கணிதம்

பகுதி - 1

வகுப்பு
VIII

Mathematics
Part - 1
Std VIII
Tamil Medium

கேரளஅரசு
பொதுக்கல்வித்துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2025

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர்.எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நவத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

கணிதம்

8

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

அன்பு மாணவர்களே,

பலவகை அளவுகளைக் குறிப்பிட எண்ணல் எண்களையும் பின்ன எண்களையும் பயன்படுத்துவது எவ்வாறு என முன் வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். அளவுகளின் செயல்களை மட்டளவுகளின் செயல்களாக மாற்றுவதும், அவற்றைக் குறித்துள்ள பொதுக்கருத்துகளை இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதுவதும் கற்றிருக்கிறோம். செவ்வகம், முக்கோணம், வட்டம் போன்ற வடிவியல் வடிவங்களின் பல சிறப்பியல்புகளை பகுத்தறியவும் செய்தோம்.

இத்தகைய கல்வியின் தொடர்ச்சியே இந்தப் புத்தகம். அளவுகளும் அவற்றைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களும் தொடர்பான சில பிரச்சனைகளுக்கு இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி தீர்வு காணும் முறை இங்கு ஆரம்பமாகிறது. இயற்பியல் பிரச்சனைகளை கணிதப் பிரச்சனைகளாக மாற்றி, இயற்கணிதம் வழியாக விடையைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை பெரும்பாலும் எல்லா அறிவியல்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே கணிதக் கற்றலின் எல்லா நிலைகளிலும் இதற்கு முக்கியத்துவம் உண்டு.

ஏழாம் வகுப்பில் பல்வேறு அளவுகளில் முக்கோணம் வரைந்த அனுபவம், இங்கு சம முக்கோணங்கள் என்ற கருத்தாக வளர்கிறது. தொடர்ச்சியான கற்றலில் இது முக்கோணவியல் என்ற கணிதப் பிரிவாக வளர்கிறது. நேரிடையாக அளக்க இயலாத தூரங்களையும் உயரங்களையும் கணக்கிட உதவுகிறது.

கணிதப் பயன்பாடுகளின் முக்கியத்துவத்தையும், கணித உத்தியின் அழகையும் அதிகமாகப் புரிந்து கொள்ள இந்தப் புத்தகம் உதவும் என்பதே எதிர்பார்ப்பு,

வாழ்த்துக்களுடன்,

முனைவர் ஜெயப்பிரகாஷ் ஆர்.கெ.
இயக்குநர்
எஸ்.சி.இ.ஆர்.டி கேரளம்

TEXTBOOK DEVELOPMENT TEAM

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. Shiki M.
Professor,
College of Engineering Trivandrum,
Thiruvananthapuram

Experts

Dr. P. Ramesh Kumar
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University of Kerala
Karyavattom, Thiruvananthapuram

Dr. Sukesh A.
Associate Professor,
Government College of Engineering,
Kannur

Participants

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary
School, Pulapatta, Palakkad

Vijayakumaran T.K.
HSST (Retd),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Pravanadukkam, Kasaragod

C.T. Firoz Babu
HST Mathematics,
GGVHSS Wandoor, Malappuram

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
GHSS, Kadannappally P.O,
Kadannappally, Kannur

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School,
Champad, Kannur

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics, GHSS Madappally,
Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K.
HST Mathematics, Pandallur HSS,
Kadambode Post, Malappuram

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

Firoza Moidu
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS,
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
HST Mathematics,
MGD High School, Puthussery,
Puthusserry South P.O,
Pathanamthitta

Ayishakutty K.K.
HST Mathematics,
GHS, Beenachi,
Sulthanbethery, Wayanad

Rajesh M.
HST Mathematics,
Kalladi HSS Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

Ullas U.G., (Artist)
HST Physical Science, CBHSS Vallikunnu, Malappuram

Tamil Version

Language Expert

Dr. Hepsy Rose Mary A
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala,
Thiruvananthapuram.

Subject Expert

Venugopal C
Assistant Professor (Retd)
Govt. IASE, Thrissur.

Members

S.C Edwin Daniel, HM (Retd), GHS Pambanar, Idukki.
Little Linda T.R, HST Maths (Retd), GHSS Anakkara, Idukki.
Domanatha Sarath Kame, HST Maths, CPM GHSS Peermade, Idukki.
Amirthaselvi S.A, HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.
K. Palaniselvam, HST Maths, GHS Chinnakanal, Idukki.
Balson Nesa Raj N.L, HST Maths, GHS Chemmannu, Idukki.

Academic Coordinator

Dr. Anilkumar A.K.
Research Officer, SCERT

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

உள்ளடக்கம்

1	வர்க்கங்கள்	7
2	சம முக்கோணங்கள்	15
3	வர்க்கசமன்பாடுகள்	37
4	பலகோணங்கள்	61
5	சமன்பாட்டுத் தீர்வு	79
6	புதிய எண்கள்	93
7	இருசமவெட்டிகள்	101

இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காகச் சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணக்குச் செய்து பார்க்கலாம்

ஆராய்ச்சி

ICT வாய்ப்பு

இந்திய அரசமைப்பு

முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

1

வர்க்கங்கள்

முழுவர்க்கங்கள்

இந்த எண் வரிசையைப் பார்க்கவும்.

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

இந்த எண்களின் சிறப்புத்தன்மை என்ன?

இது போன்ற எண்களை ஐந்தாம் வகுப்பில் கற்றது நினைவு உள்ளதா? (**பெருக்கல் முறைகள்** என்ற பாடத்தில் **சதுரஎண்கள்** என்ற பகுதி).

$1 = 1 \times 1$ $4 = 2 \times 2$ $9 = 3 \times 3$ $16 = 4 \times 4$

இவற்றை வேறொரு முறையில் எழுதலாம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோமல்லவா. (**மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கல்** என்ற பாடம்).

$$1 = 1^2$$
$$4 = 2^2$$
$$9 = 3^2$$
$$16 = 4^2$$
$$25 = 5^2$$

....

இவற்றை 1 இன் வர்க்கம், 2 இன் வர்க்கம், 3 இன் வர்க்கம் எனக் கூறலாம் என்றும் பார்த்தோம். (ஏழாம் வகுப்பில் **சதுரங்களும் செங்கோண முக்கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **சதுரப்பரப்பு** என்ற பகுதி). ஒரு பின்ன எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைப்பதையும் வர்க்கம் என்றே கூறப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக

$$\frac{1}{2} \text{ இன் வர்க்கம் } = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1, 2, 3, ... என்ற எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களான 1, 4, 9, ... என்ற எண்கள் **முழுவர்க்கங்கள் (Perfect squares)** எனக் கூறப்படுகிறது.

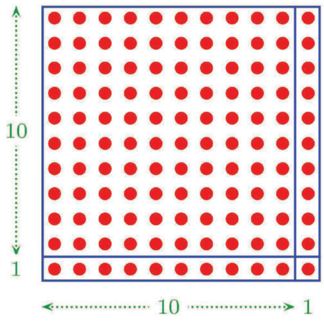
அப்போது பாடத்தின் தொடக்கத்தில் கூறிய எண் வரிசையில் முதலில் வரும் நான்கு எண்கள், முதல் நான்கு முழுவர்க்கங்கள் ஆகும்.

10 இன் வர்க்கம் கணக்கிடுவது கடினமல்ல.

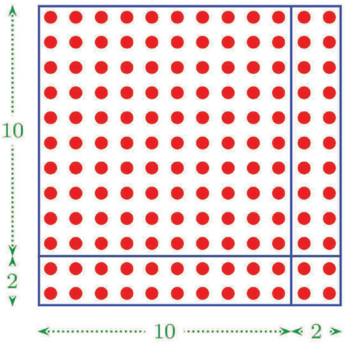
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

தொடர்ந்து வரும் எண்களின் வர்க்கங்கள்?

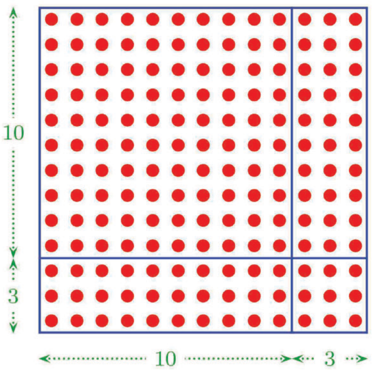
ஐந்தாம் வகுப்பில் இரண்டிலக்க எண்களை எவ்வாறு பெருக்கினோம்? (**பெருக்கல் முறைகள்** என்ற பாடத்தில் **செவ்வகப் பெருக்கல்** என்ற பகுதி)



	10	1	
10	100	10	110
1	10	1	11
			121



	10	2	
10	100	20	120
2	20	4	24
			144



	10	3	
10	100	30	130
3	30	9	39
			169

இவற்றிலெல்லாம் கட்டங்களிலுள்ள எண்களை கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக மூலைவிட்டங்கள் வழியாக ஆனால்?

