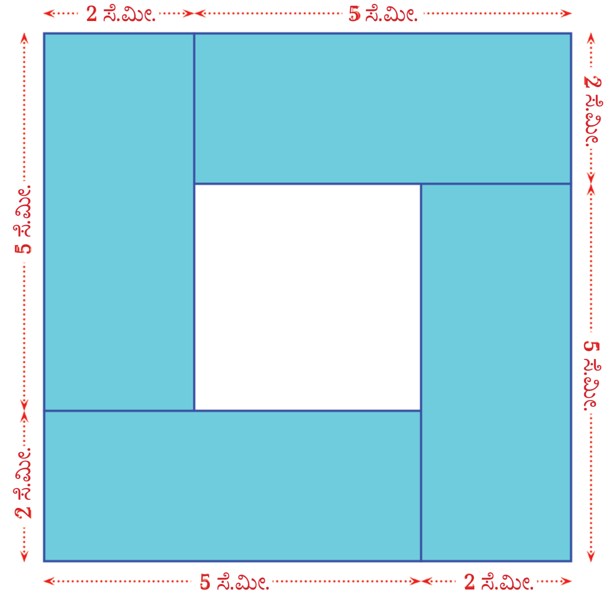
(ಸೂಚನೆ: ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ.)

(4) ಒಂದರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 1 ರಲ್ಲಿಯೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. 5 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೋ?

6 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೋ?

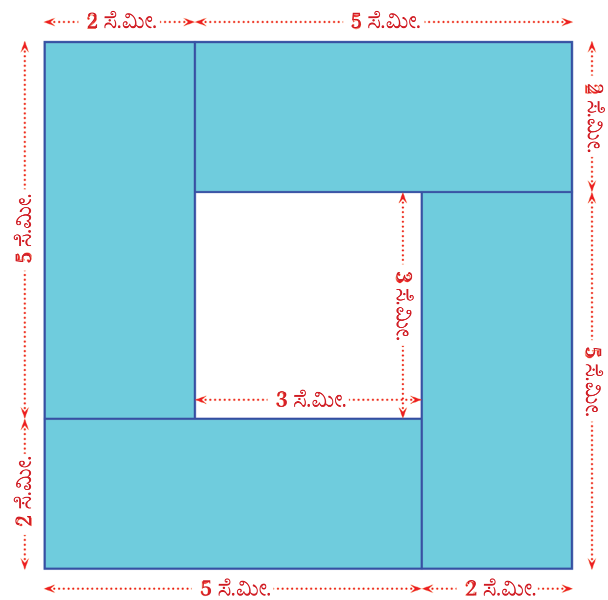
ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚೌಕದ ಒಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

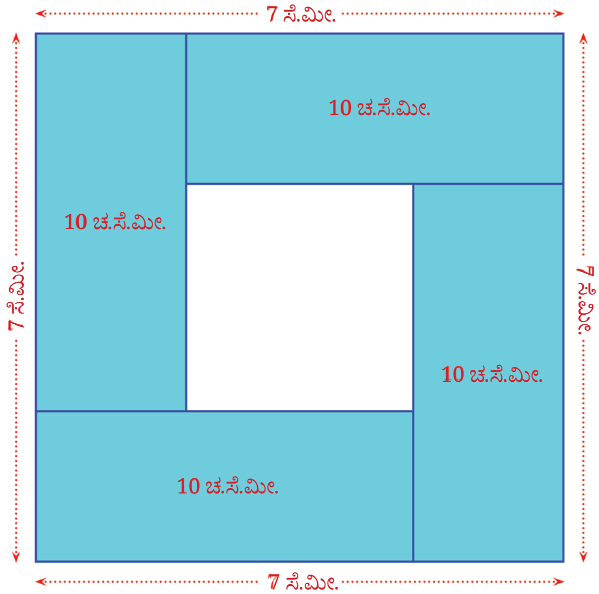
ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ:



ಅಂದರೆ ಇದೊಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ; ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $3^2 = 9$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು: ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ:



ಅಂದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$7^2 - (10 \times 4) = 49 - 40 = 9 \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

$$5 - 2 = 3$$

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವೋ?

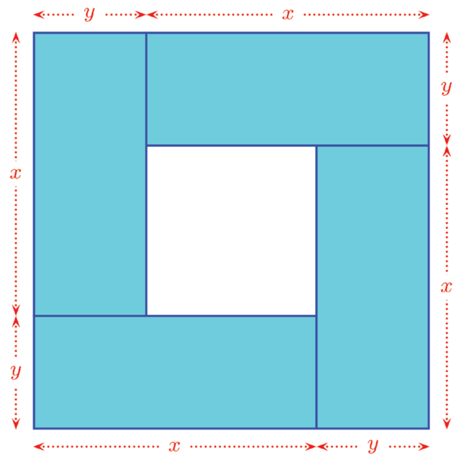
$$5 + 2 = 7$$

ಆಗ ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ?

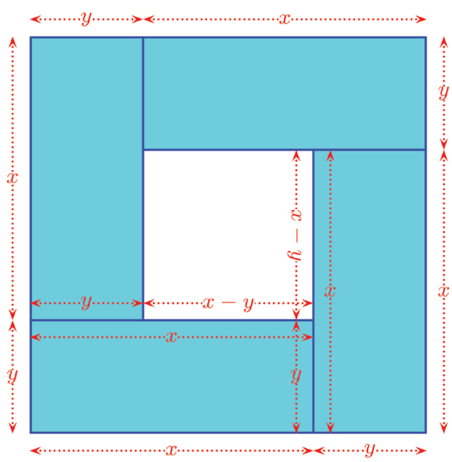
$$(5 - 2)^2 = (5 + 2)^2 - (4 \times 5 \times 2)$$

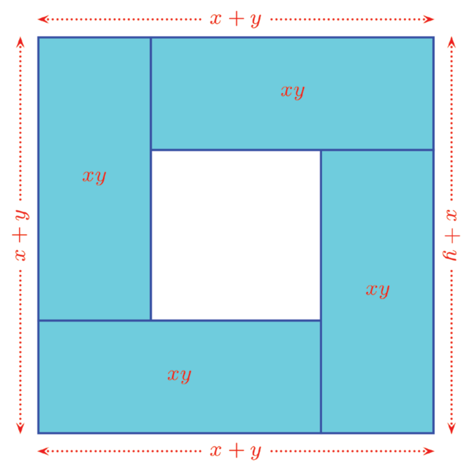
5 ಮತ್ತು 2 ರ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ x, y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡುವ:



ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ:





ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ

ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(x-y)^2$

ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ

ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(x+y)^2 - 4xy$

ಆಗ

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

ಇದರಲ್ಲಿ $(x+y)^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ಈಗ ಲಭಿಸಿದ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$(x-y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy$$

ಸಮವಾಕ್ಯದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಳೆಯುವ $4xy$ ಎಂಬುದು $2xy + 2xy$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ $4xy$ ಕಳೆಯಲು, ಮೊದಲು ಒಂದು $2xy$ ಯನ್ನೂ ನಂತರ ಇನ್ನೊಂದು $2xy$ ಯನ್ನೂ ಕಳೆದರೋ? (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಗಣಿತದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಬರಹ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಒಂದೊಂದಾಗಿಯೂ ಒಟ್ಟಾಗಿಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ).

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy \\ &= x^2 + y^2 + 2xy - 2xy - 2xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy\end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ x, y ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ

***x, y* ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$**

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 99^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $99 = (90+9)$ ಎಂದು ಬರೆದು, ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬದಲು, $99 = (100-1)$ ಎಂದು ಬರೆದು, ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$\begin{aligned}99^2 &= (100-1)^2 \\ &= 100^2 - (2 \times 100 \times 1) + 1^2 \\ &= 10000 - 200 + 1 \\ &= 9801\end{aligned}$$

ಹೀಗೆಯೇ

$$\begin{aligned} 48^2 &= (50-2)^2 \\ &= 50^2 - (2 \times 50 \times 2) + 2^2 \\ &= 2500 - 200 + 4 \\ &= 2304 \end{aligned}$$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(i) 29^2 (ii) 38^2 (iii) 999^2 (iv) $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$ (v) $(9.7)^2$

(2) ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$3^2 - (2 \times 3) = 3 = 2^2 - 1$$

$$4^2 - (2 \times 4) = 8 = 3^2 - 1$$

$$5^2 - (2 \times 5) = 15 = 4^2 - 1$$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

ಮೊತ್ತದ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಬೇರೆ ಕೆಲವು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಏನು ಸಿಗುವುದು?

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$$

ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$2(x^2+y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2$$

ಇದರಲ್ಲಿ x, y ಆಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

$$\begin{aligned} 2(2^2+1^2) &= 10 = 3^2 + 1^2 \\ 2(3^2+2^2) &= 26 = 5^2 + 1^2 \\ 2(5^2+1^2) &= 52 = 6^2 + 4^2 \\ 2(6^2+4^2) &= 104 = 10^2 + 2^2 \end{aligned}$$

ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಇನ್ನೆರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 20, 40, 80 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ:

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗದ ಕುರಿತಾದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮೊದಲು

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿ ಅಲ್ಲವೇ? ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

$(x + y)^2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $4xy$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $(x - y)^2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.

ಆಗ $(x + y)^2$ ಎಂಬುದರಿಂದ $(x - y)^2$ ಕಳೆದಾಗ $4xy$ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

ಇದರಲ್ಲಿ y ಆಗಿ 1 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಹೀಗಾಗುವುದು:

$$4x = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

ಇನ್ನು x ಆಗಿ 2, 3, 4, ... ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲಭಿಸುವುದು.

$$8 = 3^2 - 1^2$$
$$12 = 4^2 - 2^2$$
$$16 = 5^2 - 3^2$$

....

ಅಂದರೆ 8 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

1 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡುವ.

ಪೈಥಾಗರಸ್ ತ್ರಯಗಳು

ಮೂರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪೈಥಾಗರಸ್ ತ್ರಯ ಎಂದು ಹೇಳುವುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ಆದುದರಿಂದ 3, 4, 5 ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಪೈಥಾಗರಸ್ ತ್ರಯವಾಗಿದೆ. ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ.ಇ ಎರಡು ಸಾವಿರ ದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಒಂದು ಆವೆಮಣ್ಣಿನ ಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ತ್ರಯಗಳ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನೇ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. $m > n$ ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ a, b, c ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn$$
$$c = m^2 + n^2$$

ಇನ್ನು

$$(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ.ಇ ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವು ತಿಳಿದಿತ್ತು.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ.

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

ಎಂದೂ

$$\frac{1}{4}(x-y)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

ಎಂದೂ ಬರೆದರೆ, ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ) ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ (ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ) ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು; ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು $x \times 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$11 = \left(\frac{11+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{11-1}{2}\right)^2 = 6^2 - 5^2$$

$$10 = \left(\frac{10+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{10-1}{2}\right)^2 = \left(5\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(4\tfrac{1}{2}\right)^2$$

ಕೆಲವು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

135×65 ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ

$$\frac{1}{2} \times (135 + 65) = 100$$

$$\frac{1}{2} \times (135 - 65) = 35$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಈಗ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$135 \times 65 = 100^2 - 35^2$$
$$= 10000 - 1225$$
$$= 8775$$

ಹೀಗೆಯೇ 26.5×23.5 ಎಂಬುದನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$26.5 \times 23.5 = \left(\frac{26.5 + 23.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{26.5 - 23.5}{2}\right)^2$$
$$= 25^2 - 1.5^2$$
$$= 625 - 2.25$$
$$= 622.75$$

(1) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$
$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$
$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

(i) ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(2) ಕೆಲವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$$
$$32 = 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2$$
$$40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$$

24 ಮತ್ತು ಅನಂತರದ 8 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(3) ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$15 = 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$$
$$21 = 11^2 - 10^2 = 5^2 - 2^2$$
$$35 = 18^2 - 17^2 = 6^2 - 1^2$$

(i) 15, 21, 35 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಯಾವೆಲ್ಲ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು?

(ii) ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಇಂತಹ ಬೇರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಇದರಿಂದ ಲಭಿಸುವ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವ ಯಾವುದು?

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

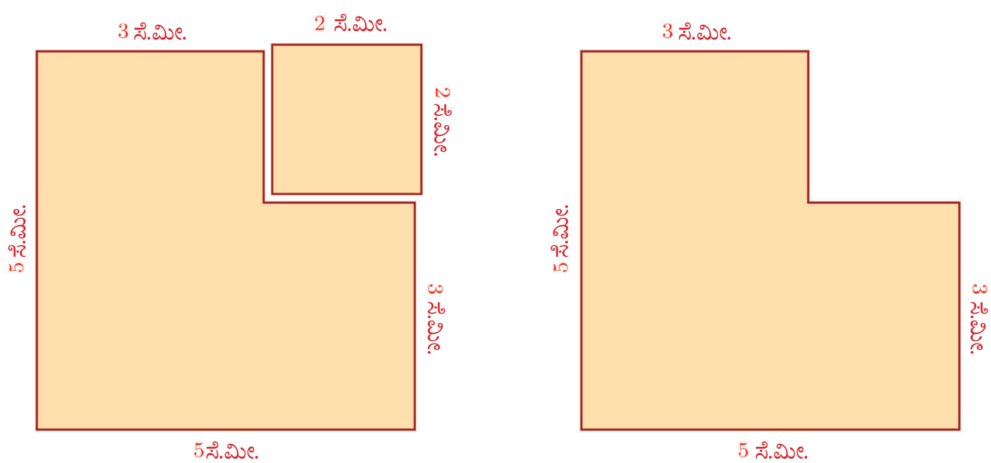
(i) 78×22 (ii) 301×299 (iii) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ (iv) 10.7×9.3

(5) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದೆಂದು ಗುಣಿಸಿ ನೋಡದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i)	75×25	76×24
(ii)	76×24	74×26
(iii)	10.6×9.4	10.4×9.6

ವರ್ಗ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



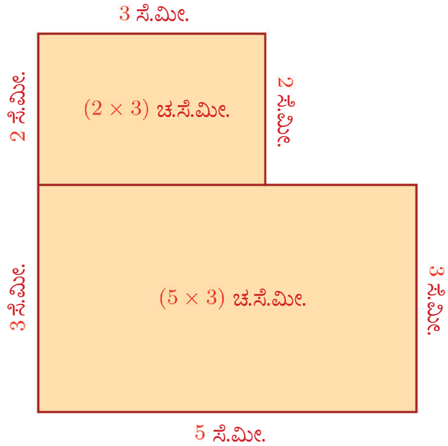
ಒಂದು ಚೌಕದ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣದೊಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ, ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ

$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಎರಡು ಆಯತಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು:



ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

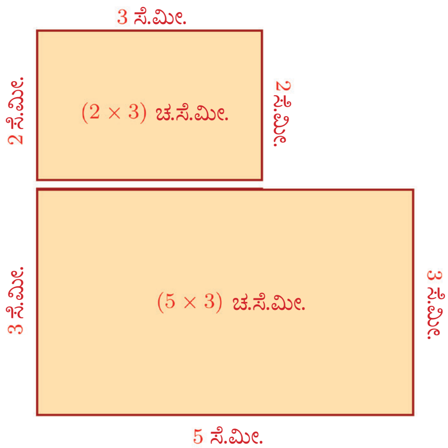
$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = 15 + 6 = 21 \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

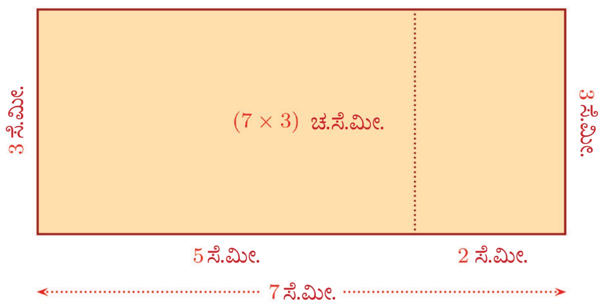
ಹೀಗೆಯೂ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು:

$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3 = 21$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ, 7 ಮತ್ತು 3 ನ್ನು ಗುಣಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದು ಭುಜಗಳು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹ ಆಯತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೇ?





ಮೇಲೆ ಇರುವ ಸಣ್ಣ ಆಯತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಬಲಬದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಇಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. ಈ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆದಾಗ,

$$5^2 - 2^2 = 7 \times 3$$

ಇದರ ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ 5, 2 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ, ಬಲಭಾಗದ 7 ಮತ್ತು 3 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಕ್ಕಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

$$7 = 5 + 2$$

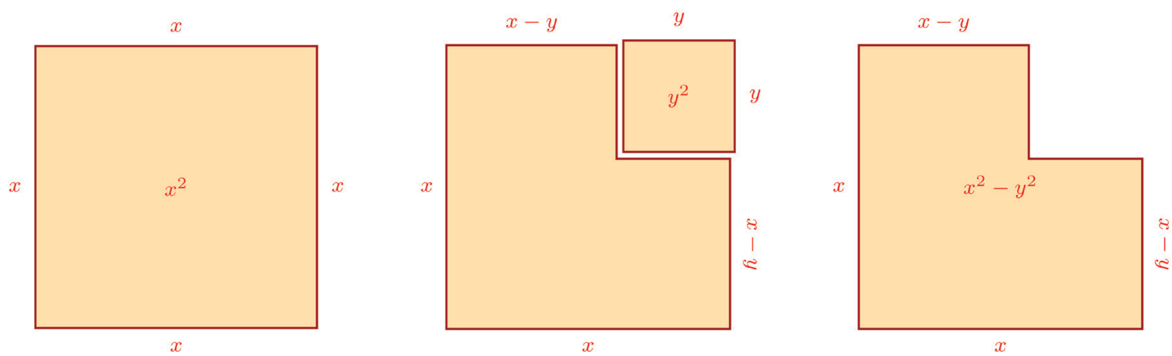
$$3 = 5 - 2$$

ಆಗ

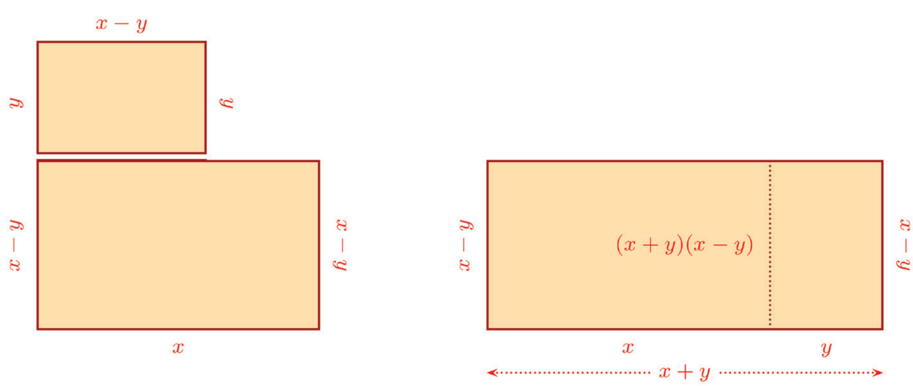
$$5^2 - 2^2 = (5 + 2) \times (5 - 2)$$

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುವುದೇ?