	10	1
10	100	10
1	10	1

	10	2
10	100	20
2	20	4

	10	3
10	100	30
3	30	9

இந்தக் கூட்டல்களை இவ்வாறு எழுதலாம்?

$$11 \times 11 = 100 + (10 + 10) + 1$$

$$12 \times 12 = 100 + (20 + 20) + 4$$

$$13 \times 13 = 100 + (30 + 30) + 9$$

இதை இவ்வாறும் எழுதலாம் அல்லவா?

$$11^2 = 10^2 + (10 \times 2) + 1^2$$

$$12^2 = 10^2 + (20 \times 2) + 2^2$$

$$13^2 = 10^2 + (30 \times 2) + 3^2$$

மேலும் இதைப்போல் 14 மற்றும் 15 இன் வர்க்கம் (கட்டங்கள் வரையாமல்) கணக்கிடலாம் அல்லவா?

$$14^2 = 10^2 + (40 \times 2) + 4^2$$

$$= 100 + 80 + 16$$

$$= 196$$

$$15^2 = 10^2 + (50 \times 2) + 5^2$$

$$= 100 + 100 + 25$$

$$= 225$$

16, 17, 18, 19 என்ற எண்களின் வர்க்கங்களையும் இதைப்போல் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

தொடர்ந்து 20 இன் வர்க்கம் கணக்கிடுவது கடினமல்ல.

$$20^2 = 20 \times 20$$

$$= (2 \times 10) \times (2 \times 10)$$

$$= 2 \times 2 \times 10 \times 10 = 400$$

21, 22, 23 என்பனவற்றின் வர்க்கங்கள், முன்பு செய்தது போல் முதலில் கட்டங்கள் வரைந்து செய்து பார்க்கலாம்.

	20	1
20	400	20
1	20	1

	20	2
20	400	40
2	40	4

	20	3
20	400	60
3	60	9

கூட்டல்களை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$21 \times 21 = 400 + (20 + 20) + 1 = 441$$

$$22 \times 22 = 400 + (40 + 40) + 4 = 484$$

$$23 \times 23 = 400 + (60 + 60) + 9 = 529$$

இதை இவ்வாறும் எழுதலாம் அல்லவா.

$$21^2 = 20^2 + (20 \times 2) + 1^2$$

$$22^2 = 20^2 + (40 \times 2) + 2^2$$

$$23^2 = 20^2 + (60 \times 2) + 3^2$$

இதில் 20, 40, 60 என்ற எண்கள் எவ்வாறு கிடைத்தது?

$$21^2 = 20^2 + (20 \times 1 \times 2) + 1^2$$

$$22^2 = 20^2 + (20 \times 2 \times 2) + 2^2$$

$$23^2 = 20^2 + (20 \times 3 \times 2) + 3^2$$

மேலும் இந்த முறையில் 24 இன் வர்க்கமும் கணக்கிடலாம் அல்லவா:

$$24^2 = 20^2 + (20 \times 4 \times 2) + 4^2$$

$$= 400 + 160 + 16$$

$$= 576$$

இதைப்போல் 36 ன் வர்க்கம் கணக்கிடலாமா?

	30	6
30	900	180
6	180	36

$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$

$$= 900 + 360 + 36$$

$$= 1296$$

எந்த இரண்டிலக்க எண்ணினுடையவும் வர்க்கம், கட்டம் வரையாமல் இதைப் போல் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக, 79^2 பார்க்கலாம்:

$$79^2 = 70^2 + (70 \times 9 \times 2) + 9^2$$
$$= 4900 + 1260 + 81$$
$$= 6241$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள வர்க்கங்கள் கணக்கிடவும்.

(i) 64^2 (ii) 35^2 (iii) 47^2 (iv) 53^2 (v) 88^2

தசமவர்க்கங்கள்

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்

பக்கங்களின் நீளம் 3.7 மீட்டரான சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

இங்கு கணக்கிட வேண்டியது, 3.7×3.7 அல்லவா.

இதைப்போன்ற பெருக்கல்களை ஏழாம் வகுப்பில் செய்தது நினைவு உள்ளதா? (**தசம முறைகள்** என்ற பாடத்தில் **தசம பெருக்கல்** என்ற பகுதி).

$$3.7^2 = \frac{37}{10} \times \frac{37}{10} = \frac{37^2}{100}$$

இனி முன்பு செய்தது போல் 37^2 கணக்கிடலாம்:

$$37^2 = 30^2 + (30 \times 7 \times 2) + 7^2$$
$$= 900 + 420 + 49$$
$$= 1369$$

அப்போது

$$3.7^2 = \frac{37^2}{100} = \frac{1369}{100} = 13.69$$

சதுரத்தின் பரப்பளவு, 13.69 சதுரமீட்டர்.

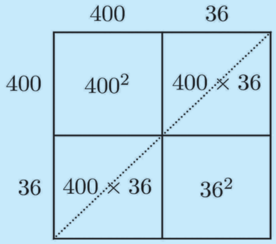
மூன்றிலக்க எண்கள்

436^2 கணக்கிடுவது எவ்வாறு?

முதலில் 36^2 கணக்கிடவும்:

$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

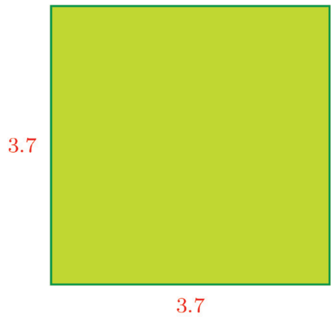
மேலும் 436^2 ஐக் கட்டம் வரைந்து கணக்கிடலாம் அல்லவா?



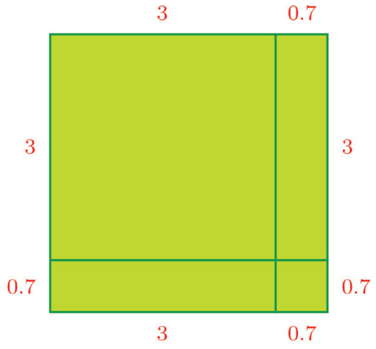
அப்போது

$$436^2 = 400^2 + (400 \times 36 \times 2) + 36^2$$
$$= 160000 + 28800 + 1296$$
$$= 190096$$

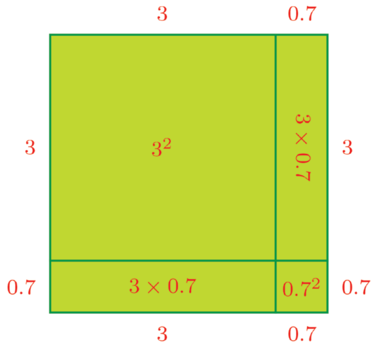
பின்ன வடிவத்திற்கு மாற்றாமல் இதைச் செய்யலாம். அதற்கு முதலில் ஒரு படம் வரையலாம்:



பக்கங்களை எல்லாம் 3 மீட்டரும், 0.7 மீட்டருமாக வெட்டினால்?



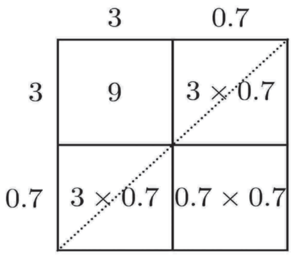
சதுரத்தின் நான்கு பகுதிகளின் பரப்பளவைத் தனித்தனியாகக் கணக்கிடலாம்;



இவற்றையெல்லாம் கூட்டினால் மொத்த பரப்பளவு கிடைக்கும் அல்லவா:

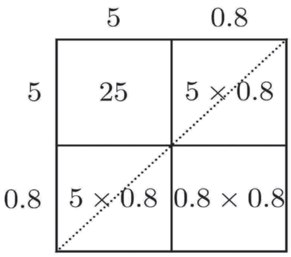
$$\begin{aligned} 3.7^2 &= 9 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7 \times 0.7) \\ &= 9 + 4.2 + 0.49 \\ &= 13.69 \end{aligned}$$

அப்போது எண்ணல் எண்களின் வர்க்கம், கட்டம் வரைந்து கணக்கிட்டதைப் போல் இந்த வர்க்கத்தையும் கணக்கிடலாம்:



$$3.7^2 = 3^2 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7)^2$$
$$= 9 + 4.2 + 0.49$$
$$= 13.69$$

படம் வரையாமல் கட்டங்கள் மட்டும் வரைந்து 5.8^2 கணக்கிடலாம் அல்லவா:



$$5.8^2 = 5^2 + (5 \times 0.8 \times 2) + (0.8)^2$$
$$= 25 + 8 + 0.64$$
$$= 33.64$$

இனி கட்டங்கள் வரையாமல் இதைப்போன்று வர்க்கங்கள் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 13.9^2 கணக்கிடலாம்.

முன்பு செய்ததைப் போல் 13^2 இவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்:

$$13^3 = 10^2 + (10 \times 3 \times 2) + 3^2$$
$$= 100 + 60 + 9$$
$$= 169$$

இனி இப்போது செய்ததைப் போல் 13.9^2 கண்டுபிடிக்கலாம்:

$$13.9^2 = 13^2 + (13 \times 0.9 \times 2) + (0.9)^2$$
$$= 169 + 23.4 + 0.81$$
$$= 193.21$$

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கணக்கிடவும்.

(i) 2.3 (ii) 8.7 (iii) 10.1 (iv) 12.5 (v) 15.7

(1) இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

1.5^2	2.5^2	3.5^2
$= 1^2 + (1 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$	$= 2^2 + (2 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$	$= 3^2 + (3 \times 0.5 \times 2) + (0.5)^2$
$= 1 + 1 + 0.25$	$= 4 + 2 + 0.25$	$= 9 + 3 + 0.25$
$= 2.25$	$= 6.25$	$= 12.25$

4.5^2 கணக்கிடலாமா?

தசம பகுதி 0.5 ஆன சில எண்களை எடுத்து அவற்றின் வர்க்கங்கள் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம். தசம பகுதி 0.5 ஆன எண்களின் வர்க்கம் கணக்கிடுவதற்கு ஏதாவது எளிய முறையைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

(2) இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$1.25^2 = 1^2 + (1 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 1 + 0.5 + 0.0625 = 1.5625$

$2.25^2 = 2^2 + (2 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 4 + 1 + 0.0625 = 5.0625$

$3.25^2 = 3^2 + (3 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 9 + 1.5 + 0.0625 = 10.5625$

$4.25^2 = 4^2 + (4 \times 0.25 \times 2) + (0.25)^2 = 16 + 2 + 0.0625 = 18.0625$

இதைப் போன்று தசம பகுதி 0.25 ஆன வேறு சில எண்களின் வர்க்கங்கள் கணக்கிடுக. இத்தகைய எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிப்பதற்கு பொதுவான ஏதாவது முறை உள்ளதா?

2

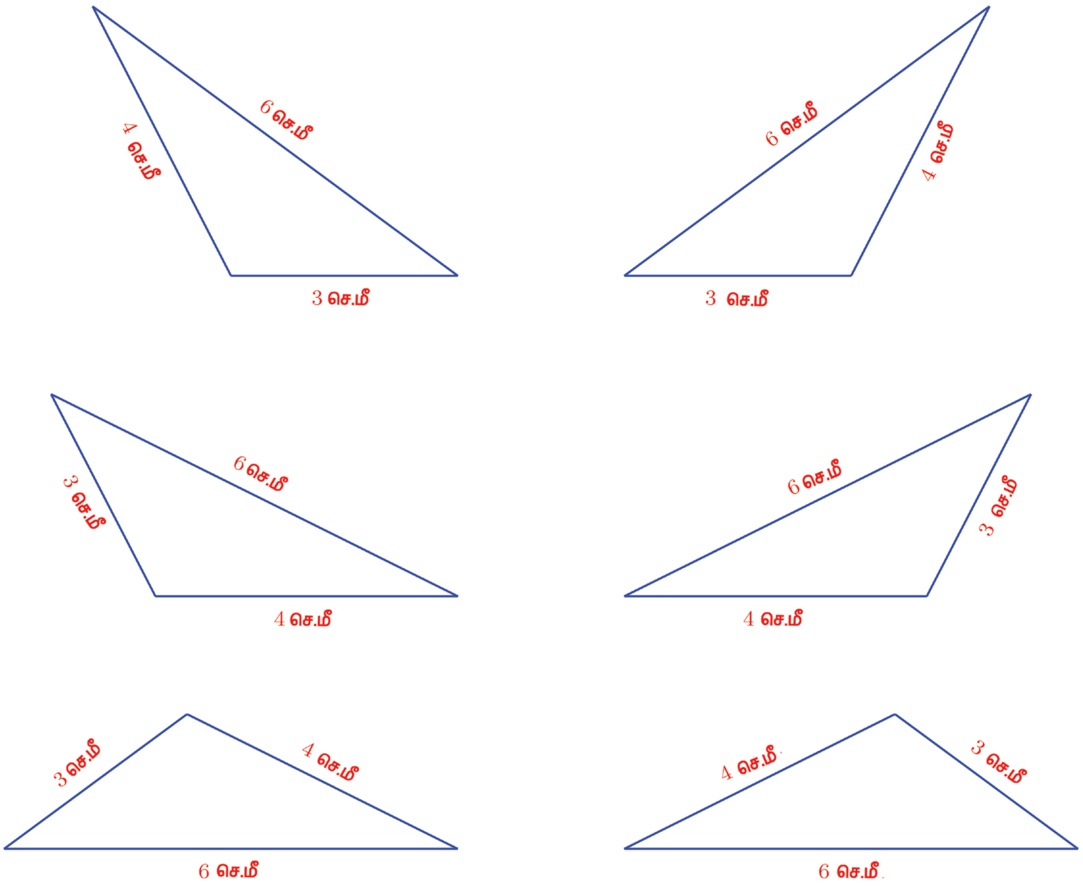
சம முக்கோணங்கள்

பக்கங்களும் கோணங்களும்

ஒரு முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கூறினால் அதை வரையத் தெரியுமல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டரும், 4 சென்டிமீட்டரும், 6 சென்டிமீட்டரும் உள்ள முக்கோணம் எவ்வாறு வரையலாம்?

இதனைப் பல முறைகளில் வரையலாமென்று ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம். (**முக்கோணம்** என்ற பாடத்தில் **கோடும் கணக்கும்** என்ற பகுதி).



திருப்பியும் சுழற்றியும் வைக்கப்பட்டுள்ளது என்றல்லாமல் இந்த ஆறு படங்களிலும் முக்கோணங்களுக்கு இடையே வித்தியாசமொன்றும் இல்லையெனப் பார்த்தோம்.

இதை உறுதி செய்ய இதிலுள்ள ஒரு முக்கோணத்தை கட்டியான காகிதத்தில் வெட்டியெடுத்து ஒவ்வொன்றினுடையவும் மேல் பல விதங்களில் சேர்த்து வைத்துப் பார்க்கவும்.

அவ்வாறு சேர்த்து வைக்கும் போது, ஒரே நீளமுள்ள பக்கங்கள் மட்டுமல்ல அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணங்களும் சேர்ந்திருக்கின்றன அல்லவா?

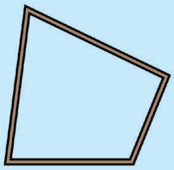
இது போல வேறு மூன்று நீளங்கள் எடுத்து பல விதங்களில் முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும். அவற்றிலும் கோணங்கள் ஒரே அளவு அல்லவா?

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

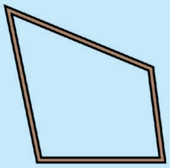
ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமம் எனில் அவற்றின் கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

மாறுகின்ற நாற்கரங்கள்

நான்கு ஈர்க்கில் துண்டுகள் சேர்த்து வைத்து ஒரு நாற்கரம் உருவாக்கவும்:

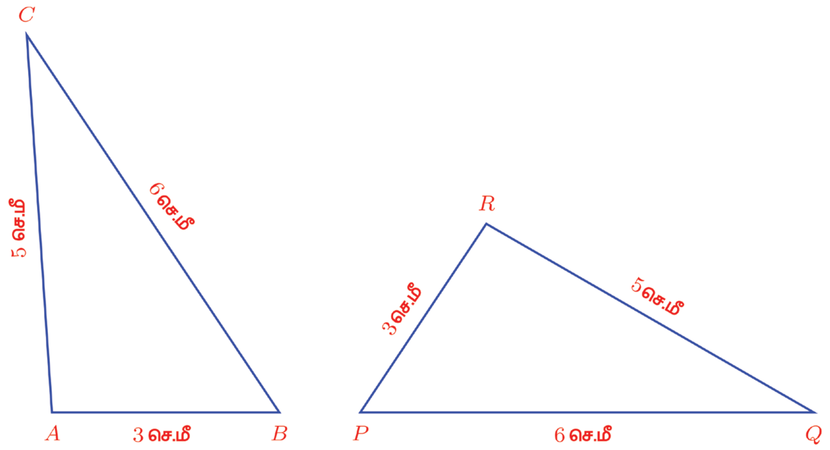


இனி மேல்பக்க உச்சியிலுள்ள பக்கங்களை சற்று அழுத்தி இந்த நாற்கரைத்தை பின்வருமாறு மாற்றலாமல்லவா:



இந்த இரண்டு நாற்கரங்களிலும் பக்கங்களின் நீளங்கள் ஒரே அளவு ஆகும்; ஆனால் கோணங்கள் வேறுபட்டவை அல்லவா?

முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்:



முக்கோணம் ABC வரைந்து அதற்கு வெளியே D என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Move around Point tool பயன்படுத்தி D யிலும், முக்கோணத்திலும் கிளிக் செய்து முக்கோணத்தை D ஐச் சுற்றிலும் நகர்த்திப் பார்க்கவும். முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்கும் ஏதாவது மாற்றம் நிகழ்கிறதா?

முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் சமம் ஆனதால் கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

அதாவது, ABC என்ற முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் PQR என்ற முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு கோணத்திற்கு சமமாகும்.

எந்தெந்த கோணங்கள் சமம் என்று எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

முக்கோணங்களில் மிகப்பெரிய கோணங்கள், மிகச் சிறிய கோணங்கள், நடுத்தரக் கோணங்கள் என்றிவ்வாறு உள்ள ஜோடிகளல்லவா சமம் ஆகின்றது.

ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் கோணங்களின் அளவு வரிசையை எவ்வாறு தெரிந்து கொள்ளலாம்?

கோணங்களின் அளவு வரிசை அவற்றின் எதிர்பக்கங்களின் அளவு வரிசைக்கு ஏற்ப அமையும் என்று ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. (**முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **கோடும் கணக்கும்** என்ற பகுதி)

இரண்டு முக்கோணங்களிலும்

- 6 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள பக்கம் மிகப் பெரியது
- 5 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள பக்கம் நடுத்தரம்
- 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள பக்கம் மிகச்சிறியது

அப்போது இரண்டு முக்கோணங்களிலும்

- மிகப்பெரிய கோணம் 6 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ளது.
- நடுத்தரம் கோணம் 5 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ளது.
- மிகச்சிறிய கோணம் 3 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ளது.

இனி முக்கோணம் ABC இல் எந்தெந்த கோணங்கள் முக்கோணம் PQR இல் எந்தெந்த கோணங்களுடன் சமம் ஆகும் என்று கூறலாமல்லவா:

6 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கெதிரேயுள்ள கோணங்கள்
$\angle A = \angle R$ (மிகப்பெரிய கோணங்கள்).

5 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கெதிரேயுள்ள கோணங்கள்
$\angle B = \angle P$ (இடைத்தரம் கோணங்கள்).

3 சென்டிமீட்டர் பக்கத்திற்கெதிரேயுள்ள கோணங்கள்
$\angle C = \angle Q$ (மிகச்சிறிய கோணங்கள்).