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು x, y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಚೌಕದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡುವ:



ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ ಮೇಲಿನಿಂದ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ ಇಡುವ.



ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್ನು ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

x, y ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿ ಬರೆದರೋ?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಳೆದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಬದಲಾಗಿ, ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವುದು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\begin{aligned} 168^2 - 162^2 &= (168 + 162) \times (168 - 162) \\ &= 330 \times 6 \\ &= 1980 \end{aligned}$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು:

$$\left(5\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(4\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(5\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\right) \times \left(5\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 10 \times 1 = 10$$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, y ಆಗಿ 1 ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಹೀಗಾಗುವುದು:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಓದಿದರೆ, $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 2, 3, 4, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಸಿಗುವುದು:

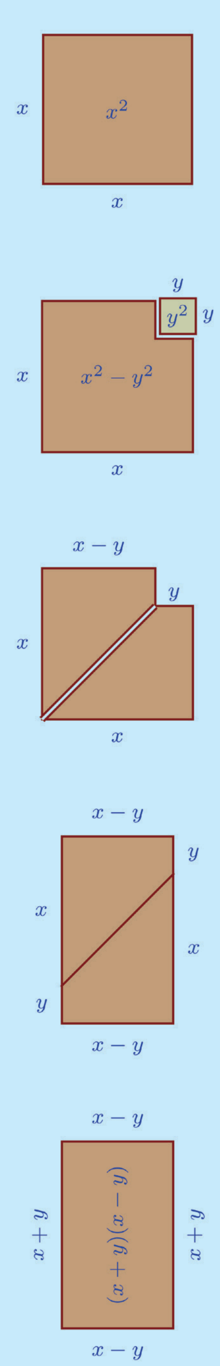
$$1 \times 3 = 2^2 - 1$$

$$2 \times 4 = 3^2 - 1$$

$$3 \times 5 = 4^2 - 1$$

....

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿ



ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗದಿಂದ ಒಂದು ಕಳೆದುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ. (**ಬೀಜಗಣಿತ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $68^2 - 32^2$ (ii) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ (iii) $3.6^2 - 1.4^2$

(2) ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$3^2 - 2^2 = 5 = 3 + 2$$
$$4^2 - 3^2 = 7 = 4 + 3$$
$$5^2 - 4^2 = 9 = 5 + 4$$

(i) ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಂತರದ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ನಲ್ಲಿ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಡ ಬಲ, ಮೇಲೆ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ:

ಆದಿತ್ಯ	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ ಹಾಗೂ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$8 \times 10 = 80$$

$$80 - 32 = 48$$

$$2 \times 16 = 32$$

ಹೀಗೆ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಇತರ ಚೌಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕದಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 48 ಸಿಗಲಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(*ಸೂಚನೆ : ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅನುಕೂಲ*)

(4) ಮೇಲೆ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕದಂತೆಯೇ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ:

ಆದಿತ್ಯ	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$15 \times 3 = 45$$

$$45 - 17 = 28$$

$$1 \times 17 = 17$$

ಹೀಗೆಯೇ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಬೇರೆ ಚೌಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 28 ಲಭಿಸಲಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಈ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಆಯತದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದೆ.

(i) ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಚೌಕ ಮತ್ತು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಒಂದು ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಆಯತದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಈ ಚೌಕದ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ಅಷ್ಟೇ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು.

(i) ಚೌಕದ ಮತ್ತು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

(ii) ಚೌಕ ಮತ್ತು ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು?

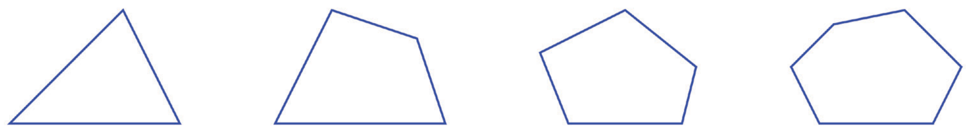
1 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಯಾವ ರೀತಿಯ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದು?

4

ಬಹುಭುಜಗಳು

ಹೆಸರುಗಳು

ನೇರ ಗೆರೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಸೇರಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೆಲವು ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ



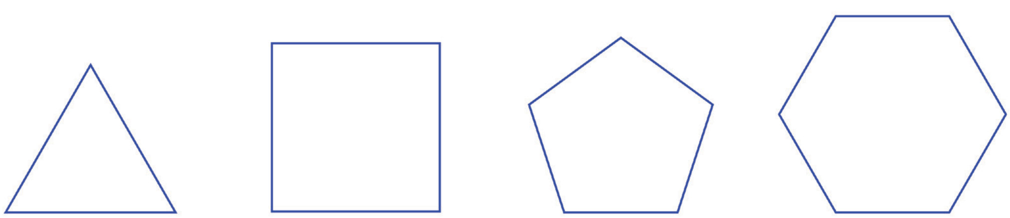
ತ್ರಿಕೋನ	ಚತುರ್ಭುಜ	ಪಂಚಭುಜ	ಷಡ್ಭುಜ
Triangle	Quadrilateral	Pentagon	Hexagon

ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ, ಮೂರು ಮೂಲೆಗಳೂ ;

ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಭುಜಗಳೂ ಮೂಲೆಗಳೂ ನಾಲ್ಕು; ಪಂಚಭುಜಕ್ಕೆ ಐದು; ಷಡ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಆರು.

ಭುಜಗಳ ಹಾಗೂ ಮೂಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಹೆಸರು ಬಹುಭುಜ (Polygon) ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಂದಗೊಳಿಸುವ:



ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವೂ ಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವೂ ಇದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು **ಸಮಬಹುಭುಜ (Regular polygon)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಕೋನಗಳು

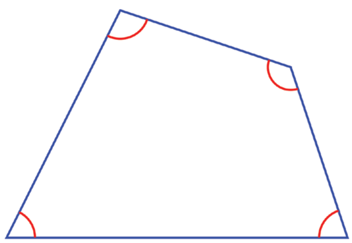
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ $180°$ ಸಿಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. (**ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ತ್ರಿಕೋನ ಲೆಕ್ಕ** ಎಂಬ ಭಾಗ.)

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕೂ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ?

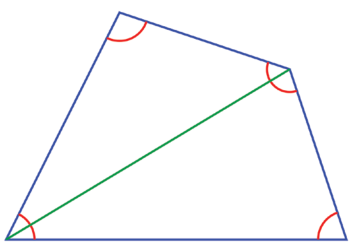
ಆಯತವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ $90°$; ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ $4 \times 90° = 360°$

ಎಲ್ಲಾ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಈ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಇದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇಬ್ಭಾಗವಾಗುವುದು.



ವಿಚಿತ್ರ ಬಹುಭುಜಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನೂ ಬಹುಭುಜಗಳಾಗಿ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳು ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಸರಿದಿರುವುದೋ, ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಹುಭುಜಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ನಾವು ಹೇಳುವ ಹಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಚತುರ್ಭುಜವು ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದುವಲ್ಲವೇ. ಭಾಗಗಳಾದ ಕೋನಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲವೇ? ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವವುಗಳು ಕೆಳಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೂ ಆಗಿವೆ.

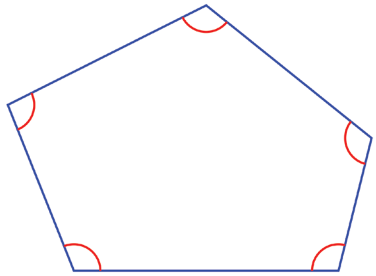
ಆಗ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಷ್ಟೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $180°$; ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದರೆ, ಇದರ ಎರಡು ಮಡಿ $2 \times 180° = 360°$

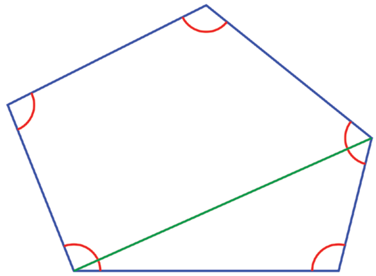
ಆಗ ಏನು ಲಭಿಸಿತು?

ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $360°$.

ಇನ್ನು ಪಂಚಭುಜವಾದರೇ?



ಹೀಗೆ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡುವ:



(ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಲ್ಲದ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು **ಕರ್ಣಗಳು** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.)

ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಎರಡಾಗಿ ಭಾಗಗಳಾದುವು; ಪಂಚಭುಜವು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿತು.

ಭಾಗಗಳಾದ ಕೋನಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಪಂಚಭುಜದ ಐದೂ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಷ್ಟಾಯಿತು.

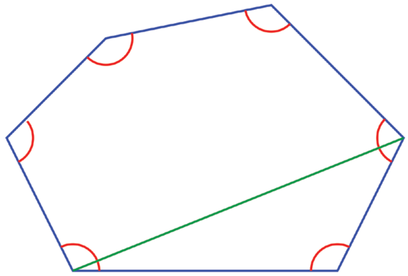
ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $360°$

ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$

ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $360° + 180° = 540°$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಷಡ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದೇ?

ಸಹಾಯಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ:



ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ಪಂಚಭುಜ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನ ಸೇರಿರುವ ಆಕೃತಿಯಾಗಿ ಕಾಣುವುದಲ್ಲವೇ.

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 540° + 180° = 720°

ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

- ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ, ಚತುರ್ಭುಜ, ಪಂಚಭುಜ, ಷಡ್ಭುಜ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಬಹುಭುಜದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಸಾಗುವಾಗ ಒಂದು ಮೂಲೆಯು (ಒಂದು ಭುಜವೂ) ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.
- ಈ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೂಡಾ ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವುದೆಂಬುದಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.

ಆಗ, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

	ಬಹುಭುಜ	ಭುಜಗಳು	ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ
1	ತ್ರಿಕೋನ	3	180°
2	ಚತುರ್ಭುಜ	4	180° + 180° = 2 × 180°
3	ಪಂಚಭುಜ	5	(2 × 180°) + 180° = 3 × 180°
4	ಷಡ್ಭುಜ	6	(3 × 180°) + 180° = 4 × 180°
5	ಸಪ್ತಭುಜ	....	....
6	ಅಷ್ಟಭುಜ	....	....

ಹೀಗೆ ನೋಡಿದರೆ, 10 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಹೀಗೆ ಯೋಚಿಸುವ:

(i) ಮೊದಲನೆಯದು ತ್ರಿಕೋನ, ಎರಡನೆಯದು ಚತುರ್ಭುಜ, ಮೂರನೆಯದು ಪಂಚಭುಜ ಹೀಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, 10 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜ (ದಶಭುಜ) ವು ಎಷ್ಟನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದು?

(ii) ಆಗ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ದಶಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು, 180° ಯ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು?

ಹಾಗೆ 10 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 8 × 180° = 1440° ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದು 180° ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-2) \times 180°$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 20 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

$$(20 - 2) \times 180° = 18 \times 180°$$
$$= (18^2 \times 10)°$$
$$= 3240°$$

ಬದಲಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 900° ಆಗಬಹುದೇ?

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲವೇ.

900 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 180 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ ವಾಗಿದೆಯೇ?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ 900 ನ್ನು 180 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸುವ (ಐದನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

900 ನ್ನೂ 180 ನ್ನೂ ಹೀಗೆ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವ.:

$$900 = 9 \times 10 \times 10$$
$$180 = 9 \times 10 \times 2$$

ಆಗ

$$900 \div 180 = 10 \div 2 = 5$$

ಅಂದರೆ

$$900 = 180 \times 5$$

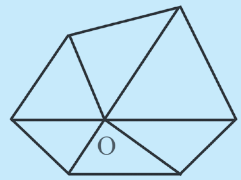
ಆಗ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 900° ಆಗಿರುವ ಬಹುಭುಜವಿದೆ.

ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳು?

5 + 2 = 7 ಭುಜಗಳು, ಅಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಭಜನೆ

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಒಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಶಿರಗಳಿಗೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು.



n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, n ತ್ರಿಕೋನಗಳೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$$= n \times 180°$$

ಈ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ O ಶಿರದಲ್ಲಿನ ಕೋನವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಆಗಿದೆ. O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿವಲ್ಲವೇ, ಆದುದರಿಂದ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು.

$$(n \times 180°) - (2 \times 180°) = (n - 2) \times 180°$$

(1) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 1980° ಆಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಬಹುಭುಜವಾದರೆ?

(2) 27 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

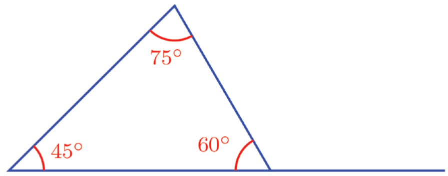
(3) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 8100° ಆಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿವೆ?

(4) ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 1000° ಆಗಬಹುದೇ? ಕಾರಣವೇನು?.

(5) 20 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ?

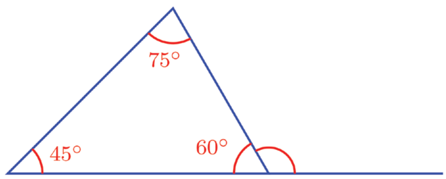
ಹೊರಕೋನಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಬಲಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ, ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ ಉಂಟಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

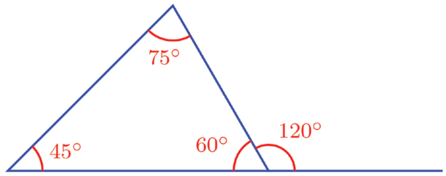


ಹೀಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಾಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು **ಹೊರಕೋನ (Outer angle)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಆಗ ಈ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು **ಒಳಕೋನ (Inner angle)** ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

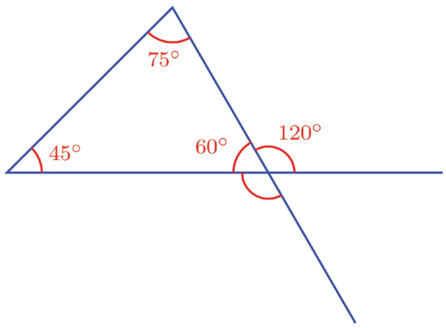
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವು, ಕೆಳಗಿನ ಮುಂದುವರಿಸಿರುವ ಭುಜವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಒಳಕೋನ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ. ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗಿದೆ. (ಆರನೇ ತರಗತಿಯ **ಗೆರೆಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವಾಗ** ಎಂಬ ಭಾಗ.)

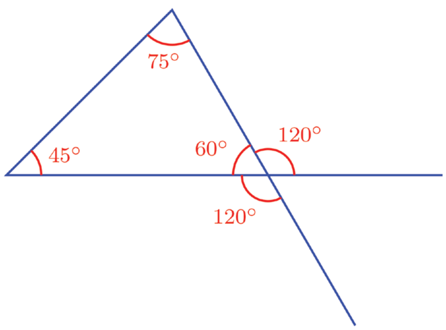
ಆಗ ಹೊರಕೋನ $180° - 60° = 120°$



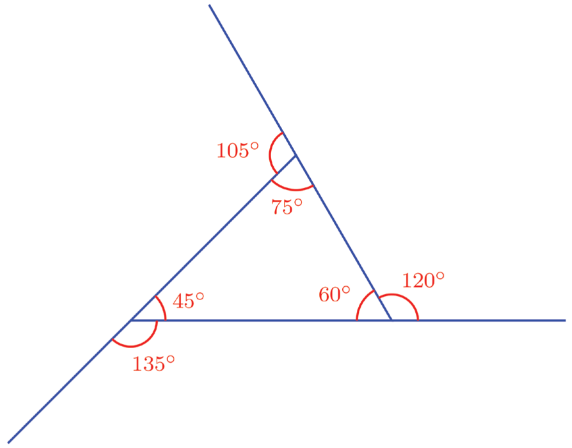
ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಬಲಭಾಗದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಇನ್ನೊಂದು ಹೊರಕೋನವು ಉಂಟಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.



ಅದೂ 120° ಯೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಯಾಕೆ?)



ಅಂದರೆ, 180° ಯಿಂದ ಒಳಕೋನವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಹೊರಕೋನವು ಸಿಗುವುದು; ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೊಂದು ಹೊರಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನದ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನದ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $45° + 60° = 105°$

ಇದು ಮೂರನೆ ಮೂಲೆಯ ಹೊರಕೋನವಲ್ಲವೇ?