முக்கோண நிலைத்தன்மை

ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் மாற்றாமல் கோணங்களை மாற்றலாம்; எனவே தான் நாற்கர வடிவத்திலுள்ள ஒரு சட்டகம் பலம் செலுத்தினால் அது சரிந்து போக வாய்ப்புண்டு. ஆனால் முக்கோண வடிவத்திலுள்ள ஒரே சட்டகத்தில் இது ஏற்படாது; காரணம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் மாற்றாமல் கோணங்களை மாற்ற இயலாது.

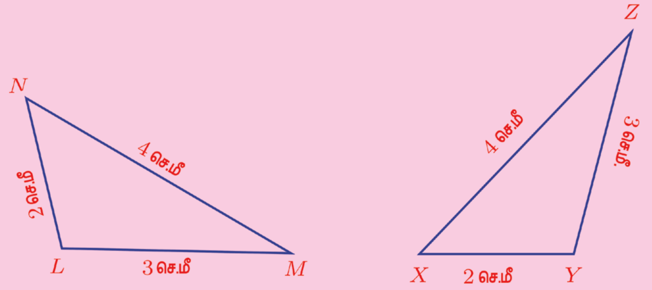
எனவேதான் முக்கோண வடிவத்தில் கம்பிகள் சேர்த்து வைத்து பாலங்களும் கோபுரங்களும் உருவாக்கப்படுகின்றன.

அப்போது முன்பு கூறிய கருத்தை மேலும் விளக்கமாக இவ்வாறு கூறலாம்.

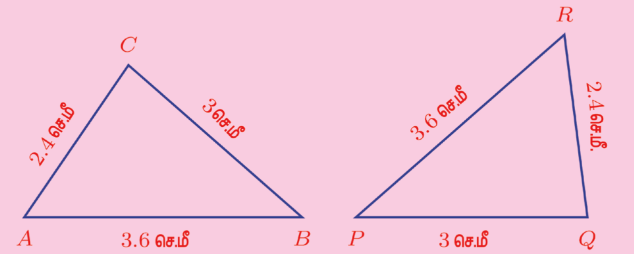
ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமம் எனில், இந்த முக்கோணங்களில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமமாகும்.

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி படங்களிலும், முதல் முக்கோணத்திலுள்ள கோணங்களுக்கு சமமான கோணங்களை இரண்டாம் முக்கோணத்திலிருந்து கண்டுபிடித்து எழுதவும்.

(i)



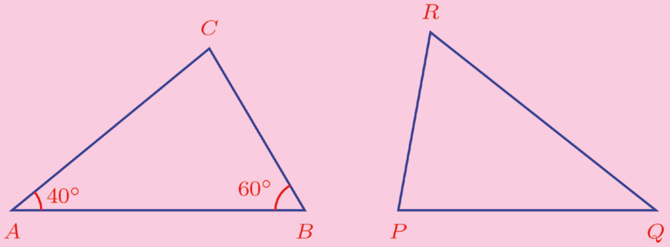
(ii)



(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களில்

$AB = QR \qquad BC = RP \qquad CA = PQ$

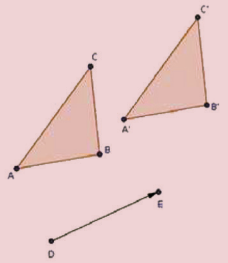
என்றிவ்வாறாகும்.



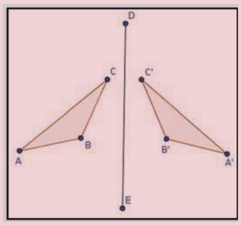
ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle C$ யும் PQR என்ற முக்கோணத்தில் எல்லா கோணங்களும் கணக்கிடவும்.

முக்கோணம்

ABC வரையவும். D, E என்னும் இரண்டு புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தவும் Translate by Vector எடுத்துΔABC, D, E ஆகியவற்றில் வரிசையாக கிளிக் செய்யவும். புதியதொரு $\Delta A'B'C'$ கிடைக்கிறதல்லவா? இந்த இரண்டு முக்கோணங் களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன? ΔABC யின் பக்கங்களையும் கோணங்களையும் மாற்றி பார்க்கவும்.. $\Delta A'B'C'$ மாறுகின்றதா? E இன் இடத்தைப் மாற்றிப் பார்க்கவும் E என்ற புள்ளி D ஐ அடையும் போது என்ன நிகழ்கிறது?



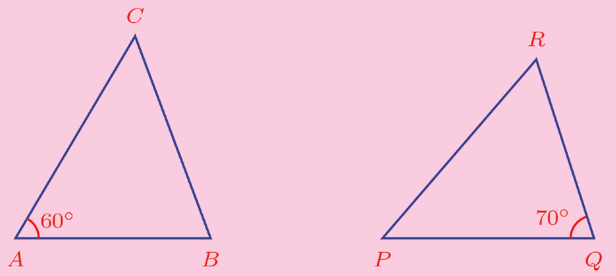
ABC என்ற முக்கோணமும் DE என்ற கோடும் வரையவும். Reflect about Line எடுத்து முக்கோணத்திலும் கோட்டிலும் கிளிக் செய்யவும்.. $\Delta A'B'C'$ கிடைக்கும். இரண்டு முக்கோணங்களும் உள்ள தொடர்பு என்ன? ΔABC யின் பக்கங்களின் நீளம், DE என்ற கோட்டின் இடம், சாய்வு போன்றவற்றை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களில்

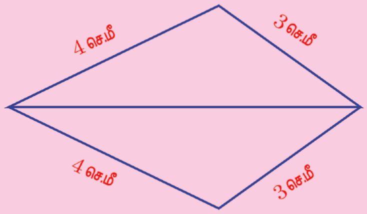
$AB = QR \qquad BC = PQ \qquad CA = RP$

என்பதாகும்.



இரண்டு முக்கோணங்களிலும் பிற இரண்டு கோணங்கள் கண்டுபிடித்து எழுதவும்.

(4) படத்தில் ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டம் அதை இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

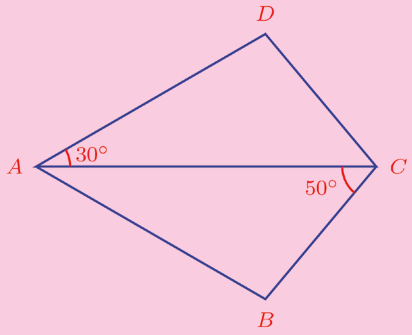


இந்த இரண்டு முக்கோணங்களிலும் கோணங்கள் சமமா? ஏன்?

(5) படத்தில் $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில்;

$$AB = AD, \qquad CB = CD$$

என்பதாகும்.



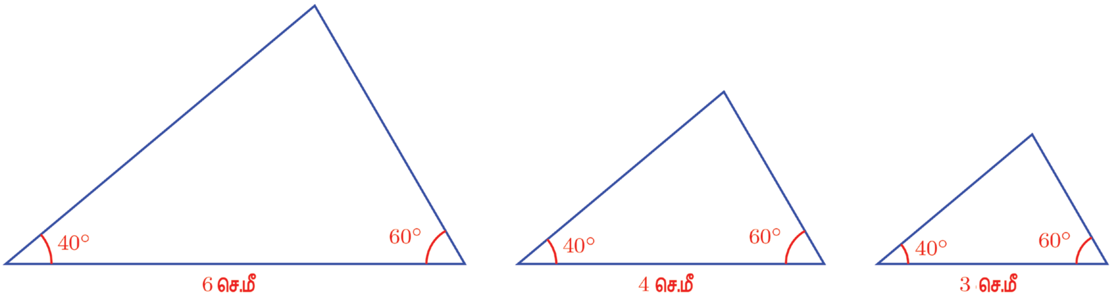
நாற்கரத்தின் கோணங்களையெல்லாம் கண்டுபிடிக்கவும்.

இரண்டு கோணங்கள்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமமெனில், கோணங்களும் சமம் என பார்த்தோமல்லவா.

மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கு சமமெனில் பக்கங்களும் சமம் எனக் கூறாலாமா?

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



இத்தகைய முக்கோணங்கள் ஏழாம் வகுப்பில் வரைந்திருக்கிறோமல்லவா. (**முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **கோணக்கணக்கு** என்ற பகுதி.)

எல்லா முக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது கோணம் 80° தான்.

பக்கங்கள்?

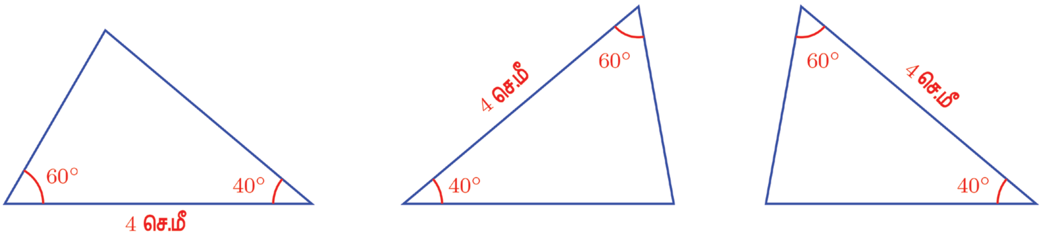
இதிலிருந்து என்ன புரிந்து கொள்ளலாம்?

> ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களெல்லாம் வேறொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கு சமமானாலும் முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் சமம் ஆக வேண்டுமென்பதில்லை.

min = 0, max = 5 ஆக சிலைடர் a உருவாக்கவும். பக்கங்களின் நீளங்கள் 4, 5, 6 உள்ள ஒரு முக்கோணம் $4a$, $5a$, $6a$ உள்ள வேறொரு முக்கோணமும் உருவாக்கவும். இரண்டு முக்கோணங்களின் கோணங்களைப் பார்க்கவும் (Angle tool எடுத்து முக்கோணத்தில் கிளிக் செய்தால் கோண அளவுகள் காணலாம்). a என்ற எண்ணை மாற்றிப் பார்க்கவும், என்ன ஆகிறது? $a = 1$ ஆகும் போது?