ಬೇರೆ ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಮೂಲೆಯ ಹೊರಕೋನ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

ಹೀಗೆ ಯೋಚಿಸುವಾ:

(i) ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು, 180° ಯಿಂದ ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

(ii) ಇದು ಮೂರನೆಯ ಮೂಲೆಯ ಹೊರಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೂ ಮೂರನೇ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನವು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

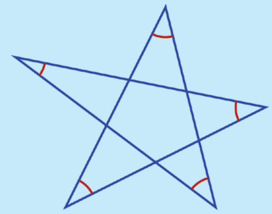
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ, ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನವು ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಚಾರ. ಮೂರು ಒಳಕೋನಗಳನ್ನೂ ಮೂರು ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಆರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. 540° ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ? ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಆರು ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಈ ಮೊತ್ತವು 540° ಎಂಬುದೇ ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

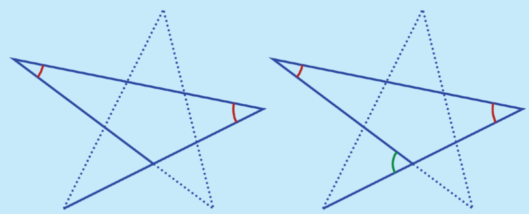
ಆರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನ ಹಾಗೂ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೂರು ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:

ನಕ್ಷತ್ರ ಗಣಿತ

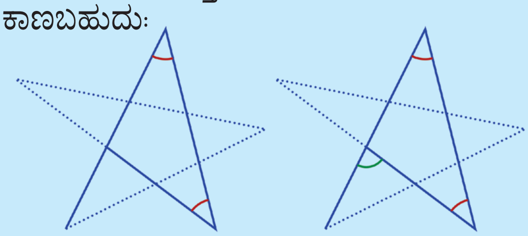
ಈ ನಕ್ಷತ್ರದ ಐದೂ ಮೂಲೆಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು:



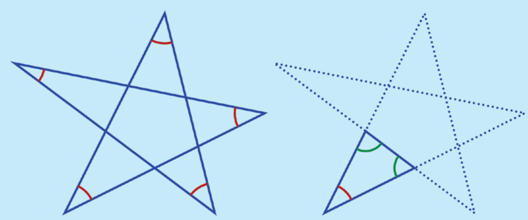
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯದರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿರುವ ಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು:



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಒಂದೇ ಕೋನವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು:



ಹೀಗೆ ನಕ್ಷತ್ರದ ಐದು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು:



ಆಗ, ನಕ್ಷತ್ರದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿದೆ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆಯ ಮೊತ್ತ $180°$

(ii) ಮೂರೂ ಜೊತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $3 \times 180° = 540°$

(iii) ಆರೂ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $540°$

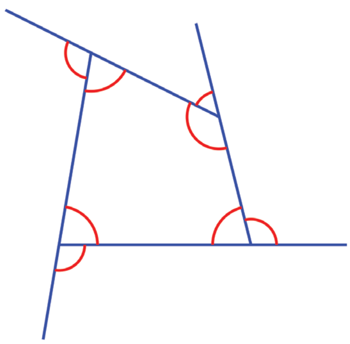
(iv) ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$

(v) ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $540° - 180° = 360°$

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಎಷ್ಟೇ ಆದರೂ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $360°$ ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯ ಒಂದು ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು $360°$ ಆಗಿರುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ, ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು.



ಇದರಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯ ಒಳಕೋನ ಹಾಗೂ ಹೊರಕೋನದ ಮೊತ್ತ $180°$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಒಳಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಹೊರಕೋನಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯ ಒಳಕೋನವನ್ನೂ ಹೊರಕೋನವನ್ನೂ ಜೊತೆಯಾಗಿಸಿದರೆ ನಾಲ್ಕು ಜೊತೆಗಳು; ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆಯ ಮೊತ್ತ $180°$: ಒಟ್ಟು $4 \times 180° = 720°$

ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $360°$

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $720° - 360° = 360°$

ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ, ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $360°$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಪಂಚಭುಜದಲ್ಲಾದರೇ?

ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ (ಅಲ್ಲವಾದರೆ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿಕೊಂಡು) ಯೋಚಿಸುವ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನದ ಹಾಗೂ ಹೊರಕೋನದ ಮೊತ್ತ $180°$; ಹಾಗೆ ಐದು ಜೊತೆಗಳು. ಒಟ್ಟು $5 \times 180°$.

ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $(5 - 2) \times 180° = 3 \times 180°$

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(5 \times 180°) - (3 \times 180°) = (5 - 3) \times 180° = 2 \times 180° = 360°$$

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲೂ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ n ಮೂಲೆಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯ ಒಳಕೋನ ಹಾಗೂ ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

ಒಟ್ಟು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $n \times 180°$

ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $(n - 2) \times 180°$

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(n \times 180°) - ((n - 2) \times 180°) = (n - (n - 2)) \times 180° = 2 \times 180° = 360°$$

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ '**ಗಣಿತದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಬರಹ**' ಪಾಠದ **ಕೂಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

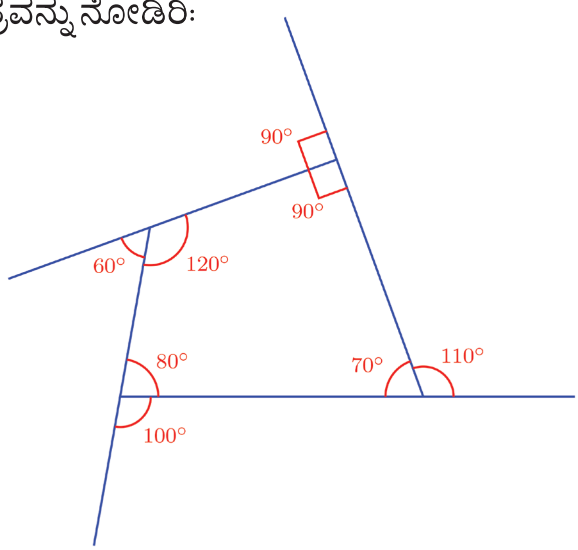
ಅಂದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ 360° ಸಿಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಚುಟುಕಾಗಿಸಿ ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು;

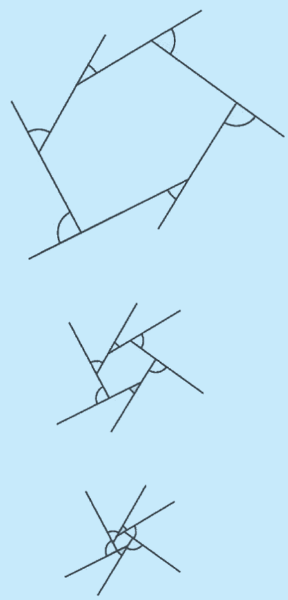
ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲೂ, ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಚಿಕ್ಕದಾಗುತ್ತಾ...

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೇ ಬದಿಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿಸುವ.



ಕೊನೆಗೆ ಬಹುಭುಜವೇ ಇಲ್ಲದಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮಾತ್ರ ಇರುವುದಾದರೋ?

ಬಹುಭುಜದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೋ?

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೊತ್ತ

$$100° + 110° = 210°$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$$120° + 90° = 210°$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಜೋಡಿಗಳನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ?

ಇತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳು $a°$, $b°$, $c°$, $d°$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಆಗ ಹೊರಕೋನಗಳು $180° - a°$, $180° - b°$, $180° - c°$, $180° - d°$

ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳಾದ $180° - a°$ ಮತ್ತು $180° - d°$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ;

ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(180° - a°) + (180° - d°) = 360° - (a° + d°)$$

ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $360°$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$$a° + b° + c° + d° = 360°$$

ಆಗ

$$360° - (a° + d°) = b° + c°$$

$$(180° - a°) + (180° - d°) = b° + c°$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ, ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಕೋನಗಳ ಕ್ರಮ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಇದುವೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

min 0.01, max 2, increment = 0.01 ಆಗುವಂತೆ slider a ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಜ್ಯ a ಆಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಐದೋ ಆರೋ ಚುಕ್ಕಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿರಿ. ಈ ಚುಕ್ಕಿಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. (ray tool ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಇನ್ನು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮರೆಮಾಡುವ. Angle ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ, ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನವು, ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವು.

ಆಗ ಇನ್ನೂ ತಿಳಿಯಬೇಕಾದ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳಿವೆ:

(i) ಪಂಚಭುಜಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಳಕೋನಗಳಿಗೂ ತಮ್ಮೊಳಗೆ ಈ ರೀತಿಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

(ii) ಷಡ್ಭುಜಗಳಾದರೇ?

(iii) ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಭುಜಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯತತ್ವವಿದೆಯೇ?

(1) 18 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ.
 (i) ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿದೆ?
 (ii) ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿದೆ?

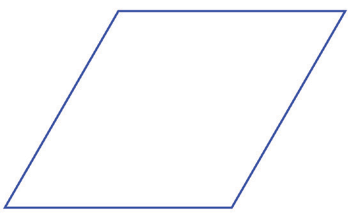
(2) (i) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದು ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜ ಯಾವುದು?
 (ii) ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವ ಬಹುಭುಜವು ಯಾವುದು?
 (iii) ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜವು ಯಾವುದು?
 (iv) ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜ ಯಾವುದು?

ಸಮಬಹುಭುಜಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವವುಗಳಾದರೆ ಅದರ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ (**ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ) ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ; ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವುದಾದರೆ, ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿದೆವು.

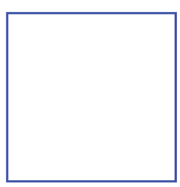
ಆದರೆ ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದರಿಂದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ; ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವುದರಿಂದ, ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರಬೇಕೆಂದೂ ಇಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು; ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಲಂಬವಾಗಿದೆ; ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.



ಚೌಕವಾದರೇ?

ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನ, ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನ.



ಪಾಠದ ಆರಂಭದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆಯೇ, ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವೂ, ಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯೂ ಇರುವ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n - 2) \times 180°$ ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $360°$ ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಸಮಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಆದುದರಿಂದ ಹೊರಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯಿರುವುದು (ಯಾಕೆ?).

ಆಗ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಕೋನದ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು:

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ

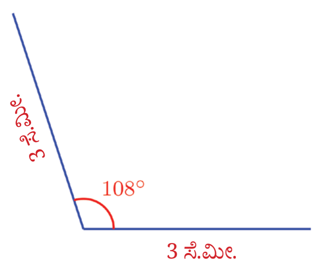
- **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಕೋನವೂ** $180° \times \frac{n-2}{n}$
- **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊರಕೋನವೂ** $360° \times \frac{1}{n}$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜದಲ್ಲಿ,
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಕೋನವೂ

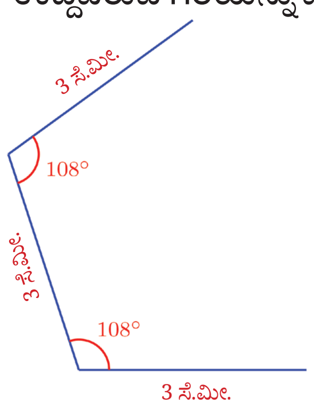
$$180° \times \frac{3}{5} = 108°$$

ಹಾಗಾದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮೊದಲು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು, ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 108° ಬಾಗಿರುವಂತೆ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

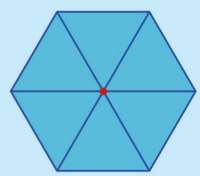


ಇನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ 108° ಬಾಗಿರುವಂತೆ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಸೇರಿಸಿ ಇರಿಸುವ

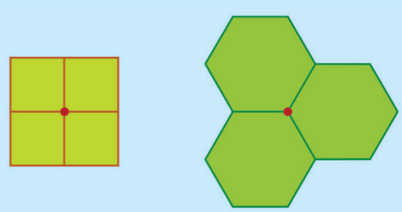
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 6 ಸಮಾನ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರ ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾದ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಹೀಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಇರಿಸಬಹುದು?

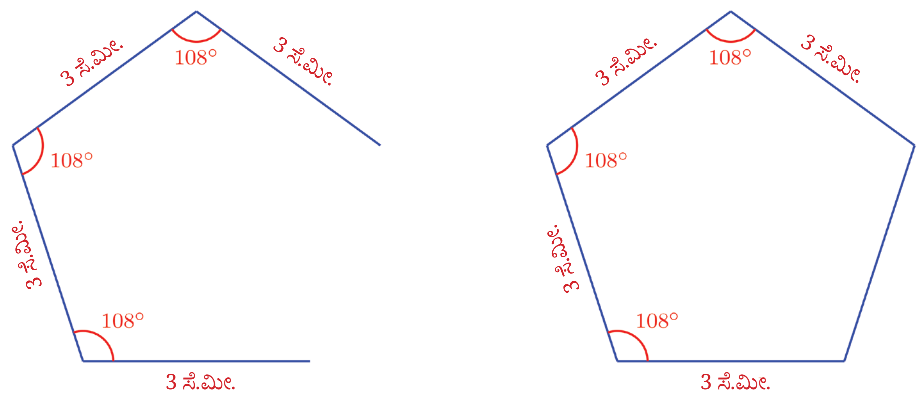
ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಕೋನ 360° ಅಲ್ಲವೇ. ಸಮಾನವಾದ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಜೋಡಿಸಿ ಇಡಲು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನದ ಅಳತೆ 360 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಬೇಕು.

ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ.



ಇನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಿವೆಯೇ ?
ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲದಿದ್ದರೇ ?

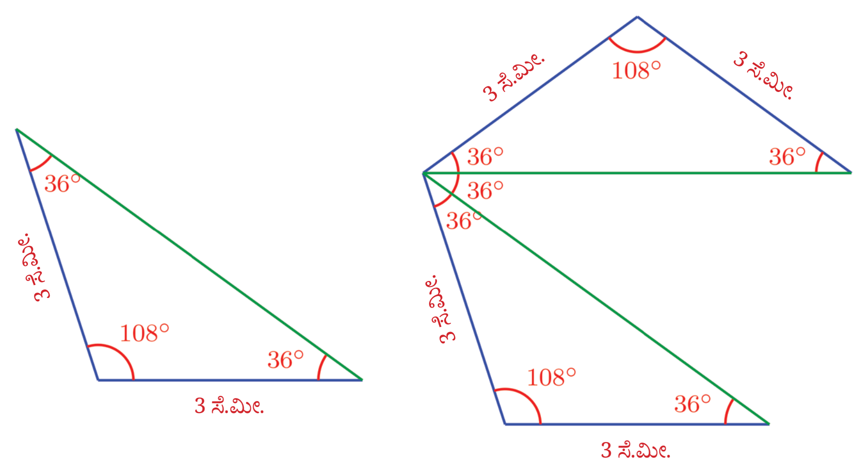
ಈ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೂ 108° ಬಾಗುವಿಕೆಯ, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ತುದಿಯನ್ನೂ ಮೊದಲನೇ ಗೆರೆಯ ತುದಿಯನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿರಿ.



ಪಂಚಭುಜವಾಯಿತು; ಸಮಪಂಚಭುಜವಾಯಿತೇ?

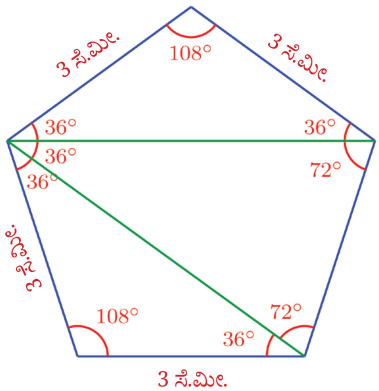
ಕೊನೆಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಕೊನೆಗೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳೆರಡೂ 108° ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ ಹೇಗೆ ಖಚಿತಪಡಿಸುವಿರಿ?

ಕೋನಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮೊದಲು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಮೂರನೆಯ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಗೆರೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ, ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:



ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು (ನೀಲ) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವೂ (3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್) ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನವೂ (108°) ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಮೂರನೆಯ (ಹಸಿರು) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (**ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ **ಎರಡು ಭುಜಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಆಗ ಕೊನೆಯ ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು;



ಕೊನೆಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ $36° + 72° = 108°$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ಕೊನೆಯ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಪಂಚಭುಜದ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಆಗ ಎರಡು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುದು(ಹೇಗೆ?).

ಕೈವಾರ

ಮಟ್ಟಗಳನ್ನೋ ಕೋನಮಾಪಕಗಳನ್ನೋ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ಕೈವಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ ಮತ್ತು ಸಮಷಡ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ?

ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಸರಳವಾದ ವಿಧಾನವು

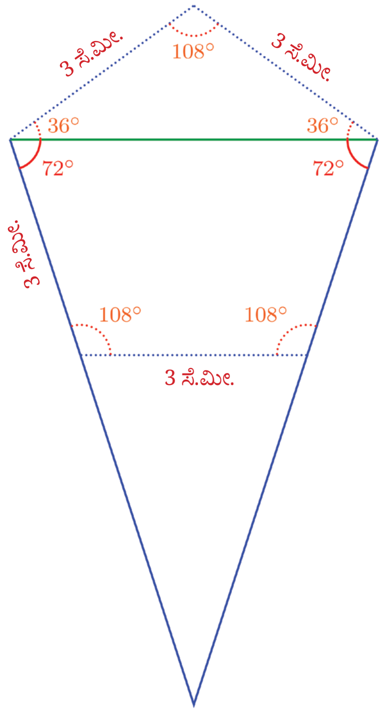
www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pentagon Construction

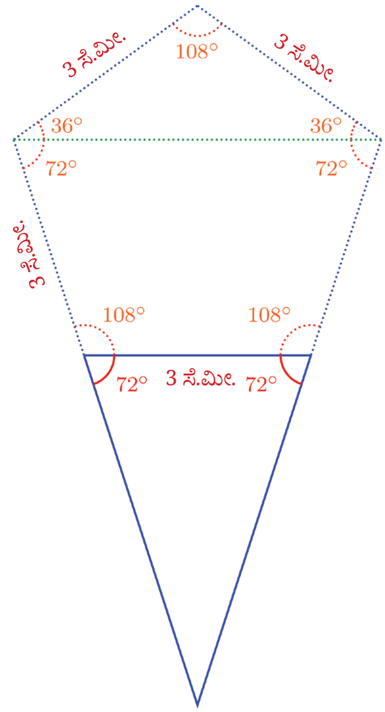
ಎಂಬ ವೆಬ್ ಪೇಜ್‌ನಲ್ಲಿದೆ. ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ರೂಲರ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 17 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಗೌಸ್ ಎಂಬಾತನು ತನ್ನ 19ನೇ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರುವನು.

ಇದರ ಕುರಿತಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳು

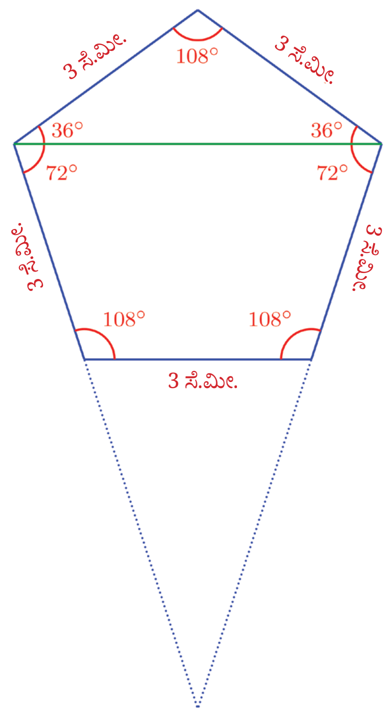
en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon

ಎಂಬ ವೆಬ್‌ಪೇಜ್‌ನಲ್ಲಿದೆ.

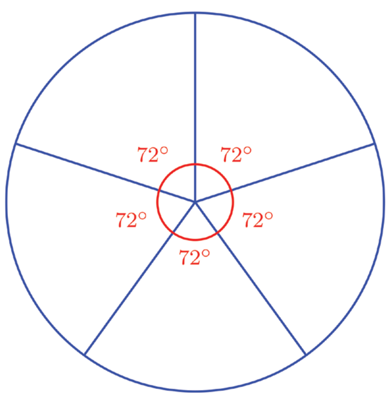


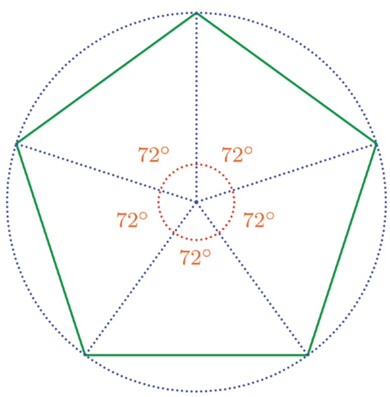


ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದದಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಕಳೆದರೆ ಸಿಗುವುದು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ; ಆಗ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಳೆದರೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬುದೇ ಸಿಗುವುದು:



ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $360° \times \frac{1}{5} = 72°$ ಆಗುವಂತೆ 5 ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:





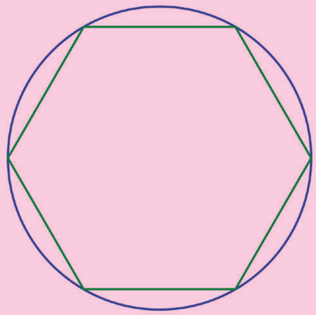
ಈ ಪಂಚಭುಜದ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವೂ, ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವೂ ಆಗಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಹೀಗೆ ರಚಿಸುವಾಗ ಇರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯೇನೆಂದರೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಲು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ.

(1) (i) ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವೂ, ಕೋನಗಳಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಅಳತೆಗಳೂ ಇರುವ ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೂ ಭುಜಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವೂ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

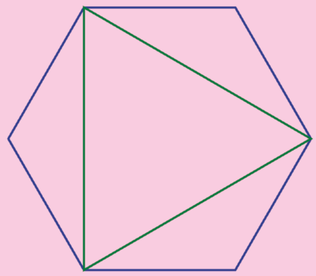
(2) ಮೂಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



(3) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಅಷ್ಟಭುಜವನ್ನು (8 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜ) ರಚಿಸಿರಿ.

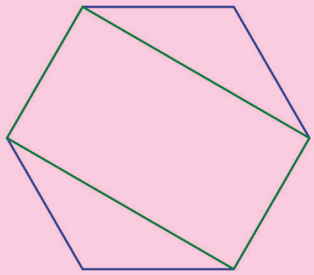
(4) 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಮೂಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಅಷ್ಟಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ:



ಇದೊಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಇದೊಂದು ಆಯತವಾಗಿದೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

(7) 15 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಕೋನದ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ 20° ಆಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಬದಿಗಳಿವೆ?

(9) ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆಯು 168° ಆಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿರುವುದು?

5

ಸಮವಾಕ್ಯ ಪರಿಹಾರ

ಕೂಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದು

ಸುಹರಾಳು ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತೆರೆದು ಎಣಿಸಿ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. "ಎಷ್ಟು ಹಣವಿದೆ?", ತಾಯಿ ಕೇಳಿದಳು. "ಇನ್ನೂ ಏಳು ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಐವತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು", ಸುಹರಾಳು ತನ್ನ ಇಚ್ಛೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಳು.

ಸುಹರಾಳ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿದೆ ?

7 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 50 ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು. ಆಗ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು 50 ಕ್ಕಿಂತ 7 ಕಡಿಮೆ:

$$50 - 7 = 43$$

(1) "ಇನ್ನೂ ಆರು ಮಾರ್ಕು ಲಭಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನೂರಕ್ಕೆ ನೂರು ಮಾರ್ಕು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು", ರಾಜ ಪರಿತಪಿಸಿದನು. ರಾಜನಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕು ಎಷ್ಟು?

(2) "5 ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ 18 ವರ್ಷವಾಗುವುದು, ಮಾತದಾನ ಮಾಡಬಹುದು", ಲಿಸ್ಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಳು. ಲಿಸ್ಸಿಯ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯವೆಷ್ಟು?

(3) 123 ನ್ನು 321 ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು?

(4) 432 ನ್ನು 234 ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಉಣ್ಣಿಯು ತನಗೆ ಲಭಿಸಿದ ವಿಷು ಕೊಡುಗೆಯಿಂದ 8 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. 42 ರೂಪಾಯಿ ಬಾಕಿ ಉಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನಿಗೆ ವಿಷುಕೊಡುಗೆಯಾಗಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಲಭಿಸಿತು?

8 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ 42 ರೂಪಾಯಿ ಆಯಿತು. ಆಗ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿ ಲಭಿಸಿರುವುದು, 42 ಕ್ಕಿಂತ 8 ಹೆಚ್ಚು:

$$42 + 8 = 50$$

(1) ಗೋಪಾಲನು ತನ್ನ ಅಂಗಡಿಗೆ ಒಂದು ಗೊನೆ ಬಾಳೆಹಣ್ಣನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಹಾಳಾದ 7 ನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ 46 ಉಳಿಯಿತು. ಗೊನೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(2) ವಿಮಲಳು 163 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದಾಗ 337 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳ ಕೈಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣವೆಷ್ಟು ?

(3) ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 123 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 321 ಲಭಿಸುವುದು ?

ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ

ಒಂದು ಠೇವಣಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮೊತ್ತವು ಆರು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿ ಸಿಗಲು ಈಗ ಎಷ್ಟು ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಬೇಕು ?

ನಿಕ್ಷೇಪಿಸುವ ಮೊತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿ 10000 ಆಗಿದೆ; ಆಗ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಮೊತ್ತ 10000 ದ ಅರ್ಧ, 5000.

ವ್ಯಾಪಾರದಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಲಾಭವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಸಮಾನವಾಗಿ ಹಂಚಿಕೊಂಡಾಗ ಜೋಸ್‌ಗೆ 1500 ರೂಪಾಯಿ ಲಭಿಸಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಲಾಭ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

ಲಾಭದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ 1500; ಆಗ ಒಟ್ಟು ಲಾಭ 1500 ರ 4 ಮಡಿ : $4 \times 1500 = 6000$.

(1) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಮ್ಯಾನೇಜರರಿಗೆ ಅಲ್ಲಿನ ಪ್ಯೂನ್‌ಗಿಂತ ಐದು ಮಡಿ ಸಂಬಳವಿದೆ. ಮ್ಯಾನೇಜರರಿಗೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ 75000 ರೂಪಾಯಿ ಸಂಬಳವಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ಯೂನ್‌ನ ಸಂಬಳವೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋದವರು ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚಾದ 12500 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿ ತಮ್ಮೊಳಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಲು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದರು; ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ 2500 ರೂಪಾಯಿ ಕೊಡಬೇಕಾಗಿ ಬಂತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋದವರೆಷ್ಟು ?

(3) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 12 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 756 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 21 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 756 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಭಾಗಿಸಿದುದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ?

ಹಲವು ವಿಧದ ಬದಲಾವಣೆ

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಎರಡು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ, ಆರು ರೂಪಾಯಿಗೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 46 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಯಿತು. ಒಂದು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. 6 ರೂಪಾಯಿಯ ಪೆನ್ನನ್ನು ಕೂಡಾ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 46 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುವುದು. ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸದಿದ್ದರೋ ?

40 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುತ್ತಿತ್ತು.

ಈ 40 ರೂಪಾಯಿಯು ಎರಡು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 20 ರೂಪಾಯಿ.

ಇನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಿದರೋ ?

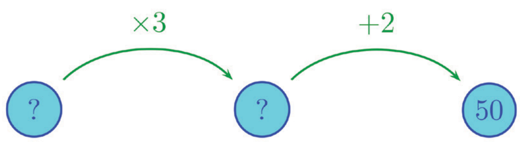
20 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಿರುವ ಎರಡು ಪುಸ್ತಕಗಳಿಗೆ 40 ರೂಪಾಯಿ, ಪೆನ್ನಿಗೆ 6 ರೂಪಾಯಿ;

ಒಟ್ಟು 46 ರೂಪಾಯಿ

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 50 ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ತಿಳಿಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅನಂತರ 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 50 ಆಯಿತು.



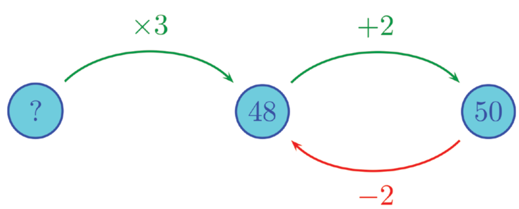
ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತ

ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ.ಇ ಮೂರು ಸಾವಿರ ಇಸವಿಯ ಕಾಲಘಟ್ಟದಲ್ಲಿಯೇ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನವರು ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿದ್ದರು. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪಪ್ಪೈರಸ್ ಎಂಬ ಹೆಸರಿರುವ ಗಿಡದ ದಂಟುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಿರುವ ಹಾಳೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದರು. ಇಂತಹ ಅನೇಕ ದಾಖಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಚ್ಯವಸ್ತು ಸಂಶೋಧಕರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ. ಅಂತಹ ದಾಖಲೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಪಪ್ಪೈರಸ್ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಪಪ್ಪೈರಸಿನಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ.ಇ 1650 ರಲ್ಲಿ ಬರೆದುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಇದನ್ನು ಬರೆದವರು ತನ್ನ ಹೆಸರು ಆಮೋಸ್ ಎಂದೂ ಇನ್ನೂರು ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹಳೆಯದಾದ ದಾಖಲೆಯಿಂದ ನಕಲು ಮಾಡಿರುವುದು ಎಂದೂ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಬ್ರಿಟಿಷ್ ವಸ್ತು ಸಂಗ್ರಹಾಲಯದಲ್ಲಿ ಜೋಪಾನವಾಗಿರಿಸಿರುವ ಈ ದಾಖಲೆಯನ್ನು ಆಮೋಸ್ ಪಪ್ಪೈರಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡರ್ ರಿಂಡ್ ಎಂಬ ಸಂಶೋಧಕನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ರಿಂಡ್ ಪಪ್ಪೈರಸ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು); ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

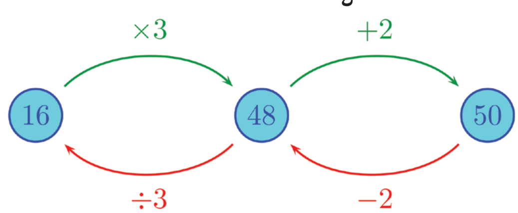
ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ತಿರುಗಿ ಸಿಗಲು ಏನೆಲ್ಲಾ ಮಾಡಬೇಕು ?

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 2 ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಅಲ್ಲವೇ 50 ಆಗಿರುವುದು; ಆಗ ಅದರ ಮೊದಲು $50 - 2 = 48$ ಆಗಿತ್ತು.

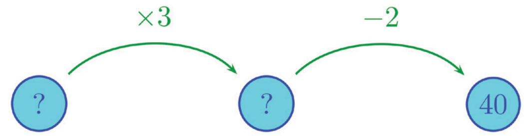


ಇನ್ನು 48 ರಿಂದ, ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಲುಪುವುದು ಹೇಗೆ ?

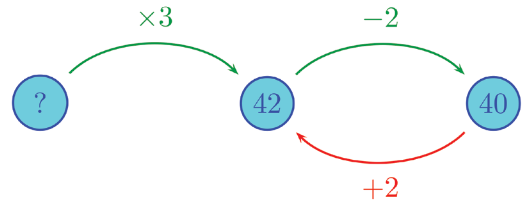
3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 48 ಆಯಿತು. ಆಗ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು $48 \div 3 = 16$



ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ?



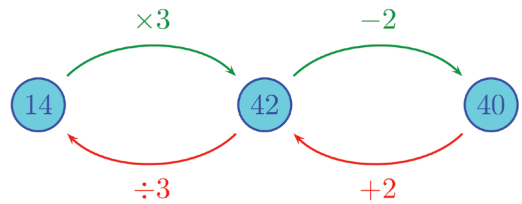
ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ 2 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ 40 ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?



ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 2 ನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ $40 + 2 = 42$;

ಇದು, 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ; ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಮೊದಲು $42 \div 3 = 14$ ಅಂದರೆ,

ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 14



ಇಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.
ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:
ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 60 ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?
ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು:

(i) ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 60 ಆಯಿತು; ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಮೊದಲು $60 \div 3 = 20$

(ii) ಮೊದಲು 2 ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 20 ಸಿಕ್ಕಿತು; ಹಾಗಾದರೆ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ $20 - 2 = 18$

(1) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 50 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ 5 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು ?

(2) ಅನಿತ ಮತ್ತು ಸಹಪಾಠಿಗಳು ಸೇರಿ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು. 5 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಮೂರು ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆಗೆ ಲಭಿಸಿತು. ಅವರಿಗೆ 32 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚು ಆಯಿತು. ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಖರೀದಿಸಿರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಕೊಡಬೇಕಾಗಿತ್ತು ?

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಮೂರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 101

(ii) ಮೂರು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 101

(iii) ಎರಡು ಮಡಿಯಿಂದ ಮೂರನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 101

(iv) ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ ಎರಡನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 101

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಆರರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 100 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(5) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಆರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 100 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಮಡಿಯೂ ಭಾಗವೂ

ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಲೆಕ್ಕ:

ಗೋಪುವಿಗೆ 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ತಂಗಿ ಮೀನಳಿಗೆ 2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 100 ರೂಪಾಯಿ ಆಯಿತು. ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಒಟ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದ್ದು 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನಲ್ಲವೇ. ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 100 ರೂಪಾಯಿ.

ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದರ ಬೆಲೆ $100 \div 5 = 20$

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನೇ, ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಂಬುದರ ಬದಲು ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ ?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಮಡಿ ಮತ್ತು 2 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 100 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಮಡಿ ಮತ್ತು 2 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 5 ಮಡಿ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿ 100; ಸಂಖ್ಯೆ 100 ರ $\frac{1}{5}$ ಭಾಗ, 20.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 10 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿಯಾಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸುವ:

(i) 3 ಮಡಿಗಿಂತ 10 ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ 5 ಮಡಿ

(ii) 5 ಮಡಿ ಮತ್ತು 3 ಮಡಿಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 10

(iii) ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿ 10

(iv) ಸಂಖ್ಯೆ, 10 ರ ಅರ್ಧ 5

ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ಮೊತ್ತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 2 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದುದು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ? ಸಂಖ್ಯೆ ಪುನಃ ಲಭಿಸಲು 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿಯೂ, ಭಾಗಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು ಗುಣಿಸಲೂ ಬೇಕು.

ಈ ರೀತಿಯ ಕುರಿತು, ಸಿ.ಇ. ಹನ್ನೆರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರು ಅವರ ಲೀಲಾವತಿ ಎಂಬ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವರು. ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ಅವರು ಕರೆಯುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೇಳಿರುವುದು ಹೀಗೆ:

> ಉತ್ತರ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ವರ್ಗವನ್ನು ವರ್ಗಮೂಲ ಮಾಡಬೇಕು. ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ವರ್ಗ ಮಾಡಬೇಕು.

(1) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿ ಮತ್ತು 7 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 27 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

(2) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 12 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 99 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ 21 ಮಡಿ ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಒಂದು ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಮತ್ತು ಅದರ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಒಂದು ಲೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ?

ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ನೀರು ಮತ್ತು ಅದರ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಸೇರಿದರೆ ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ಮಡಿಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದು 1 ಲೀಟರ್ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ $\frac{5}{4}$ ಮಡಿ 1 ಲೀಟರ್.

ಹಾಗಾದರೆ ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರು, 1 ಲೀಟರಿನ $\frac{4}{5}$ ಭಾಗ (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ವಿಲೋಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ತಲೆಕೆಳಗಾಗಿಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಅಂದರೆ ಬಾಟಲಿಯಲ್ಲಿ $\frac{4}{5}$ ಲೀಟರ್, ಅಥವಾ $1000 \times \frac{4}{5} = 800$ ಮಿಲ್ಲಿಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯುವುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{5}{4}$ ಮಡಿಯು 1 ಆದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

ಸಂಖ್ಯೆ $1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಲೀಟರ್ ನೀರನ್ನು ಪುನಃ ತುಂಬಿಸಿದಾಗ ಪಾತ್ರೆಯ ಅರ್ಧ ತುಂಬಿತು. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ಹಿಡಿಯುವುದು ?

ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗದೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{2}$ ಭಾಗವಾಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

$\frac{1}{2}$ ಭಾಗ ಮತ್ತು $\frac{1}{3}$ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಅಲ್ಲವೇ?

ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು ?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗ 1; ಸಂಖ್ಯೆ 6

ಅಂದರೆ, ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 6 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯುವುದು.

ನಮ್ಮ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಹಳೆಯ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಹಕ್ಕಿಗಳ ಗುಂಪಿನೊಂದಿಗೆ ಮಗುವು ಕೇಳಿತು, "ನೀವೆಷ್ಟು ಮಂದಿ" ? ಒಂದು ಹಕ್ಕಿ ಹೇಳಿತು:

ನಾವು ಮತ್ತು ನಮ್ಮಷ್ಟು,

ನಮ್ಮ ಅರ್ಧವೂ

ಅದರ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು

ಒಂದು ಸೇರಿದಾಗ ನೂರು ಆಗುವುದು

ಎಷ್ಟು ಹಕ್ಕಿಗಳು ಇದ್ದುವು ?

ಹಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪಕ್ಷಿ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ:

ನಾವು ಮತ್ತು ನಮ್ಮಷ್ಟು	:	ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿ
ನಮ್ಮ ಅರ್ಧವೂ	:	ಸಂಖ್ಯೆಯ $2\frac{1}{2}$ ಮಡಿ
ಅದರ ಅರ್ಧವೂ	:	ಸಂಖ್ಯೆಯ $2\frac{3}{4}$ ಮಡಿ
1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ	:	ಸಂಖ್ಯೆಯ $2\frac{3}{4}$ ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ್ದು

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ $2\frac{3}{4}$ ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 100 ಆಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಮೊದಲು, ಸಂಖ್ಯೆಯ $2\frac{3}{4}$ ಮಡಿ, $100 - 1 = 99$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇನ್ನು $2\frac{3}{4}$ ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{11}{4}$ ಮಡಿ 99

ಹಾಗಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ

$$99 \times \frac{4}{11} = \frac{9 \times 11 \times 4}{11} = 9 \times 4 = 36$$

ಹಕ್ಕಿಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 36 ಹಕ್ಕಿಗಳು ಇದ್ದುವು.

(1) ಒಂದು ಹಗ್ಗದಿಂದ ಅದರ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಬಾಕಿ ಇರುವ ಭಾಗದ ಉದ್ದ 10 ಮೀಟರ್. ಹಗ್ಗ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವಿತ್ತು ?

(2) ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಾಲಿನ ಅರ್ಧವೂ, ಬಾಕಿ ಇರುವುದರ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, 5 ಲೀಟರ್ ಬಾಕಿಯಾಯಿತು. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ಹಾಲು ಇತ್ತು?

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿ

ಈಗ ಮಾಡಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವಭಾವವೇನು? ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಆರಂಭಿಸಿರುವುದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಹೇಗೆ? ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ (ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಹಂತವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ) ಮಾಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ರಷೀದ 4 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿ, 20 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕೊತ್ತಂಬರಿ ಸೊಪ್ಪು, ಕರಿಬೇವು ಸೊಪ್ಪು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 200 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಒಂದು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 20 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 200 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ? ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದ 20 ನ್ನು ಮೊದಲು ಕಳೆಯಬೇಕು; ನಂತರ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸಿದ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$$(200 - 20) \div 4 = 180 \div 4 = 45$$

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿಯ ಬೆಲೆ 45 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಹತ್ತು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ, ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಉದ್ದವೂ ಅಗಲವೂ ಎಷ್ಟಾಗಬೇಕು ?

ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಹತ್ತು ಮೀಟರಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅದು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 1 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂದರೆ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಅಗಲಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಪರಸ್ಪರ ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂದಾಗುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೇಳಿದರೋ?

> ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 1 ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತದ 2 ಮಡಿಯು 10 ಆಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

> ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 1 ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತ 5;
> ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದರ ಮೊತ್ತವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ? (**ಬೀಜಗಣಿತ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು.

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x + (x + 1) = 2x + 1$

ಈಗ ಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು: ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು.

$2x + 1 = 5$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು ?

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು ?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 5; ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$(5 - 1) \div 2 = 2$$

ಆಗ ಆಯತದ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳು 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು, ಆರಂಭದಿಂದಲೇ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡುವುದು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಒಂದು ತರಗತಿಯ 25 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು 85 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಯಿತು. 4 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 3 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆ ಇರುವ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ?

ಒಟ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 25 ಅಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಅದನ್ನು 25 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ, ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿಗುವುದು.

ಮೊದಲು 4 ರೂಪಾಯಿಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು ?

ಹೆಸರು ಬಂದ ದಾರಿ

ಯುರೋಪಿನ ನವೋತ್ಥಾನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅರಬ್ ಕೃತಿಗಳ ಭಾಷಾಂತರದ ಮೂಲಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಚಾರವಾಯಿತು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದವು ಮಹಮ್ಮದ್ ಅಲ್ ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನ ಕೃತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಿ.ಇ. ಎಂಟನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಲ್ ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದನು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 5 ಲಭಿಸಿತು ಎಂಬುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 5 ನ್ನು ಮತ್ತು 2 ನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅಲ್ ಜಬರ್ ಎಂಬ ಅರಬ್ ಪದದಿಂದ ಅಲ್ ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಸೂಚಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಪದದ ಅರ್ಥವು "ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸುವಾ" ಅಥವಾ "ಪೂರ್ವಸ್ಥಿತಿಗೆ ತರುವಾ" ಎಂದಾಗಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ನಲ್ಲಿ algebra ಎಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿರುವುದು ಈ ಅರಬ್ ಪದದಿಂದಾಗಿದೆ.

ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿ) algorithm ಎಂಬ ಹೆಸರಿದೆ. ಅಲ್ ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಈ ಪದ ಉಂಟಾದುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 4 ಮಡಿ ಮತ್ತು 25 ರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದುದರ 3 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 85; ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಇದನ್ನು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸುವುದು ಕಷ್ಟಕರವಲ್ಲವೇ ?

ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ ?

4 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದು, ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ:

4 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : x

ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ : $4x$

3 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : $25 - x$

ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ : $3(25 - x)$

ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ : $4x + 3(25 - x)$

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏನಾಗುವುದು ?

$4x + 3(25 - x) = 85$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟು ?

ಇದರಲ್ಲಿರುವ $3(25 - x)$ ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$\begin{aligned} 3(25 - x) &= (3 \times 25) - (3 \times x) \\ &= 75 - 3x \end{aligned}$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $4x + 3(25 - x)$ ನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.:

$$\begin{aligned} 4x + 3(25 - x) &= 4x + 75 - 3x \\ &= 4x - 3x + 75 \\ &= x + 75 \end{aligned}$$

ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏನಾಯಿತು ?

$x + 75 = 85$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟು ?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 75 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 85 ಆಗುವುದಾದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ $85 - 75 = 10$ ಅಲ್ಲವೇ ?

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x = 10$

ಅಂದರೆ, 4 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10,

3 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $25 - 10 = 15$.

(1) ಸುತ್ತಳತೆ 80 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವು, ಅಗಲದ ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಆಯತದ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದವೆಷ್ಟು ?

(2) ನೂರು ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಇಪ್ಪತ್ತು ಮತ್ತು ಹತ್ತರ ನೋಟುಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದುವು. ಒಟ್ಟು ಏಳು ನೋಟುಗಳು ಇರುವುದಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಇರುವುದು?

(3) ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯು, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಿಂತ 4 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚು. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು, ಈ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಿಂತ 2 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿದೆ. ಒಬ್ಬನು 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು, 2 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಒಟ್ಟು 54 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 80 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡೋಣ:

ಅಜಯನಿಗೆ ವಿಜಯನಿಗಿಂತ ಹತ್ತು ವರ್ಷ ಅಧಿಕ ಪ್ರಾಯವಿದೆ. ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯವು, ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಈಗ ಇವರಿಬ್ಬರ ಪ್ರಾಯವೆಷ್ಟು ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೇ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ. ವಿಜಯನ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದು, ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯ	:	x
ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯ	:	$x + 10$
ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯ	:	$x + 1$
ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯ	:	$x + 11$

ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯವು ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು ?

$2(x + 1) = x + 11$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟು ?

ಇದರಲ್ಲಿರುವ $2(x + 1)$ ನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏನಾಗುವುದು?

ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 9 ಲಭಿಸಿತು; ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

$$2x + 1 = 9$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ x ಆಗಿ 4 ನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಸರಿಯಾಗಬಹುದಷ್ಟೆ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೇಳುವುದು,

$2x + 1 = 9$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪರಿಹಾರ $x = 4$

ಕೆಲವು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಅಕ್ಷರಗಳಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

ಇಂತಹ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು **ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳು (Identities)** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$2x + 2 = x + 11$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ?

ಇನ್ನೋ ?

ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಆಲೋಚಿಸುವ:

(i) $2x$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $x + 11$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಕ್ಕಿತು.

(ii) $2x$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು $x + 11$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

(iii) $2x = (x + 11) - 2$

(iv) $2x = x + 9$

ಕೊನೆಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವೇನು ?

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 9 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $2x$ ಆಯಿತು; ಅಂದರೆ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಯಿತು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಅಲ್ಲವೇ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು.

ಒಂಬತ್ತರ ಆಟ

9 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 29 ಆದರೆ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $2 + 9 = 11$

ಗುಣಲಬ್ಧ $2 \times 9 = 18$

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $18 + 11 = 29$.

9 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ?

ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $10x + 9$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ.

9 ಅಲ್ಲದೆ ಇತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ವಿಶೇಷತೆಯಿದೆಯೇ ?

$10x + y = x + y + xy$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ y ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ?

ಹಾಗಾದರೆ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯ 9, ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯ $9 + 10 = 19$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪ ಇದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ,

$$2x + 2 = x + 11 \text{ ಆದರೆ, } x \text{ ಎಷ್ಟು?}$$

x ಆಗಿ ಯಾವುದೋ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ $2x + 2$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು $x + 11$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಮಾನ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತು ಎಂದಲ್ಲವೇ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥ.

ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೂ ಸಮಾನ ಉತ್ತರ ಸಿಗಬೇಕಲ್ಲವೇ ?

ಕಳೆಯುವುದು x ಆದರೋ ?

$$(2x + 2) - x = x + 2$$

$$(x + 11) - x = 11$$

ಈ ಉತ್ತರಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

$$x + 2 = 11$$

ಇದರಿಂದ $x = 9$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಆಮ್ಲ ಮತ್ತು ನೀರು ಸೇರಿರುವ ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿ 60% ಆಮ್ಲವಿದೆ. 6 ಲೀಟರ್ ಆಮ್ಲವನ್ನು ಕೂಡಾ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಆಮ್ಲ 75% ಆಯಿತು. ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ಆಮ್ಲವಿತ್ತು ?

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ದ್ರಾವಣವಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಲಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು x ಲೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆಯೋಣ. ಇದರ 60% ಆಮ್ಲವೂ ಬಾಕಿ ಇರುವ 40% ನೀರೂ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

ಒಟ್ಟು ದ್ರಾವಣ	x ಲೀಟರ್
ಆಮ್ಲ	$\frac{60}{100}x = \frac{3}{5}x$ ಲೀಟರ್
ನೀರು	$\frac{40}{100}x = \frac{2}{5}x$ ಲೀಟರ್

ಇನ್ನು 6 ಲೀಟರ್ ಆಮ್ಲವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಈ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಏನಾಗುವುದು ?

ಒಟ್ಟು ದ್ರಾವಣ	$x + 6$ ಲೀಟರ್
ಆಮ್ಲ	$\frac{3}{5}x + 6$ ಲೀಟರ್
ನೀರು	$\frac{2}{5}x$ ಲೀಟರ್

ಈಗ ಆಮ್ಲದ ಅಳತೆಯು ಒಟ್ಟು ದ್ರಾವಣದ 75% ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಈಗ ಆಮ್ಲದ ಅಳತೆ

$$(x + 6) \times \frac{75}{100} = \frac{3}{4}(x + 6) \text{ ಲೀಟರ್}$$

ಈ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ, ಈಗ ಆಮ್ಲದ ಅಳತೆ $\frac{3}{5}x + 6$ ಲೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ,

$$\frac{3}{4}(x + 6) = \frac{3}{5}x + 6 \text{ ಲೀಟರ್}$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} = \frac{3}{5}x + 6 \text{ ಲೀಟರ್}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{3}{4}x$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ $4\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $\frac{3}{5}x + 6$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $4\frac{1}{2}$ ಕಳೆದುದಲ್ಲವೇ ?

$$\frac{3}{4}x = \left(\frac{3}{5}x + 6\right) - 4\frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{5}x + 1\frac{1}{2}$$

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು ?

$\frac{3}{4}x$ ಎಂಬುದು $\frac{3}{5}x$ಗಿಂತ $1\frac{1}{2}$ ಯಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, $\frac{3}{4}x$ ಮತ್ತು $\frac{3}{5}x$ ಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $1\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ.

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x$ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x$$

ಆಗ ಲೆಕ್ಕದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು:

$$\frac{3}{20}x = 1\frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{3}{20}$ ಭಾಗ $1\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ. ಆಗ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು, $1\frac{1}{2}$ ಯ $\frac{20}{3}$ ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ? (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ವಿಲೋಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಭಾಗವೂ ಮಡಿಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

$$\begin{aligned} x &= 1\frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3 \times 20}{2 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲು ಒಟ್ಟು 10 ಲೀಟರ್ ದ್ರಾವಣವಿತ್ತು.

(1) ಅಪ್ಪುವಿನ ತಾಯಿಯ ಪ್ರಾಯವು, ಅಪ್ಪುವಿನ ಪ್ರಾಯದ ಒಂಬತ್ತು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂಬತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇದು ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಇವರ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯವೆಷ್ಟು ?

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಎಂಟು ಹುಡುಗರು ಮಾತ್ರ ಗೈರುಹಾಜರಾದ ಒಂದು ದಿನ, ಈ ತರಗತಿಯ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿತ್ತು. ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು ?

(3) ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರು ಇರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 50% ಹುಡುಗಿಯರು ಇರುವರು. ಇನ್ನೂ 10 ಹುಡುಗಿಯರು ಸೇರಿದರೆ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 60% ಆಯಿತು. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳು ಇದ್ದರು ?

(4) ಪುನಃ ಒಂದು ಹಳೆಯ ಲೆಕ್ಕ. ಒಂದು ಕೊಳದಲ್ಲಿ ತಾವರೆ ಹೂಗಳು ಅರಳಿ ನಿಂತಿವೆ. ಹಾರಿಬಂದ ಗಿಳಿಗಳ ಗುಂಪು, ದಣಿವು ಆರಿಸಲು ಹೂವಿನ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತವು. ಒಂದು ತಾವರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಿಳಿ ಎಂಬಂತೆ ಕುಳಿತಾಗ ಒಂದು ಗಿಳಿಗೆ ಸ್ಥಳವಿಲ್ಲದಾಯಿತು. ಒಂದು ತಾವರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗಿಳಿಗಳಂತೆ ಕುಳಿತಾಗ, ಒಂದು ತಾವರೆ ಅಧಿಕವಾಯಿತು. ತಾವರೆಗಳೆಷ್ಟು ? ಗಿಳಿಗಳೆಷ್ಟು ?

6

ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಬಣ್ಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ನೀತು, ಹರಿ ಮತ್ತು ಅನ್ವರ್ ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ್ದಾರೆ; ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಆಟ. 1 ರಿಂದ 5ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ 50 ಕಾರ್ಡುಗಳು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ತಲಾ 10 ರಂತೆ; ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಕಾರ್ಡುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲೂ ಬಾಕಿ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ 5 ಎಂದು ಬರೆದ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವರು. ಉಳಿದ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಬೆರೆಸಿ ಅಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಕವುಚಿ ಇಡಬೇಕು. ಇನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಆಟಗಾರನೂ ಸರದಿಯಂತೆ ಒಂದೊಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಅಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಲಭಿಸುವುದು ಕಪ್ಪು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಕೆಂಪು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಕಳೆಯಬೇಕು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿಯೂ ಕಳೆದೂ ಆಟವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೊತ್ತ ಸಿಕ್ಕಿದವರು ವಿಜೇತರಾಗುವರು.

ಆಟದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಲಭಿಸಿದ ಕಾರ್ಡ್ ಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ನೀತು **2** ಅನ್ವರ್ **1** ಹರಿ **3**

ಆಟದ ನಿಯಮದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಈಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ನೀತು	5	7
ಅನ್ವರ್	5	6
ಹರಿ	5	2

ಎರಡನೇ ಬಾರಿ ಲಭಿಸಿದ ಕಾರ್ಡುಗಳು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ.

ನೀತು **1** ಅನ್ವರ್ **3** ಹರಿ **3**

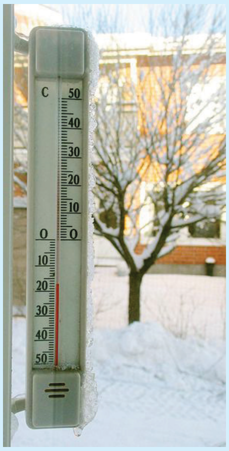
ಋಣ ಉಷ್ಣತೆ

ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತಿದಿನವೂ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳಗಳ ತಾಪಮಾನ ಹೇಳುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಉತ್ತರ ಭಾರತದ ಹಲವು ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ತಾಪಮಾನವು ಚಳಿಗಾಲದಲ್ಲಿ −1°C, −2°C ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಹೇಳುವುದಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ನೀರು ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟಿ ಮಂಜುಗಡ್ಡೆಯಾಗುವ ತಾಪಮಾನವನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಡಿಗ್ರಿ ಸೆಲ್ಶಿಯಸ್ (0°C) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕೆಳಗಿನ ತಾಪಮಾನವನ್ನು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಹೇಳುವರು.

ಒಂದು ಗಾಜಿನ ನಳಿಗೆಯೊಳಗಿರುವ ಪಾದರಸವು, ಉಷ್ಣತೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗ ಹಿಗ್ಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೇರಿದರೆ, ಉಷ್ಣತೆಯು ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುವಾಗ ಕುಗ್ಗಿ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುವುದು. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವರು. ಶೈತ್ಯ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಈ ರೀತಿಯ ಉಷ್ಣತಾಮಾಪಕಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತಲೂ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಬಹುದು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಉಷ್ಣತಾ ಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವ ತಾಪಮಾನವು −20°C ಮತ್ತು −15°C ನ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾಗಿದೆ.



ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

ನೀತು	5	7	8
ಅನ್ವರ್	5	6	3
ಹರಿ	5	2	

ಹರಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಎದುರಾಯಿತು.

2 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಆದುದರಿಂದ ತನ್ನ ಈಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 0 ಎಂದು ಬರೆಯುವ ಎಂದು ಹರಿ ಹೇಳಿದನು.

ಹಾಗಲ್ಲ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಹರಿಯು ಸೋತನು, ಇನ್ನು ನಾನು ಮತ್ತು ನೀತು ಮಾತ್ರವೇ ಆಡಿದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ಅನ್ವರ್ ಹೇಳಿದನು.