இப்போது பார்த்த முக்கோணங்களெல்லாம் வேறுபட்ட நீளங்கள் உள்ள கோடுகளின் முனைகளில் ஒரே கோணங்கள் வரைந்ததல்லவா.

இதில் ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தை பல முறைகளில் வரையலாம்.



இங்கு முக்கோணங்களின் ஒரு பக்கமும் அதன் இரண்டு முனைகளிலுள்ள கோணங்களும் சமம்.

கோணங்களுடையவும் பக்கங்களுடையவும் இடம் மாற்றி, இதே மூன்று அளவுகளுள்ள முக்கோணம் வேறு சில முறைகளிலும் வரையலாம்.

ஆனால் இவையெல்லாம் ஒரே முக்கோணத்தை திருப்பியும் சுழற்றியும் வைத்ததென ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம்.

அதாவது, இவற்றிலொன்றிலும் மூன்றாவது கோணமோ, மற்ற இரண்டு பக்கங்களோ மாறவில்லை.

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

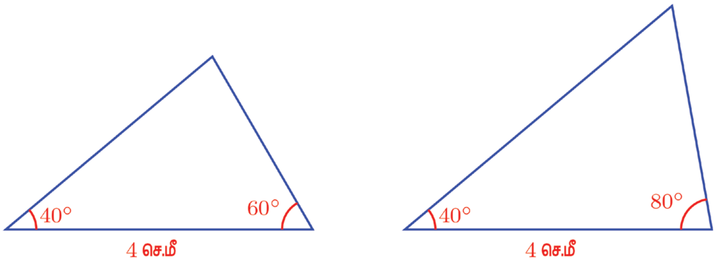
ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமும் அதன் இரண்டு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும், வேறொரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கும் அதன் இரண்டு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களுக்கும் சமமெனில், இந்த முக்கோணத்தின் மூன்றாவது கோணங்கள் சமமாகும்; சமமான கோணங்களுக்கெதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமமாகும்.

எந்த முக்கோணத்திலும் கோணங்களின் தொகை 180° ஆனதால், இரண்டு கோணங்கள் தெரியுமெனில் மூன்றாவது கோணத்தையும் கணக்கிடலாம்.

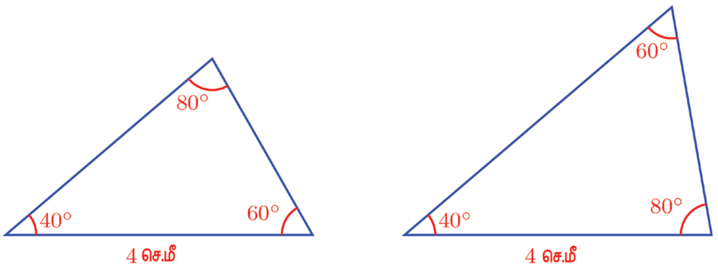
அப்போது ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் வேறொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்கு சமமெனில், மூன்றாவது கோணங்களும் சமமாகும்.

இரண்டு கோணங்களும் ஏதேனும் ஒரு பக்கமும் சமமானால், முக்கோணத்தின் பிற இரண்டு பக்கங்களும் சமம் எனக் கூறலாமா?

இது போன்று இரண்டு முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.



மூன்றாவது கோணங்கள் எவை?

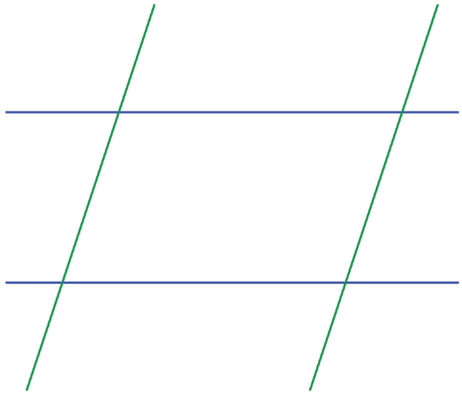


இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்களாகும்; அடிப்பக்கமும் சமமாகும். ஆனால் பிற இரண்டு பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமல்ல என்று பார்த்தாலே தெரியுமல்லவா.

> ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் ஏதேனும் ஒரு பக்கமும், வேறொரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுக்கும் ஒரு பக்கத்திற்கும் சமமானாலும், மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் சமம் ஆக வேண்டுமென்பதில்லை.

மேற்கூறிய கருத்தின் ஒரு பயன்பாட்டைப் பார்ப்போம்:

இரண்டு ஜோடி இணைகோடுகள் வெட்டிச் செல்லும் போது உருவாகும் வடிவமல்லவா இணைகரம்.



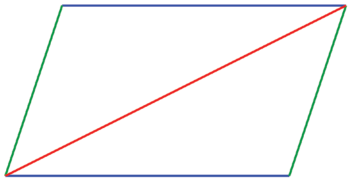
வேறொரு முறையில் கூறினால், ஒவ்வொரு ஜோடி எதிர் பக்கங்களும் இணையான நாற்கரமே இணைகரம்.

மேலே வரைந்த இணைகரத்தின் எதிர்பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளம் என்று தெரிகிறதல்லவா? எவ்வாறு உறுதிப்படுத்தலாம்?

இரண்டு கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமென்று காண்பதற்கான ஒரு வழி, அவை பக்கங்களாக உள்ள முக்கோணங்களின் பிற அளவு சமமாகுமா என்று பார்ப்பதே ஆகும்.

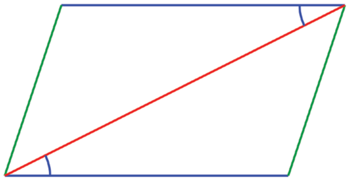
இந்தப் படத்தில் முக்கோணங்கள் இல்லை அல்லவா.

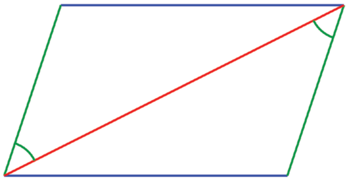
நாற்கரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்தால் இரண்டு முக்கோணங்களாகுமல்லவா?



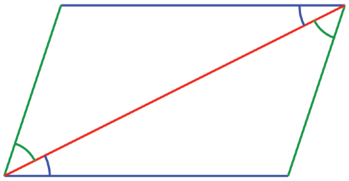
இந்த இரண்டு முக்கோணங்களிலும் உள்ள கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

படத்திலுள்ள நீலக் கோடுகள் இணையானாதால், சிவப்புக்கோடு இவற்றுடன் சந்திக்கும் போது உருவாகும் கோணங்கள் சமம் ஆகும். பச்சைக் கோடுகள் இணையானதால், அவை சிவப்பு கோட்டுடன் உருவாக்கும் கோணங்களும் சமம் ஆகும்.





அதாவது, கீழேயுள்ள முக்கோணத்தின் சிவப்பு பக்கமும் அதிலுள்ள இரண்டு கோணங்களும், மேலேயுள்ள முக்கோணத்தின் சிவப்பு பக்கத்திற்கும் அதிலுள்ள இரண்டு கோணங்களுக்கும் சமமாகும்.



அப்போது முக்கோணத்திலுள்ள சமமான கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் நீளமும் சமமாக வேண்டுமல்லவா.

அதாவது, நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்கள் சமம்.

இதை ஒரு பொதுக் கருத்தாகக் கூறலாம்:

எந்த இணைகரத்தினுடையுவும் எதிர் பக்கங்கள் சமம் ஆகும்.

மேலே கூறிய கருத்தின்படி, இணைகரத்தின் எதிர் கோணங்களும் சமம் என புரிந்து கொள்ள முடியுமா?

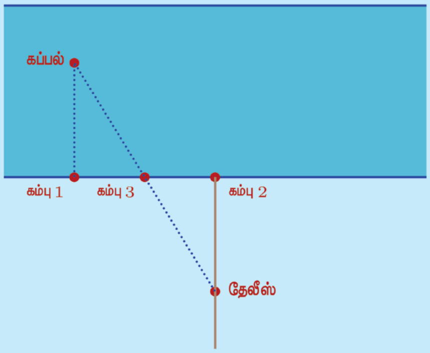
எந்த இணைகரத்தினுடையும் எதிர் கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

முக்கோண தந்திரம்

B.C.E ஆறாம் நூற்றாண்டில் கிரீசில் வாழ்ந்த தத்துவ சிந்தனையாளரும் கணித அறிஞருமான தேலீஸ்; கடலில் வெகு தொலைவில் நங்கூரம் போட்டு நிற்கின்ற ஒரு கப்பல், கரையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் நிற்கிறது என கணக்கீடு செய்யப் பயன்படுத்தியதாக கூறப்படுகின்ற ஒரு சூத்திரத்தைப் பார்க்கவும்:

முதலில் கடற்கரையில் கப்பலுக்கு நேராக கரையோரமாக ஒரு கம்பை நாட்டினார். சற்று தூரத்தில் கரையோரமாகவே வேறொரு கம்பும், தொடர்ந்து இந்த இரண்டு கம்புகளின் மையப்பகுதியில் மூன்றாவதொரு கம்பும் ஊன்றினார்.