ಅದು ಬೇಡ, ಹರಿ ಇನ್ನೂ ಆಟವಾಡಲಿ; ಮುಂದೆ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ನೀತುವಿನ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಾಗಿತ್ತು.

ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪಿದರು. ಹರಿಯ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ "1 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು" ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದರು.

ಹಾಗಾದರೆ ಅದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ –1 ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಅನ್ವರ್ ಹೇಳಿದನು. ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪಿದರು.

ನೀತು	5	7	8
ಅನ್ವರ್	5	6	3
ಹರಿ	5	2	–1

ಶೈತ್ಯ, ಅತಿ ಶೈತ್ಯ

ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಶೈತ್ಯ ಪ್ರದೇಶವು ಲಡಾಕಿನ ದ್ರಾಸ್ ಎಂಬ ಪಟ್ಟಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿನ ತಾಪಮಾನವು –60 °C ನ ವರೆಗೆ ಇಳಿದಿರುವುದಾಗಿ ದಾಖಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ತಂಪು ಅನುಭವವಾಗುವುದು ಅಂಟಾರ್ಟಿಕ ಭೂಖಂಡದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ತಾಪಮಾನವಾದ –89°C ಇಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾಗಿದೆ.

ಮುಂದಿನ ಬಾರಿ ಹರಿಯು ಪಾರಾದನು.

ನೀತು **4** ಅನ್ವರ್ **5** ಹರಿ **3**

ಆಟಗಾರರ ಈಗಿನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೇ?

ನೀತು	5	7	8	4
ಅನ್ವರ್	5	6	3	
ಹರಿ	5	2	–1	

ಹರಿಗೆ ಈಗ ಲಭಿಸಿರುವುದು 3;

ಮೊದಲಿದ್ದ ಸಾಲ 1 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 2 ಆಗುವುದು.

ಅನ್ವರ್‌ನ ವಿಷಯದಲ್ಲಿಯೋ?

3 ರಿಂದ 5 ನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮೊದಲು ಹರಿಯ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಮುಂದಿನ ಆಟದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಯಿತು.

ಎಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು?

2 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ –2 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ನೀತು	5	7	8	4
ಅನ್ವರ್	5	6	3	–2
ಹರಿ	5	2	–1	2

ನಾಲ್ಕನೇ ಬಾರಿ ಲಭಿಸಿದ ಕಾರ್ಡುಗಳು ಹೀಗಿವೆ;

ನೀತು 3 ಅನ್ವರ್ 2 ಹರಿ 5

ಈಗಿನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೇ?

ನೀತು	5	7	8	4	
ಅನ್ವರ್	5	6	3	–2	
ಹರಿ	5	2	–1	2	

ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ

ಕಾರ್ಡಿನ ಆಟದಲ್ಲಿ 2 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಾಗ ಅದನ್ನು –1 ಎಂದು ಬರೆದೆವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು

$$2 - 3 = -1$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

2 ರಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 0 ಆಯಿತು. ಇಲ್ಲಿ ಕಳೆಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು 3 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇನ್ನೂ 1 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು; ಇದನ್ನು –1 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು:

$$0 - 1 = -1$$

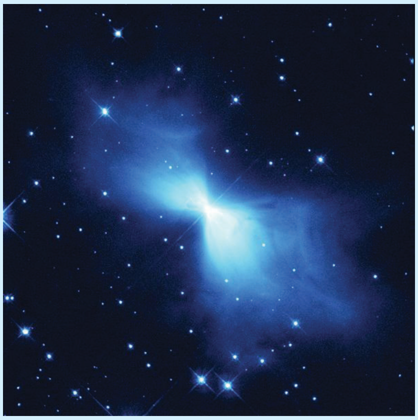
ಇದೇ ರೀತಿ 3 ರಿಂದ 5 ನ್ನು ಕಳೆದದ್ದು ಹೇಗೆ?

3 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 0; ಇನ್ನೆಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು?

$$0 - 2 = -2$$

ಶೈತ್ಯದ ಪರಿಧಿ

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿಶ್ವವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಟ ತಾಪಮಾನ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು ಭೂಮಿಯಿಂದ ಐನೂರು ಕೋಟಿ ಕೋಟಿ (5×10^{16}) ಕಿಲೋಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬೂಮರಾಂಗ್ ನೆಬುಲ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ನಕ್ಷತ್ರ ಪುಂಜದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಅದು –272.15°C ಆಗಿದೆ.



ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವ ಕನಿಷ್ಟ ಉಷ್ಣತೆ ಇಷ್ಟಾದರೂ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೃತಕವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಷ್ಣತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳ ಪ್ರಕಾರ, –273.15°C ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಉಷ್ಣತೆ ಇರಲು ಅಥವಾ ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Negative numbers)** ಎನ್ನುವರು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 25 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ತಲಾ 2 ಮಾರ್ಕ್ ಲಭಿಸುವುದು; ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೂ 1 ಮಾರ್ಕ್ ಕಳೆಯಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 19 ಸರಿ ಉತ್ತರ ಮತ್ತು 6 ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ಲಭಿಸುವ ಮಾರ್ಕ್

$$(19 \times 2) - 6 = 32$$

ಇದರ ವಿರುದ್ಧವಾದರೋ,

ಸರಿಯಾದ 6 ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ $(6 \times 2) = 12$ ಮಾರ್ಕ್ ಲಭಿಸುವುದು. ತಪ್ಪಾದ 19 ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ 19 ಮಾರ್ಕ್ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

ಋಣ ಧನ

ಸಿ.ಇ. 7 ನೇ ಶತಮಾನದಿಂದಲೇ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಹಣ ವಿನಿಮಯಗಳಲ್ಲಿನ ಸಾಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈಗಲೂ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

ಮಾರ್ಕು $12 - 19$

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

12 ರಿಂದ 12 ನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ 0 ಲಭಿಸುವುದು; ಇನ್ನು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು?

$$19 - 12 = 7$$

ಆಗ

$$12 - 19 = 0 - 7 = -7$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣವೂ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಬೇಕಾಗಿ ಬರಬಹುದು. ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 1 ಮಾರ್ಕ್; ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ $\frac{1}{2}$ ಮಾರ್ಕ್ ಕಳೆಯಲಾಗುವುದು. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆದು 3 ಉತ್ತರಗಳು ಮಾತ್ರ ಸರಿಯಾದ ಒಬ್ಬರಿಗೆ ಲಭಿಸುವ ಮಾರ್ಕ್ ಎಷ್ಟು?

ಸರಿಯಾದ 3 ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ 3 ಮಾರ್ಕ್ ಲಭಿಸುವುದು. ತಪ್ಪಾದ 7 ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ, 7ರ ಅರ್ಧವಾದ $3\frac{1}{2}$ ಮಾರ್ಕ್ ಕಳೆಯಬೇಕಾಗುವುದು.

3 ರಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 0. ಇನ್ನೂ $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕ್

$$3 - 3\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ತರ ಮಾತ್ರ ಸರಿಯಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಲಭಿಸುವ ಮಾರ್ಕೆಷ್ಟು?

$$1 - 4\frac{1}{2}$$

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

$$1 - 1 = 0$$

ಇನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕಾದುದು

$$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

ಆಗ

$$1 - 4\frac{1}{2} = 0 - 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$$

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಆರಂಭಿಸುವಾಗ 1, 2, $1\frac{1}{2}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ (ಋಣವಲ್ಲದ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Positive numbers)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಹಾಗಾದರೆ 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ? ಅದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅಲ್ಲ.

ಸಣ್ಣ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ಸೊನ್ನೆಗೆ ತಲುಪಿಸಿ ಬಳಿಕ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕಳೆಯಲಾಯಿತು. ಇದರ ಬದಲು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಋಣ ಅಂತಸ್ತುಗಳು

ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಹಡಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಹಡಿಗೆ ಹೋಗಲು ಲಿಫ್ಟ್ ಎಂಬ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು. ಇದರಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಮಹಡಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಬಟನುಗಳು ಇರುವುವು. ಈ ಬಟನುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮಹಡಿಗೆ ತಲುಪಬಹುದು. ಒಂದು ಲಿಫ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಈ ರೀತಿಯ ಬಟನುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ −1, −2 ಎಂಬೀ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾಕೆ?

ಈ ಕಟ್ಟಡದಲ್ಲಿ ನೆಲ ಅಂತಸ್ತಿನ ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಮಹಡಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು -1 ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕೆಳಗಿನ ಮಹಡಿಯನ್ನು -2 ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡೋಣ.

$$2 - 3 = -1 \qquad 3 - 2 = 1$$
$$3 - 5 = -2 \qquad 5 - 3 = 2$$
$$12 - 19 = -7 \qquad 19 - 12 = 7$$
$$3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$1 - 4\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2} \qquad 4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

ಇದರಿಂದ ಏನು ತಿಳಿಯಿತು?

ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವುದರ ಋಣವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

> x, y ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $x < y$ ಆಗಿದ್ದರೆ,
>
> $x - y = -(y - x)$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $4 - 9$ (ii) $14 - 29$ (iii) $5 - 10$

(iv) $25 - 65$ (v) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನ ಸಂಖ್ಯೆ -2 ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ, ಇನ್ನು ಲಭಿಸುವ ಕಾರ್ಡಿನಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಅಟ್ಟಿಯಿಂದ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿರುವ 2 ಎಂಬ ಕಾರ್ಡು ಲಭಿಸಿದರೆ ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು

$$2 - 2 = 0$$

ಸಂಖ್ಯೆಯು -2 ಆಗಿರುವಾಗ 2 ಕೂಡಿಸುವುದನ್ನು

$$-2 + 2$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$

10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿರುವ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ 1 ಮಾರ್ಕ್ ಕೊಟ್ಟು ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ 1 ಮಾರ್ಕ್ ಕಡಿಮೆಯೂ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮೊದಲ 5 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದು ನಂತರದ 5 ಉತ್ತರಗಳು ಸರಿಯಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಮಾರ್ಕ್ ಲಭಿಸುವುದು?

ಸರಿಯಾದ 5 ಉತ್ತರಗಳ 5 ಮಾರ್ಕಿನಿಂದ ತಪ್ಪಾದ 5 ಉತ್ತರಗಳ 5 ಮಾರ್ಕ್ ಕಳೆದಾಗ, ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕ್ 0.

ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆದ ಕ್ರಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕ್ $-5 + 5$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$-5 + 5 = 5 - 5 = 0$$

ಮೊದಲ 4 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದು, ನಂತರದ 6 ಉತ್ತರಗಳು ಸರಿಯಾದರೋ?

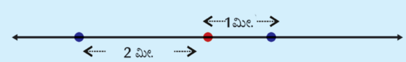
ಅದನ್ನು $-4 + 6$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ 6 ಮಾರ್ಕಿನಿಂದ ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ 4 ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಳೆದರೆ $6 - 4 = 2$. ಆಗ

$$-4 + 6 = 6 - 4 = 2$$

ಮೊದಲ 6 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪು, ನಂತರದ 4 ಉತ್ತರಗಳು ಸರಿಯಾದರೋ?

ದಿಶೆಯ ಬದಲಾವಣೆ

ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಚಲನೆಯ ಕುರಿತು ಹೇಳುವಾಗ, ರೇಖೆಯ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ದಿಶೆಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ, ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುವುದಿದೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಕೆಂಪು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಎಡಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೊದಲು 3 ಮೀಟರ್ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದ ಬಳಿಕ 5 ಮೀಟರ್ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ ತಲುಪುವುದು ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲೋ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲೋ? ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ?

ಇದನ್ನು

$$3 - 5 = -2$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲು 5 ಮೀಟರ್ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದ ಬಳಿಕ 3 ಮೀಟರ್ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೋ?

$$-5 + 3 = -2$$

ಮೊದಲು 5 ಮೀಟರ್ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಪುನಃ 3 ಮೀಟರ್ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೋ?

ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕ್ $-6+4$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ 4 ಮಾರ್ಕಿನಿಂದ ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ 6 ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಳೆದರೆ $4-6=-2$ ಆಗ,

$$-6+4=4-6=-2$$

10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ 1 ಮಾರ್ಕನ್ನು ನೀಡಿ ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ $\frac{1}{2}$ ಮಾರ್ಕ್ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ 3 ಉತ್ತರಗಳು ಮಾತ್ರ ಸರಿಯಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕು $3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದೆವು. ಉತ್ತರಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದರೆ,

ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕ್ $-3\frac{1}{2}+3$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ,

$$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$-2+2=2-2=0$$
$$-5+5=5-5=0$$
$$-4+6=6-4=2$$
$$-6+4=4-6=-2$$
$$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ಇದರಿಂದ ಏನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು?

ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

x, y ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ,

$$-x+y=y-x$$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $-4+9$ (ii) $-9+4$ (iii) $-15+8$

(iv) $-8+15$ (v) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ (vi) $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

ವೇಗದ ಗಣಿತ

ಭೂಮಿಯಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಎತ್ತರ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೂ ಅದರ ವೇಗವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು; ವೇಗವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವಾಗ ವಸ್ತುವು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಬೀಳುವಾಗ ವೇಗವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದು. ಕೊನೆಗೆ ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವುದು.

ವಸ್ತುವನ್ನು ನೇರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯುವುದಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 49 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆಯುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು 1 ಸೆಕೆಂಡು ಕಳೆಯುವಾಗ $49-9.8=39.2$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವುದು; 2 ಸೆಕೆಂಡು ಕಳೆಯುವಾಗ $49-(2\times 9.8)=29.4$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವುದು.

5 ಸೆಕೆಂಡು ಕಳೆದಾಗ ವೇಗವು

$$49-(5\times 9.8)=0$$

ಆಗುವುದು. ಬಳಿಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು. ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದು 7 ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವಾಗಲೋ?

ಬೀಳಲು ಆರಂಭಗೊಂಡು $7-5=2$ ಸೆಕೆಂಡು ಆಗಿರುವುದು. ಆಗ ವೇಗವು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ 2×9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ 19.6 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ವಸ್ತುವನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದು t ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವಾಗ ವೇಗವು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

$t<5$ ಆದರೆ, ವೇಗವು

$49-9.8t$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು.

$t>5$ ಆದರೋ? ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ

$t-5$ ಸೆಕೆಂಡು ಆಯಿತು. ಆಗ ವೇಗವು

$(t-5)\times 9.8=9.8t-49$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು.

ಪುನಃ ಕಳೆಯೋಣ

ತಪ್ಪಾದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ 1 ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ 2 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕುಗಳು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ನಂತರದ ಉತ್ತರವೂ ತಪ್ಪಾದರೆ?

3 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮಾರ್ಕ್ -3 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಮೊದಲ 2 ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಾದಾಗ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕು -2 ಆಗಿದೆ. ಬಳಿಕದ ಉತ್ತರವೂ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇನ್ನು 1 ಮಾರ್ಕ್ ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$-2 - 1 = -3$$

ನಂತರದ 2 ಉತ್ತರಗಳೂ ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದರೋ?

5 ಉತ್ತರಗಳೂ ತಪ್ಪು; ಮಾರ್ಕ್ -5. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದರೆ,

-3 ರಿಂದ ಪುನಃ 2 ಕಡಿಮೆ ಆಯಿತು. ಅಂದರೆ $-3 - 2$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$-3 - 2 = -5$$

ಋಣ ವೇಗ

49 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವನ್ನು ಬರೆದದ್ದು ಎರಡು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಲ್ಲವೇ.

$t < 5$ ಆದರೆ $v = 49 - 9.8t$

$t > 5$ ಆದರೆ $v = 9.8t - 49$

ಮೇಲಕ್ಕಿರುವ ವೇಗವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಗಳಿಂದಲೂ ಕೆಳಕ್ಕಿರುವ ವೇಗವನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸಮಯದ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$v = 49 - 9.8t$$

ಎಂಬ ಒಂದೇ ಬೀಜಗಣಿತವಾಕ್ಯ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎಸೆದು 8 ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವಾಗ ವೇಗ,

$49 - (9.8 \times 8) = -29.4$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು

ಹಾಗಾದರೆ $-5 - 3$ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

-5 ಎಂಬುದು 0 ಗಿಂತ 5 ಕಡಿಮೆ, ಪುನಃ 3 ಕಡಿಮೆಯಾದರೋ? ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು? ಅಂದರೆ,

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

ಇದೇ ರೀತಿ $-5 - 7$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$-5 - 7 = -(5 + 7) = -12$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಈ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಋಣ ಸಿಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೋ?

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$-x - y = -(x + y)$$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

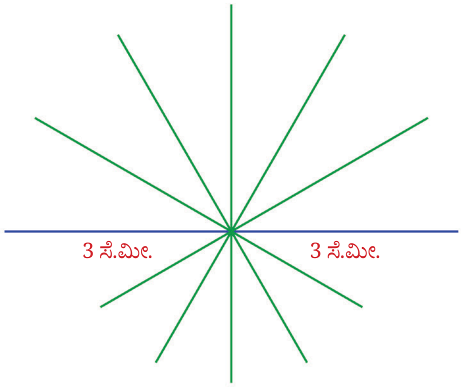
i) $-3 - 1$	iv) $-7 - 8$	vii) $8 - 12$	x) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
ii) $-9 + 4$	v) $-1 - 1$	viii) $1\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$	xi) $-2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$
iii) $-10 - 4$	vi) $-10 + 20$	ix) $-25 - 3\frac{1}{2}$	xii) $-3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$

7

ಸಮಭಾಜಕಗಳು

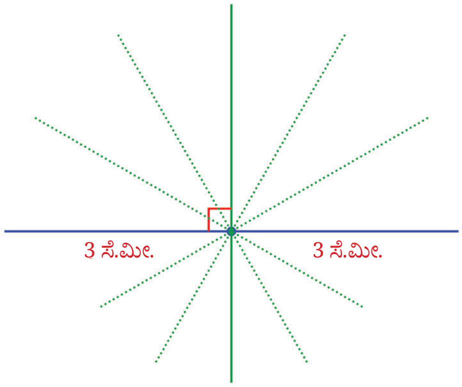
ಗೆರೆಯ ಸಮಭಾಜಕಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಆ ಗೆರೆಯ **ಸಮಭಾಜಕಗಳು (Bisectors)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

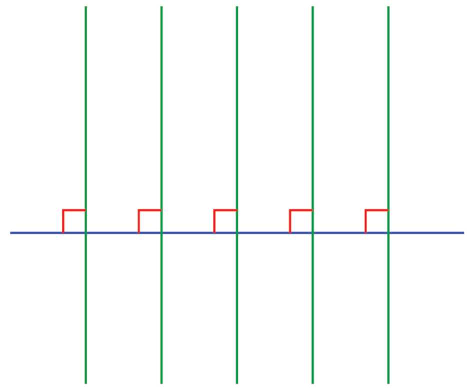
ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವೂ ಆಗಿರುವುದು.



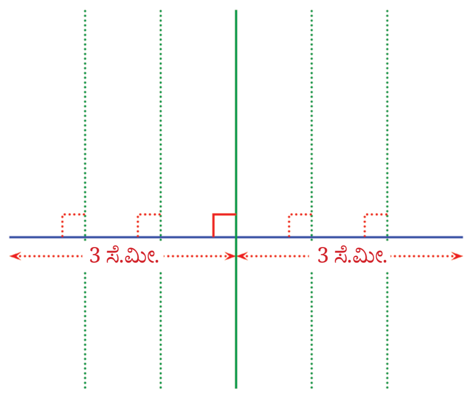
ಈ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಗೆರೆಯ **ಲಂಬಸಮಭಾಜಕ (Perpendicular bisector)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

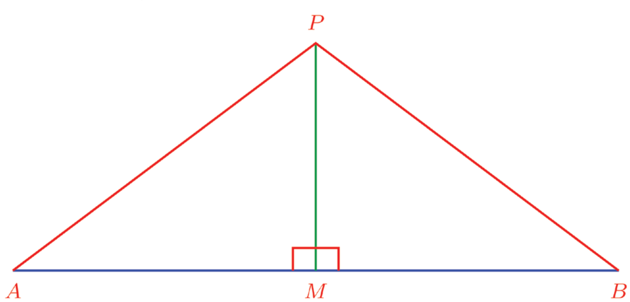
ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಒಂದು ಲಂಬ ಮಾತ್ರವೇ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು; ಅದುವೇ ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕ.



ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. *AB* ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು, *AB* ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ *P* ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



AP, BP ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು ಎಂದು ಅನಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ?

ಊಹೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ.

AP ಮತ್ತು *BP* ಗಳು *AMP, BMP* ಎಂಬೀ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ ಪೈಥಾಗರಸ್ ನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ

$$AP^2 = AM^2 + MP^2$$

$$BP^2 = BM^2 + MP^2$$

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಚೌಕಗಳು ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಆಯತವೂ ಚೌಕವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ AM, BM ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು? AB ಯ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ PM. ಆದುದರಿಂದ, $AM = BM$. ಹಾಗಾದರೆ AP, BP ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳೋ?

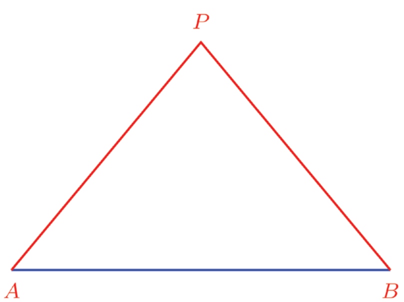
$$AP = BP$$

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು, ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆಯೇ?



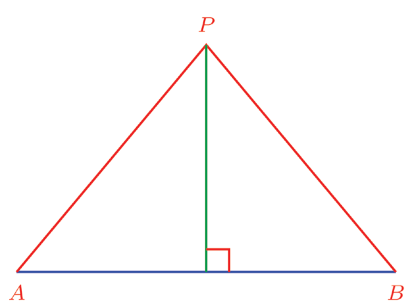
AB ಎಂಬ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು Perpendicular Bisector ಟೂಲ್ ಉಪಯೇಗಿಸಿ AB ಯನ್ನು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವು ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ AC, BC ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳೆನ್ನೆಳೆದು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. C ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳಾಗಿರುವ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ P.

P ಯು AB ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು: P ಯಿಂದ AB ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು AB ಯ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆಯೇ?

ಈ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡೋಣ:



P ಎಂಬ ಬಿಂದು, A ಮತ್ತು B ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದಲ್ಲವೇ; ಅಂದರೆ $AP = BP$, ಹಾಗಾದರೆ, APB ಎಂಬುದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಮೂಲೆಯಾಗಿರುವ P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬವು, ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವಾದ AB ಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ. (**ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

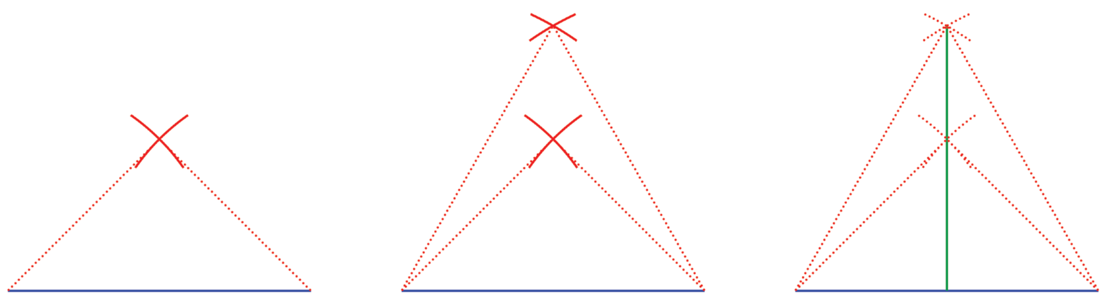
ಅಂದರೆ, P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬವು AB ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೂ ಸರಿಯಾಗುವುದು.

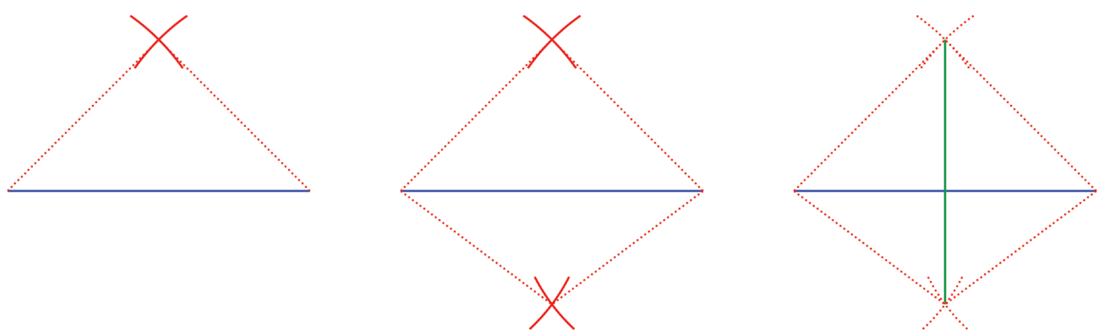
ಒಂದು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು.

min = 0, max = 10, increment = 0.01 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು Slider a ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. AB ಎಂಬ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದು A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು a ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳಿಗೆ Trace ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರ್ ಗೆ Animation ನೀಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಇಂತಹ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅವೆರಡೂ ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೇ ಆಗಿದೆ ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕ (ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಅದರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಕಲ್ಲವೇ).



ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು, ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಆಗಬಹುದು:



ಮಟ್ಟವನ್ನೋ ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನೋ ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

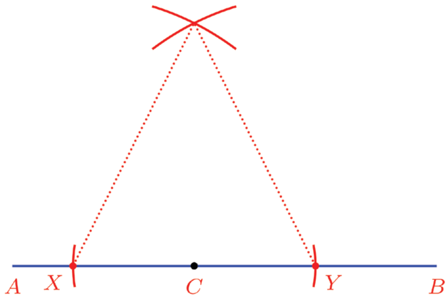
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ:

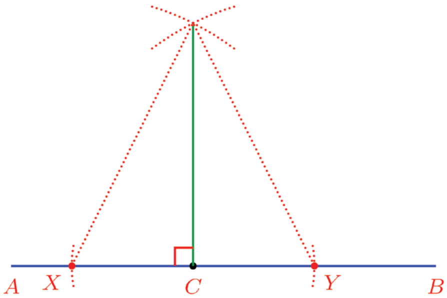
C ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಭಾಗವನ್ನು AB ಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಭಾಗದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವನ್ನೆಳೆದರೆ, C ಯ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು AB ಯಲ್ಲಿ C ಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ X, Y ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ.

ಹಾಗಾದರೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದು XY ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ XY ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವು C ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು.

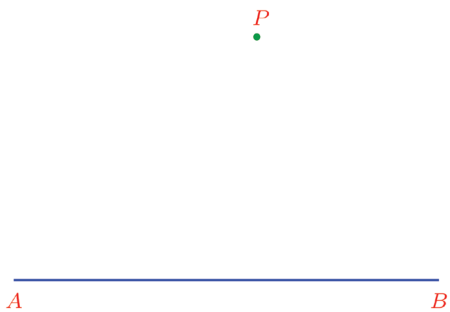
ಈ ಸಮಭಾಜಕದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಸಿಗಲು X ಮತ್ತು Y ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನು C ಯ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

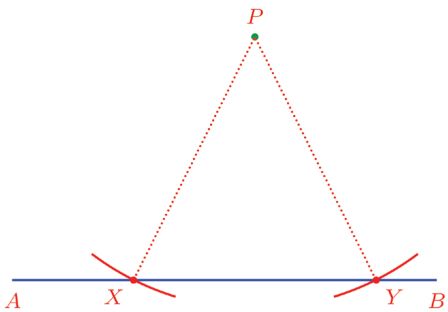




ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ.

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

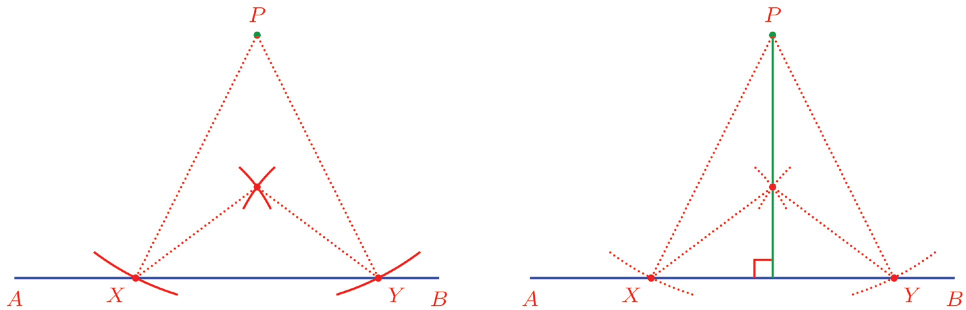




ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ P ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ X, Y.

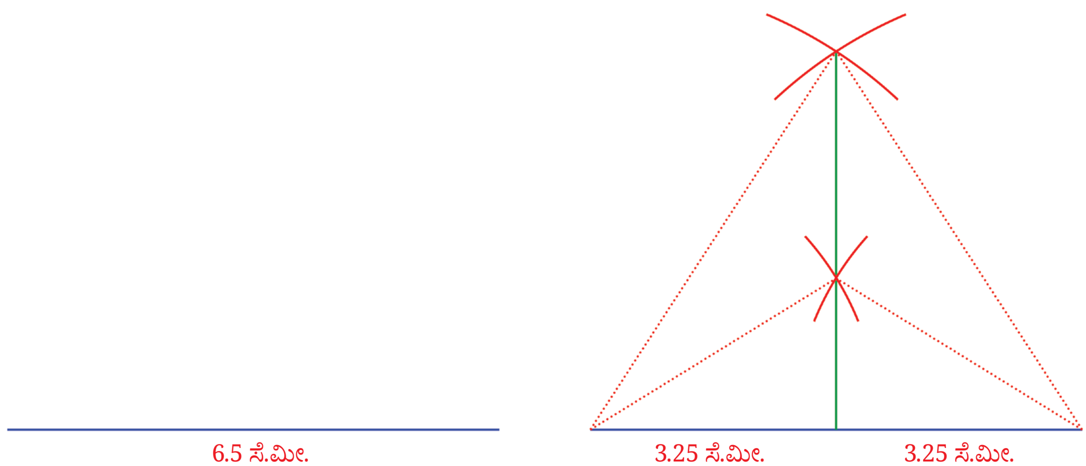
ಹಾಗಾದರೆ XY ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ P.

X ಮತ್ತು Y ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದನ್ನು P ಗೆ ಜೋಡಿಸಿ, XY ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮಭಾಜಕವು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

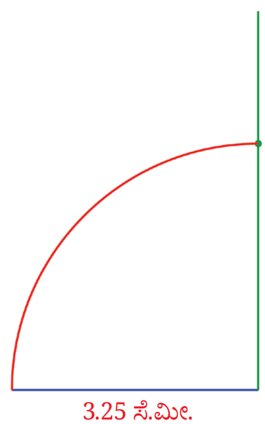


ಇನ್ನು ಇದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3.25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

6.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು, ಅದರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ 3.25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಲಭಿಸುವುದು.

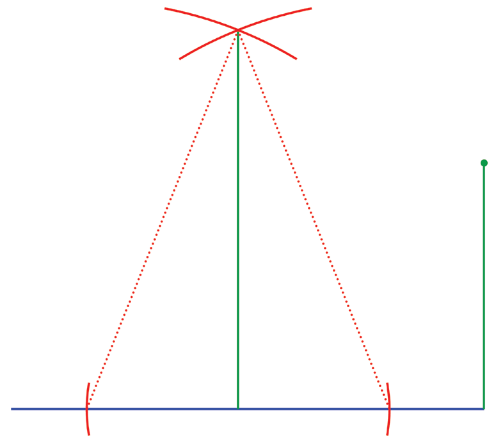


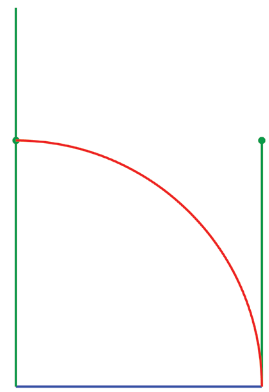
ಇನ್ನು ಈ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಚೌಕದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಲಭಿಸುವುದು.



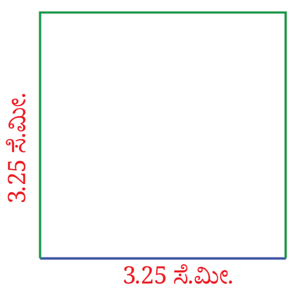
(ಇಷ್ಟು ಆದರೆ ಕೋನಮಾಪಕವನ್ನೋ ಮಟ್ಟವನ್ನೋ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೇ ಇಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವುದು.)

ಮೂರನೇ ಭುಜ ಲಭಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಿಂದ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು (ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಎಡಬದಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕಾದೀತು)





ಇನ್ನು ಲಂಬಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಚೌಕವು ಲಭಿಸುವುದು. (ಯಾಕಾಗಿ?)



ಈ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸ್ಕೇಲ್ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಸ್ಕೇಲ್ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(1) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $4\frac{1}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕ.

(2) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $5\frac{1}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ $3\frac{1}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ.

(3) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2.75 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ.

(4) ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 9 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ.

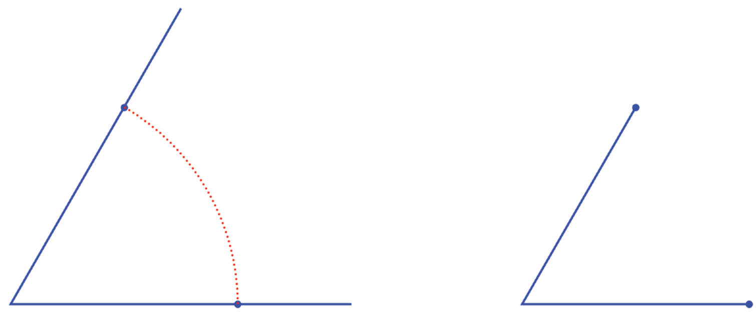
ಹಗ್ಗವೂ ಲೆಕ್ಕವೂ

ಪ್ರಾಚೀನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲಗ್ರಂಥವಾದ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್‌ನ ಕುರಿತು ಕೇಳಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಅದರಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸುವಂತಹ ರೂಪಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅಳತೆ ಗುರುತಿಸಿರದ ಅಂಕುಡೊಂಕಲ್ಲದ ಒಂದು ಕೋಲು (Straight edge) ಮತ್ತು ಕೈವಾರ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸುವ ರೂಪಗಳು ಮಾತ್ರ. ಇದು ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ? ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನೆಳೆಯಲು, ರಚಿಸಲು ನೂಲು ಅಥವಾ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಹಗ್ಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಉರುಟುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಎರಡು ಗೂಟಗಳ ನಡುವೆ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಬಿಗಿಯಾಗಿ ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಿದರೆ ಗೆರೆಯಾಯಿತು. ಒಂದು ಗೂಟವನ್ನು ತೆಗೆದು, ಇನ್ನೊಂದು ಗೂಟದ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತಿದರೆ ಅದು ಉರುಟಾಯಿತು.

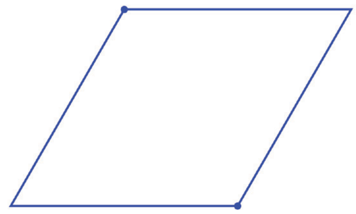
ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಇಂದು, ಇಂತಹ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಚಾರಿತ್ರಿಕವೂ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕವೂ ಆದ ಹಿನ್ನಲೆಯ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಮಾತ್ರವೇ ಇರುವುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಅಡ್ಡಗೆರೆಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಓರೆಗೆರೆಗೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು, ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

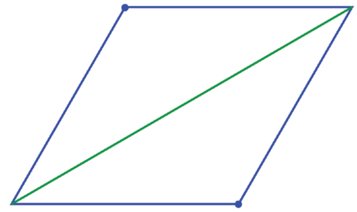


ಇದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ ಆದುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. (**ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡು ಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

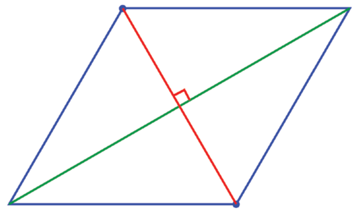
ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು **ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ (Rhombus)** ಎನ್ನುವರು.