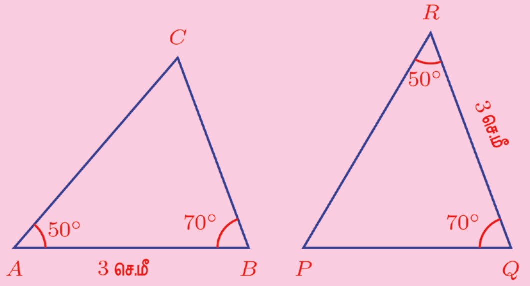
பின்பு, இரண்டாவது கம்பிலிருந்து கரைக்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்தார்; கப்பலைப் பார்த்துக் கொண்டு இந்தக் கோட்டின் வழியாக பின்னாக நடந்தார், நடுவிலுள்ள கம்பு கப்பலுக்கு நேராகக் கண்டபோது நடப்பதை நிறுத்தினார். அப்போது நின்ற இடத்தைக் கோட்டில் அடையாளப்படுத்தினார்.



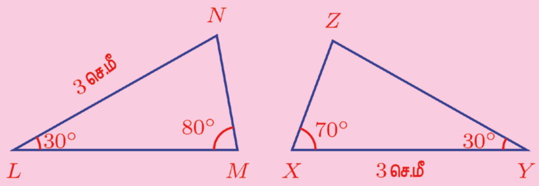
இப்போது கடலிலுள்ள முக்கோணத்தினுடையவும் கரையிலிருந்துள்ள முக்கோணத்தினுடையவும் கரையுடன் சேர்ந்த பக்கங்களும் அவற்றின் முனைகளிலுள்ள கோணங்களும் சமம் (ஏன்?) அப்போது கரையிலிருந்து கப்பலுக்குள்ள தூரம், தேலீஸ் கடைசியில் நின்ற இடத்திற்கும் கரைக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் அல்லவா.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி படத்திலும், இடது பக்கத்திலுள்ள முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமமான பக்கங்களை வலது பக்கத்திலுள்ள முக்கோணத்திலிருந்து கண்டுபிடித்து எழுதவும்.

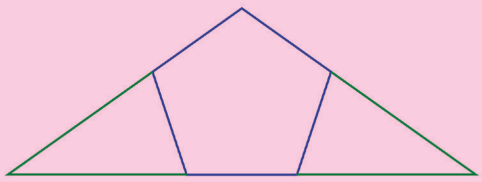
(i)



(ii)



(2) படத்தில், பக்கங்களும் கோணங்களும் எல்லாம் சமமான ஒரு ஐங்கோணத்தின் மேலேயுள்ள இரண்டு பக்கங்களும் கீழேயுள்ள பக்கமும் நீட்டி ஒரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது:



(i) படத்தில் இடது பக்கத்திலுள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் வலது பக்கத்திலுள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமா? ஏன்?

(ii) படத்தில் பெரிய முக்கோணத்தின் இடது வலது பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமா? ஏன்?

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களெல்லாம் வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு சமமாகும்.

(i) ஒரு முக்கோணத்தில் ஏதேனும் பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு உள்ள உயரம் மற்ற முக்கோணத்தின் சமமான பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு உள்ள உயரத்திற்கு சமமா? ஏன்?

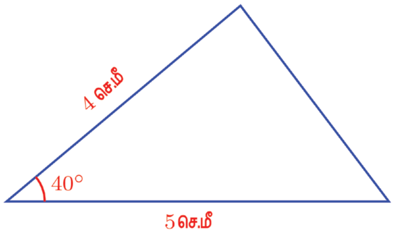
(ii) முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாகுமா? ஏன்?

இரண்டு பக்கங்கள்

ஒரு முக்கோணம் வரைய மூன்று பக்கங்களுடையும் நீளம் கூறினால் போதும்: அல்லது ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் அதன் இரண்டு முனைகளிலுமுள்ள கோணங்களின் அளவுகளும் கூறினாலும் போதும்.

வேறு ஏதேனும் மூன்று அளவுகளைக் கூறினால் முக்கோணம் வரைய இயலுமா?

இரண்டு பக்கங்களும் அவை இணைகின்ற கோணமும் ஆனால்?



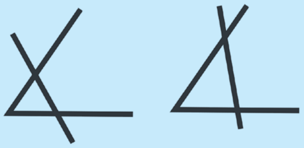
இத்தகைய முக்கோணங்கள் ஏழாம் வகுப்பில் வரைந்திருக்கிறோமல்லவா? (**முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **பக்கங்களும் கோணங்களும்** என்ற பகுதி).

முன்பு வரைந்த முக்கோணங்களைப் போல் உச்சிகளுடையவும் பக்கங்களுடையவும் இடத்தை மாற்றி இந்த முக்கோணத்தையும் திருப்பியும் சுழற்றியும் பலவிதங்களில் வரையலாம்.

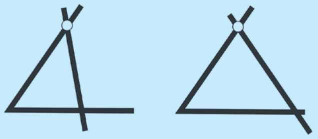
முக்கோண உறுதி

நீளமான ஒரு ஈர்க்கிலை மடக்கி ஒரு கோணம் உருவாக்கவும்.

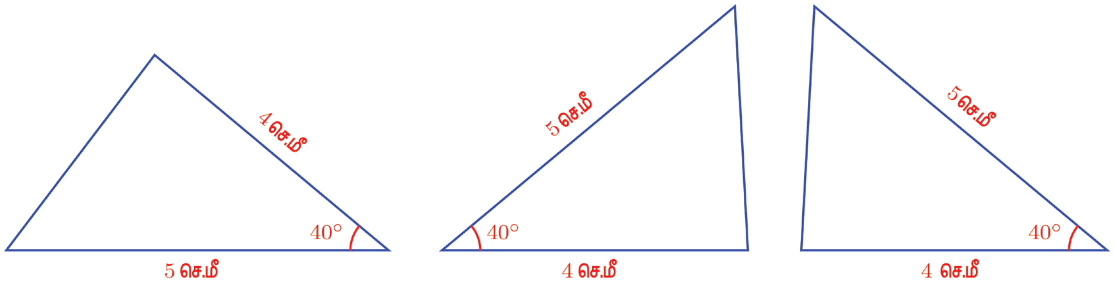
இந்தக் கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் மேல் வேறொரு ஈர்க்கில் வைத்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கவும், பல முறைகளில் வைக்கலாமல்லவா.



மேல் பக்கத்தில் ஒரு அடையாளம் வைத்து இரண்டாவது ஈர்க்கில் அதன் வழியாக கடந்து செல்ல வேண்டுமென்று கூறினால்?



மேல் பக்கத்திலும் கீழ் பக்கத்திலும் அடையாளம் வைத்து, இந்த இரண்டு அடையாளங்கள் வழி கடந்து செல்லும் விதம் ஈர்க்கில் வைக்க வேண்டுமென்று கூறினால்? எத்தனை முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம்? ஒரு கோணமும் அதன் இரண்டு பக்கங்களின் நீளமும் கூறுவதோடு முக்கோணத்தை உறுதி செய்யலாமல்லவா.



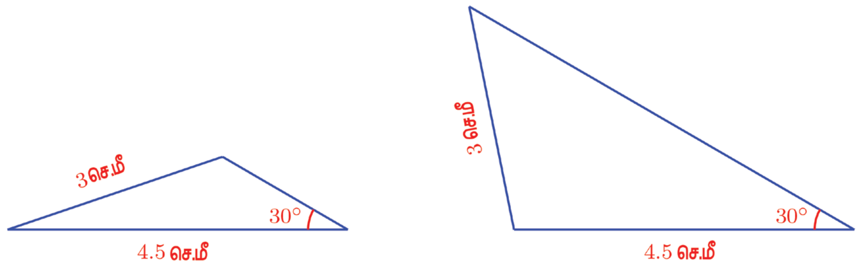
ஆனால் இவற்றிலெல்லாம் மூன்றாவது பக்கமோ மற்ற இரண்டு கோணங்களோ மாறவில்லை அல்லவா.

இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் பார்த்தவற்றை ஒரு பொதுக் கருத்தாக எழுதலாம்:

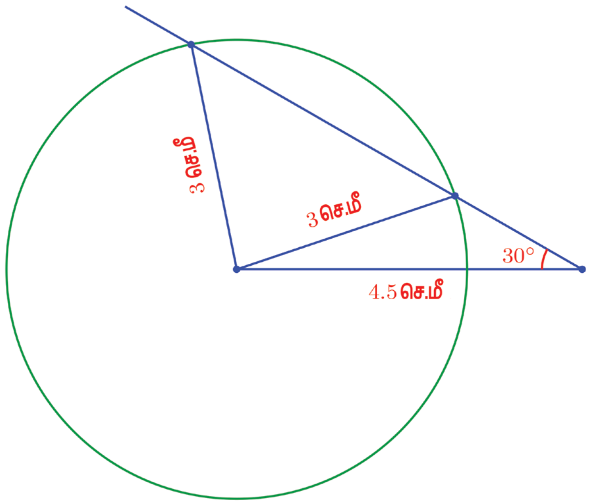
ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அவை இணையும் கோணமும், வேறொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் அவை இணையும் கோணத்திற்கும் சமமெனில், இந்த முக்கோணங்களின் மூன்றாவது பக்கங்களும் சமமாகும்; மற்ற இரண்டு கோணங்களும் சமமாகும்.

பக்கங்கள் இணைகின்ற கோணத்திற்குப் பதில் வேறு ஏதேனும் கோணங்கள் சமமானால் இது சரியாகுமா?

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



இத்தகைய முக்கோணங்கள் ஏழாம் வகுப்பில் வரைந்திருக்கிறோமல்லவா:

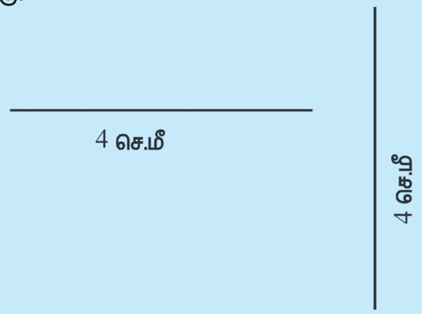


இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில், ஒன்றின் இரண்டு பக்கங்களும் ஒரு கோணமும் மற்றதன் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் ஒரு கோணத்திற்கும் சமம்; ஆனால் மூன்றாவது பக்கங்களோ, மற்ற இரண்டு கோணங்களோ, சமமல்ல அல்லவா?