ಇದರ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ನೋಡಿದರೆ, ಅದು ಹಾದುಹೋಗುವ ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ ಉಳಿದೆರಡು ಮೂಲೆಗಳು?



ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳು ಕರ್ಣದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು ಅಥವಾ ಅದನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಎಳೆಯುವ ಎರಡನೇ ಕರ್ಣವು ಮೊದಲನೆಯ ಕರ್ಣದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವುದು.



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲು ಸಣ್ಣ ಕರ್ಣವನ್ನೆಳೆದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವಾಗಿರುವುದು.

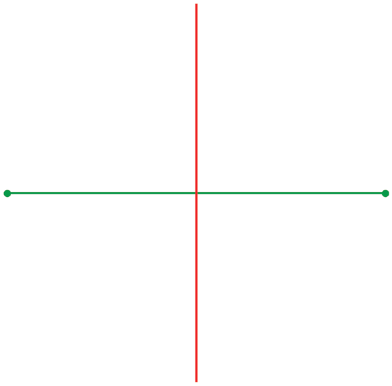
ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

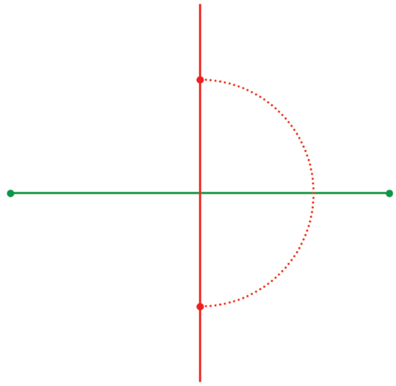
ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗಿರುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಕೇಳಬಹುದಾದ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದೆ:

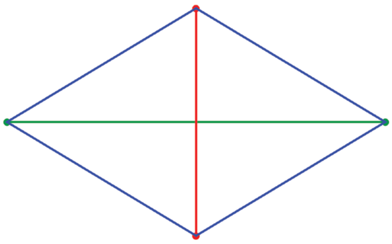
ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಅದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ ಆಗುವುದೇ?

ಮೊದಲು ಇಂತಹ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ; ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ದೂರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.





ಇನ್ನು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವ ಚತುರ್ಭುಜ ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ?



ಇದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಪ್ರಶ್ನೆ.

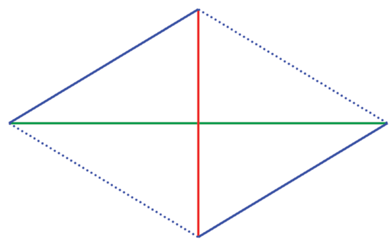
ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾದುದರಿಂದ, ಅದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಲ್ಲವೇ.

ಕೆಂಪು ಗೆರೆ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಹಸಿರು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು; ಹಾಗೆಯೇ ಹಸಿರು ಗೆರೆ ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಂಪು ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

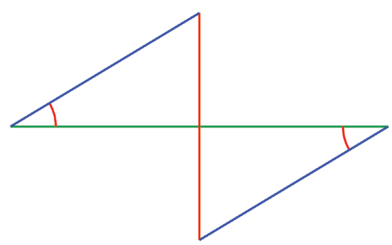
ಹಾಗಾದರೆ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ, ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳಾದ ನಾಲ್ಕು ನೀಲ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಎಡಬದಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ:



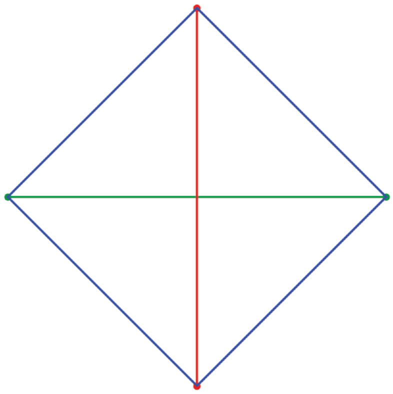
ಇವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ನೀಲ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಆಗಿವೆ.
ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವೂ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಆಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೂ ಆಗಿದೆ (**ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡು ಭುಜಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಇಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ನೋಡಿದ್ದು?

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವೂ ಆದರೋ?



ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗುವುವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲೆಯ ಕೋನಗಳೂ 90° ಆಗುವುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವು ಚೌಕವಾಗುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹೊಸತೊಂದು ರೀತಿಯಾಯಿತು. ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

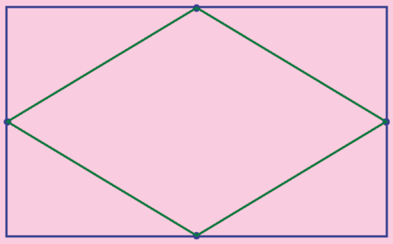
(1) ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

(ii) 6.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

(iii) 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



(i) ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಆಯತದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

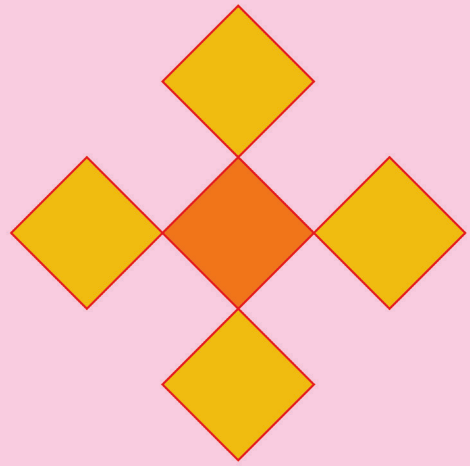
(ii) ಈ ಚತುರ್ಭುಜ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

(3) ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದ 6.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(4) ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು, ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಮೂಲೆಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

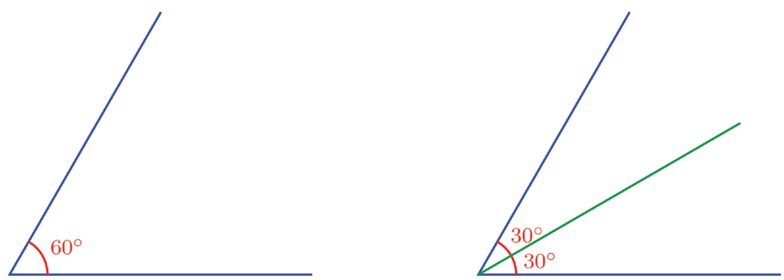
(5) ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(6) ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ

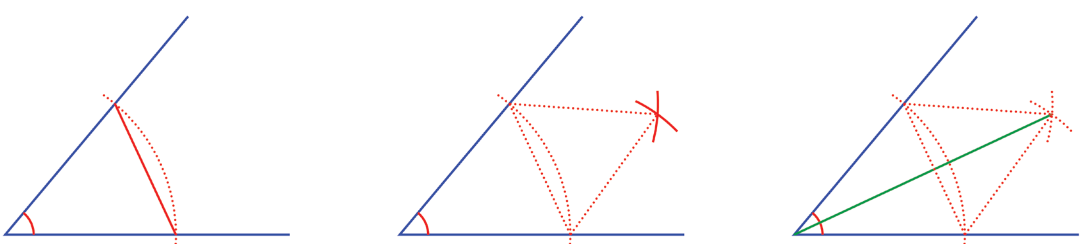
ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವ ಗೆರೆಯನ್ನು **ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ (angle bisector)** ಎನ್ನುವರು.



ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬವು, ಮೂಲೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ.

ಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಂದಲೂ, ಮೂಲೆಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನ ಲಭಿಸುವುದು; ಕೋನದ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಈ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವೂ ಆಗುವುದು.

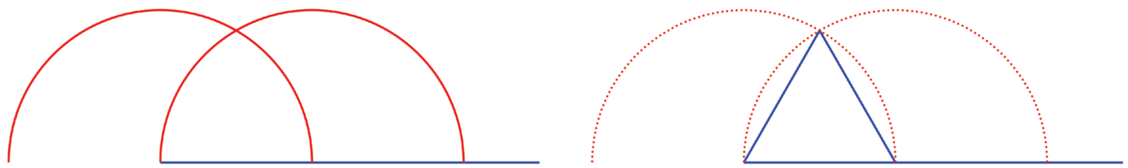


ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಕೇಲ್ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 30° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

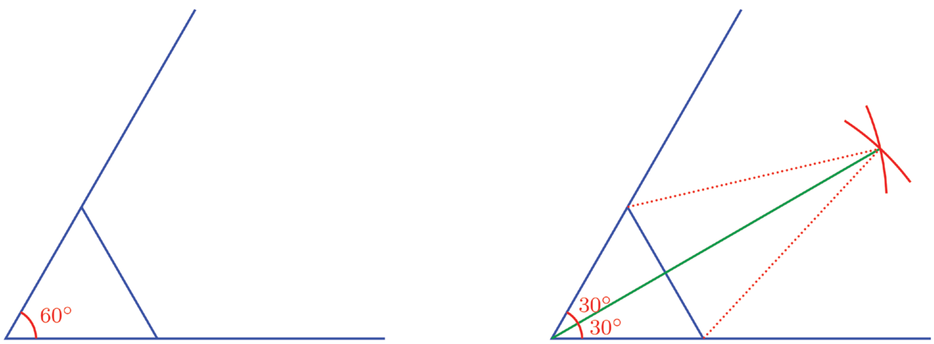
ಮೊದಲು 60° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದು, ಅದರ ಒಂದು ತುದಿ ಮೂಲೆಯಾಗುವಂತೆ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ನಕ್ಷತ್ರ ಚಿತ್ರ** ಎಂಬ ಭಾಗ)



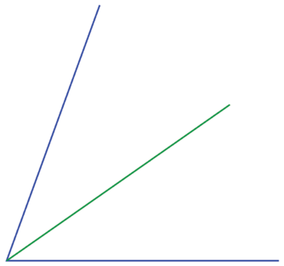
ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ 60° ಆದುದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ತುದಿಯಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವಾಗಿರುವುದು; ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನೆಳೆದರೆ 30° ಕೋನವಾಗುವುದು.



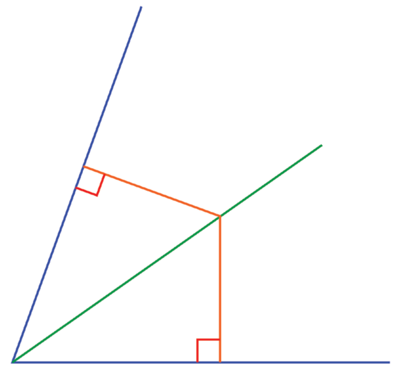
ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ಗೆರೆಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಅಥವಾ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಿವೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಇದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕಗಳಿಗೂ ಇದೆ.

ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ;



ಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

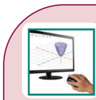


ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆಯಲ್ಲವೇ.

ಹಸಿರು ಗೆರೆ, ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾದುದರಿಂದ, ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಒಂದು ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಎರಡೂ ಲಂಬತ್ರಿಕೋನಗಳಾದುದರಿಂದ, ಮೂರನೇ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

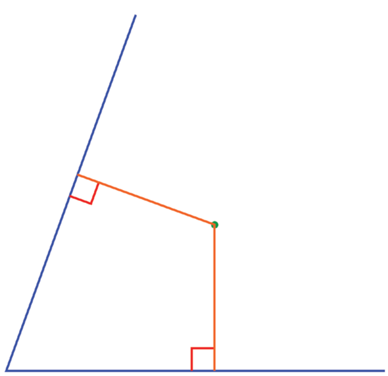
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಕರ್ಣವಾದುದರಿಂದ ಅದರ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಂಪು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

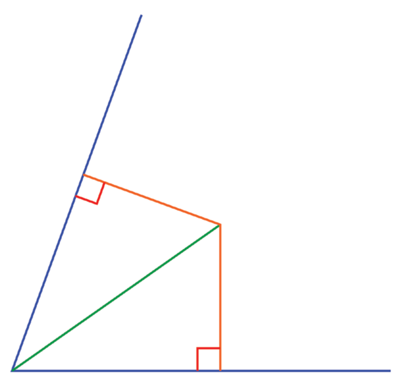
ಆದುದರಿಂದ, ಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಭುಜಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.


ಒಂದು ಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. Angle Bisector ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ A, B, C ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಮಭಾಜಕವು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ D ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, D ಯಿಂದ ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈ ಲಂಬಗಳು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು E, F ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. DE, DF ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. D ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಅಥವಾ, ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಲಂಬದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದೇ?

ಅಂತಹ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸಿ ಕೋನದ ಮೂಲೆಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ನೋಡೋಣ.





ಈಗಲೂ ಒಂದೇ ಕರ್ಣವಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳು ಲಭಿಸಿತು. ಇವುಗಳ ಕೆಂಪು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ, ಮೂರನೆ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದರಿಂದ, ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಡಬದಿಯ ಮೂಲೆಯ ಕೋನಗಳು, ಮೊದಲ ಕೋನವನ್ನು ಹಸಿರು ಗೆರೆಯು ವಿಭಾಗಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ. ಇದು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ, ಈ ಗೆರೆಯು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಲಂಬದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು ಅಥವಾ, ಒಂದು ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಲಂಬದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು.

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $37\frac{1}{2}^{\circ}$ (ii) $62\frac{1}{2}^{\circ}$

(2) ಸ್ಕೇಲ್ ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(a) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳು

(i) 45° (ii) 135° (iii) 75° (iv) 15°

(b) ಒಂದು ಭುಜ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅದರ ತುದಿಕೋನಗಳು $67\frac{1}{2}^{\circ}$ ಮತ್ತು $22\frac{1}{2}^{\circ}$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ IV ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

51ಕ. **ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು – ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಭಾರತದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪೌರನ ಕರ್ತವ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.**

(ಕ) ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು, ಅದರ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು, ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜವನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು;

(ಖ) ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಸಂಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಉದಾತ್ತ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಘೋಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಗ) ಭಾರತದ ಸಾರ್ವಭೌಮತೆಯನ್ನು, ಏಕತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು.

(ಘ) ದೇಶವನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಕ್ಕೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಲು ಕರೆ ಬಂದಾಗ ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಙ) ಧಾರ್ಮಿಕ, ಭಾಷಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಅಥವಾ ಜಾತಿ ಪಂಗಡಗಳ ಭಿನ್ನತೆಗಳಿಂದ ಅತೀತವಾಗಿ ಭಾರತದ ಎಲ್ಲ ಜನತೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮರಸ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಭ್ರಾತೃತ್ವದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು, ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಕುಂದುಂಟುಮಾಡುವ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುವುದು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಭವ್ಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಕಾಪಾಡುವುದು.

(ಛ) ಅರಣ್ಯಗಳು, ಸರೋವರಗಳು, ನದಿಗಳು ಮತ್ತು ವನ್ಯಜೀವಿಗಳು ಸೇರಿದಂತೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕಂಪ ತೋರಿಸುವುದು.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವ, ಮಾನವೀಯತೆ, ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮತ್ತು ಸುಧಾರಣ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತನ್ನು ರಕ್ಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಹಿಂಸೆಯನ್ನು ತ್ಯಜಿಸುವುದು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಿಯ ಔನ್ನತ್ಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಯಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾಗಿ ಶ್ರಮಿಸುವುದು.

(ಟ) ಆರರಿಂದ ಹದಿನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ, ತನ್ನ ರಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಹೆತ್ತವರೋ ರಕ್ಷಕರೋ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕಿರುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ನಿಮ್ಮ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ನ್ಯಾಯ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸಲು ಪ್ರೇರಣೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಚೋದನೆಯನ್ನೂ ನೀಡುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಲು ಈಗ ಒಂದು ಆಯೋಗವು ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. 'ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ' ಎಂದು ಅದರ ಹೆಸರು. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

- ವಾಕ್ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ಜೀವ ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ಬದುಕು ಹಾಗೂ ವಿಕಾಸದ ಹಕ್ಕು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಗೌರವಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸಲ್ಪಡುವ ಹಕ್ಕು.
- ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಹಾಗೂ ಲೈಂಗಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯಗಳಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ ಪಡೆಯಲೂ ಶುಶ್ರೂಷೆ ಪಡೆಯಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ ಕಾರ್ಮಿಕತನದಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಕೆಲಸಗಳಿಂದ ಬಿಡುಗಡೆ.
- ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ್ಯವಿವಾಹದಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಬದುಕುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ನಿರ್ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗದಂತೆ ಸಂರಕ್ಷಣೆ.
- ಉಚಿತ ಹಾಗೂ ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಕ್ಕು.
- ಕಲಿಯಲೂ ಆಟವಾಡಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಪ್ರೀತಿ ಹಾಗೂ ರಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕುಟುಂಬ ಹಾಗೂ ಸಮಾಜವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಹಕ್ಕು.

ನಿಮ್ಮ ಕೆಲವು ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

- ಶಾಲೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತುಗಳನ್ನು ಹಾನಿ ಮಾಡದೆ ರಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತು ಪಾಲಿಸುವುದು.
- ಶಾಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳನ್ನು, ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು, ಹೆತ್ತವರನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಹಪಾಠಿಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಇತ್ಯಾದಿ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಇತರರನ್ನು ಗೌರವಿಸಲೂ ಅಂಗೀಕರಿಸಲೂ ಸಿದ್ಧರಾಗುವುದು.

ಸಂಪರ್ಕಿಸಬೇಕಾದ ವಿಳಾಸ:

ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ

'ಶ್ರೀ ಗಣೇಶ್', ಟಿ.ಸಿ. 14/2036, ವಾನ್ ರೋಸ್ ಜಂಕ್ಷನ್, ತಿರುವನಂತಪುರ-34

ಫೋನ್ : 0471-2326603

E-mail : childrightscpcr@kerala.gov.in, rtecpcr@kerala.gov.in

Website : www.kescpcr.kerala.gov.in.

ಮಕ್ಕಳ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 1098, ಅಪರಾಧ ನಿಯಂತ್ರಣ : 1090, ನಿರ್ಭಯ : 1800 425 1400

ಕೇರಳ ಪೋಲೀಸ್ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 0471-3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***