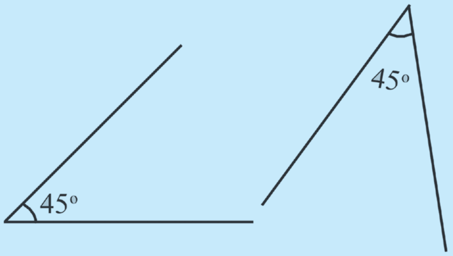
ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் ஏதேனும் ஒரு கோணமும் வேறொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களுக்கும் ஒரு கோணத்திற்கும் சமமானாலும், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமும் பிற இரண்டு கோணங்களும் சமம் ஆக வேண்டுமென்றில்லை.

சமநிலை

கோடுகள், கோணங்கள், செவ்வகங்கள், முக்கோணங்கள் என பலவகை வடிவியல் வடிவங்கள் உண்டு.

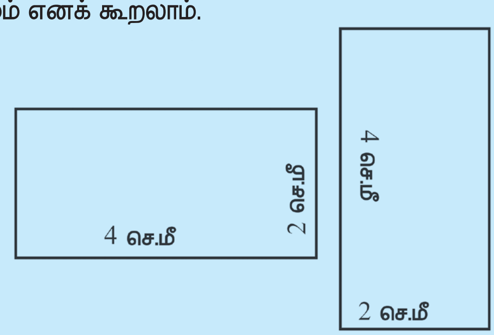


ஒரே நீளமுள்ள கோடுகள் எவ்வாறு வரைந்தாலும் சமம் என்று கூறுவதுண்டல்லவா.

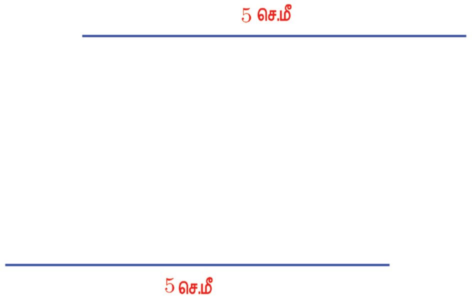


இதுபோல ஒரே அளவுள்ள கோணங்களும்,

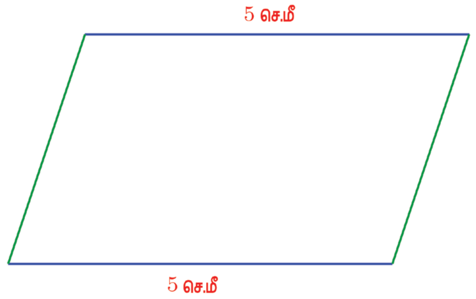
ஒரே நீளமும் அகலமும் உள்ள செவ்வகங்களும் சமம் எனக் கூறலாம்.



இனி ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம். இணையான இரண்டு கோடுகள் ஒரே நீளத்தில் வரையவும்.

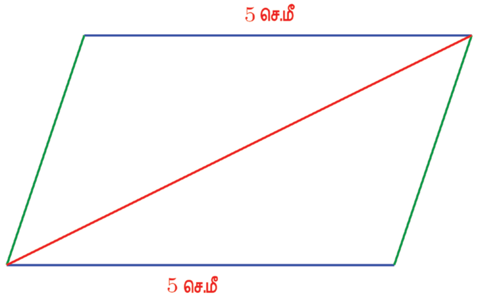


கோடுகளின் முனைகளை கீழே காண்பது போல் இணைக்கவும்.



படத்திலுள்ள இடது, வலது (பச்சை) கோடுகளைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

இந்த கோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் என்று தோன்றுகிறதல்லவா? எவ்வாறு உறுதி செய்யலாம்?

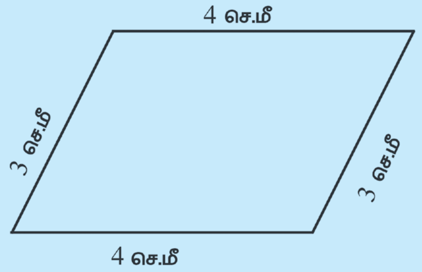


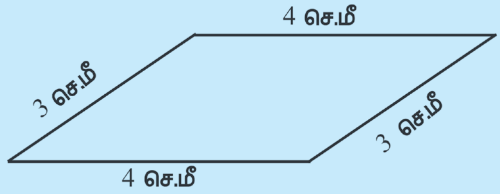
இரண்டு முக்கோணங்களிலும் நீல பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும்.

சிவப்புக் கோடு இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் பக்கமாகும்.

வடிவியல் சமநிலை

படத்திலுள்ள இணைகரங்களைப் பார்க்கவும்.



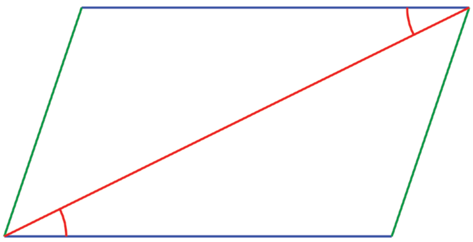


இரண்டு இணைகரங்களிலும் பக்கங்கள் 4 செமீ, 3 செமீ ஆகும். ஆனால் இந்த இணைகரங்கள் சமம் என்று கூறுவது சரியல்ல அல்லவா. வடிவியல் வடிவங்களின் சமநிலையைக் யூக்லிட் கூறுவது குறித்து பின்வருமாறு.

ஒன்றோடொன்று பொருந்துபவை சமம் ஆகும்.

பக்கம் 26 இல் கோடுகளும் கோணங்களும் செவ்வகங்கள் எல்லாம் திருப்பி வைத்தால் சரியாக பொருந்துமல்லவா.

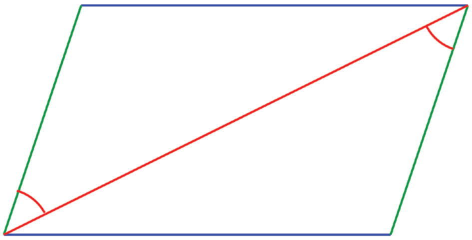
இவை இணைகின்ற கோணங்கள்?



இவை இணையான நீலக் கோடுகளை சிவப்பு கோடு சந்திக்கும் போது உருவாகும் இரண்டு சிறிய கோணங்களல்லவா. எனவே அவை சமம் ஆகும்.

அதாவது மேலேயும் கீழேயுமுள்ள முக்கோணங்களில் இரண்டு பக்கங்களும் அவை இணைகின்ற கோணமும் சமம்.

அப்போது இந்த முக்கோணங்களின் மூன்றாவது பக்கங்களான பச்சைக் கோடுகளுக்கும் ஒரே நீளமல்லவா. மட்டுமல்ல கீழே காணப்படும் படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்களும் சமம்.



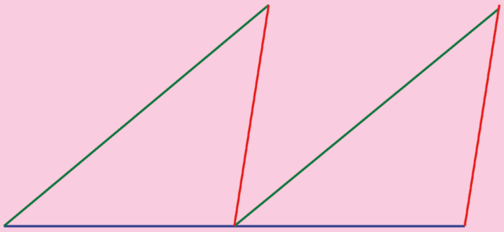
அதாவது, சிவப்பு கோடு பச்சைக் கோடுகளை சந்திக்கும் இரண்டு சிறிய கோணங்கள் சமமாகும்.

அப்போது பச்சைக் கோடுகள் இணையாகும். அதாவது, இந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

இந்தக் கணக்கில் பார்த்தவற்றை ஒரு பொதுக்கருத்தாக கூறலாமல்லவா:

ஒரு நாற்கரத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் இணையானதும் அவற்றிற்கு ஒரே நீளமும் எனில், அந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரமாகும்.

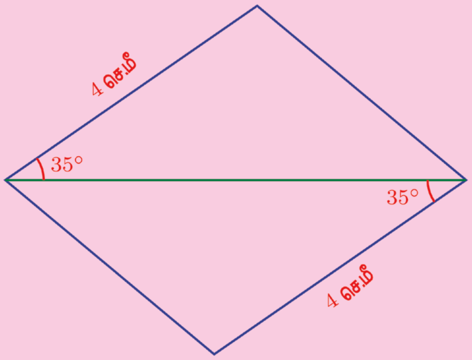
(1) படத்தில் பச்சைக் கோடுகள் ஒரே நீளமுள்ள இணைகோடுகளாகும். ஒன்று கிடைமட்டமாக உள்ள நீலக் கோட்டின் இடது முனையிலும் மற்றொன்று நீலக்கோட்டின் மையப் புள்ளியிலிருந்தும் வரையப்பட்டுள்ளது.



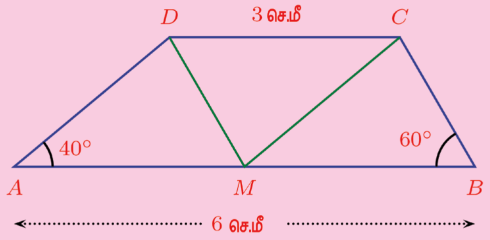
(i) படத்திலுள்ள சிவப்புக் கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமா? ஏன்?

(ii) சிவப்பு கோடுகள் இணையாகுமா?

(2) படத்திலுள்ள நாற்கரம் இணைகரமா? ஏன்?



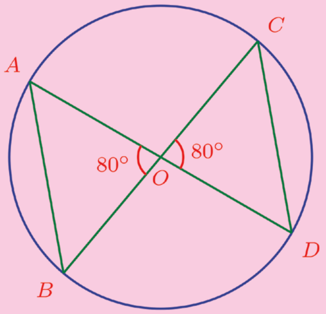
(3) படத்திலுள்ள நாற்கரத்தில் *AB, CD* என்னும் கோடுகள் இணையாகும். *AB* இன் மையப்புள்ளி *M*.



(i) *AMCD, MBCD* ஆகிய நாற்கரங்கள் இணைகரங்களா?ஏன்?

(ii) *AMD, MBC, DCM* ஆகிய முக்கோணங்களின் கோணங்களையெல்லாம் கணக்கிடவும்.

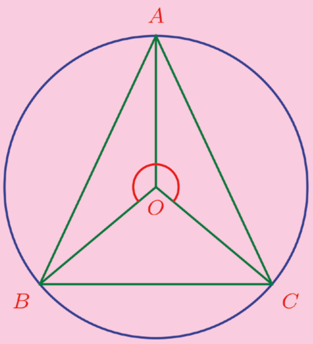
(4) படத்தில் *O* வட்டத்தின் மையமும் *A, B, C, D* வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளுமாகும்



AB, CD ஆகிய கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமா? ஏன்?

(5) படத்தில் *O* வட்டத்தின் மையமும் *A, B, C* வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளுமாகும். $\angle AOB$, $\angle AOC$ ஆகிய கோணங்கள் சமமாகும்.

AB, AC ஆகிய கோடுகளுக்கு ஒரே நீளமா? ஏன்?



இது வரை பார்த்தவற்றை சுருக்கமாகக் கூறலாம்.

ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் சேர்ந்து ஆறு அளவுகள் உள்ளனவல்லவா. இரண்டு முக்கோணங்களின் இந்த ஆறு அளவுகளும் சமமானால், அவை சரியாக சேர்ந்திருக்கும் படி ஒன்றன் மீது ஒன்றாக சேர்த்து வைக்கலாம்;

அதாவது, அவை சம முக்கோணங்களாகும். **(Equal Triangles)**.

இரண்டு முக்கோணங்கள் சமமா என்று பரிசோதனை செய்ய, இந்த ஆறு அளவுகளையும் ஒப்பிட்டு பார்க்க வேண்டியுள்ளதா? குறிப்பிட்ட முறையிலுள்ள மூன்றளவுகளை பரிசோதனை செய்தால் போதும் என்றல்லவா இங்கு பார்த்தோம்:

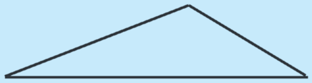
ஒரு முக்கோணத்தில் கீழே கூறப்பட்டுள்ள முறையிலும் ஏதேனும் மூன்றளவுகள், வேறொரு முக்கோணத்தில் அதே முறையிலுள்ள மூன்று அளவுகளுக்கு சமம் எனில், முக்கோணத்தின் மற்ற மூன்று அளவுகளும் சமமாகும்; அதாவது அவை சம முக்கோணங்களாகும்.

- **மூன்று பக்கங்கள்**
- **இரண்டு பக்கங்களும் அவை இணையும் கோணமும்**
- **ஒரு பக்கமும் அதன் முனைகளிலுள்ள கோணங்களும்**

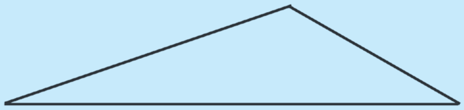
சரியல்லாத பொருத்தம்

ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்கள் மூன்று கோணங்கள் என மொத்தம் ஆறு அளவுகளல்லவா உள்ளது. இரண்டு முக்கோணங்களில் இந்த அளவு குறிப்பிட்ட மூன்று பக்கங்கள், இரண்டு பக்கங்களும் அவை இணையும் கோணமும் ஒரு பக்கமும் அதன் இரண்டு அற்றங்களிலும் உள்ள கோணங்களும் சமமானால் இந்த முக்கோணங்கள் சமம் ஆகுமென்று அதாவது மீதி மூன்று அளவுகளும் சமமாக இருக்குமென்று பார்த்தோம்.

இனி ஒரு காகித த்தில் பக்கங்கள் 4, 6, 9 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.



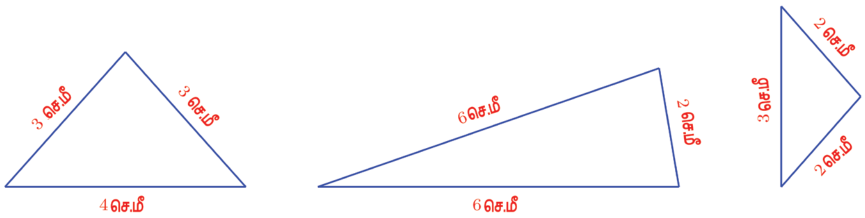
அடுத்ததாக 6, 9, 13.5 சென்டிமீட்டர் உள்ள வேறொரு முக்கோணமும்.



இவற்றின் கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும். இரண்டு முக்கோணங்களிலும் கோணங்கள் சமம் அல்லவா. வெட்டியெடுத்து கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் சேர்த்து வைத்துப் பார்த்தாலும் போதும். அதாவது இந்த முக்கோணங்களில் மூன்று கோணங்களும் இரண்டு பக்கங்களுமாக ஐந்து அளவுகள் சமம் ஆகும். ஆனால் முக்கோணங்கள் சமமல்ல அல்லவா.

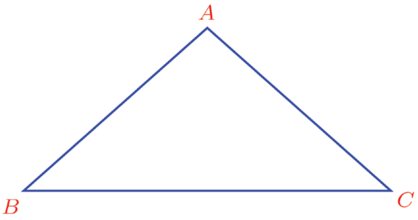
இருசமபக்க முக்கோணங்கள்

பின்வரும் முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்



எல்லா முக்கோணங்களிலும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும். இத்தகைய முக்கோணங்களை இருசமபக்க முக்கோணங்கள் **(Isosceles triangles)** என்று கூறுவர்.

பின்வரும் இருசமபக்க முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



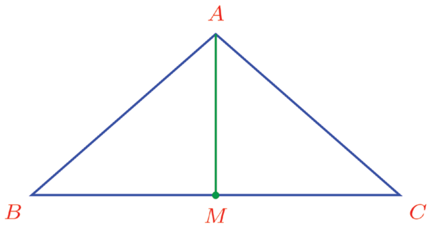
இதில் இடது வலது பக்கங்கள் ஒரே நீளமுடையவையாகும்.

இடது, வலது கோணங்களைப் பார்க்கவும். ஏதேனும் தொடர்பு தெரிகிறதா?

இத்தகைய ஒரு முக்கோணம் காகிதத்தில் வெட்டியெடுத்து, சமமான பக்கங்கள் சேர்ந்திருக்கும் படி நடுப்பகுதி வழி மடக்கிப் பார்க்கவும். இடது வலது கோணங்கள் சேர்ந்திருக்கிறதல்லவா?

கோணங்கள் சமம் ஆக காரணம் என்ன?

மடக்கிய கோட்டை படத்தில் வரைந்து பார்ப்போம்; அதாவது மேல் உச்சியையும் கீழ் கோட்டின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்து வரையலாம்.



படத்தில் இடது வலது சிறிய முக்கோணங்கள் ABM, ACM, இவற்றின் பக்கங்களைப் பார்க்கவும்.

- $AB = AC$ என்று முன்பு கூறினோம்.
- M என்ற புள்ளி BC என்ற கோட்டின் மையப்புள்ளி ஆனதால் $BM = CM$
- AM என்ற கோடு இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் பக்கமாகும்.

> min = 3, max = 15 ஆகும்படி சிலைடர் a உருவாக்கவும். நீளம் 6 ஆக AB என்ற கோடு வரையவும். A, B இவற்றை மையங்களாகவும் ஆரம் a ஆகவும் இரண்டு வட்டங்கள் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளி அடையாளப்படுத்தவும். ΔABC வரையவும். இனி வட்டங்களை மறைத்து வைக்கலாம். a இன் மதிப்பு மாறுவதைப் பொறுத்து வேறுபட்ட முக்கோணங்கள் கிடைக்கிறதல்லவா? இந்த முக்கோணங்களின் இரண்டு பக்கங்கள் சமமாகும், கோணங்கள்?
> $a = 6$ ஆகும் போது கோணங்கள் எவ்வளவு?

அதாவது, ABM, ACM என்ற இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும்.

எனவே அவற்றின் சம பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமமாக வேண்டுமல்லவா.

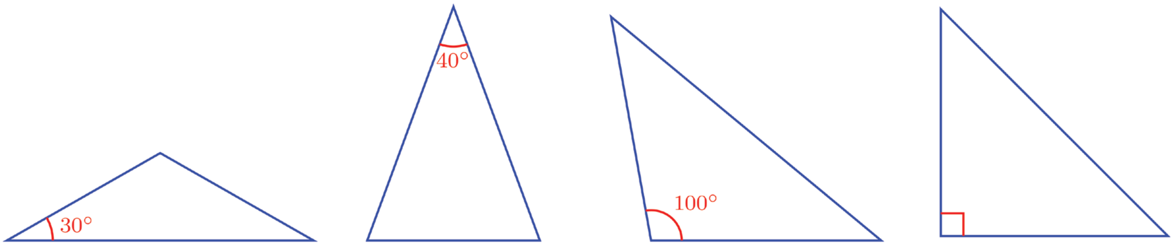
அப்போது $\angle B = \angle C$

இவை முதலில் வரைந்த ABC என்ற முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் அல்லவா?

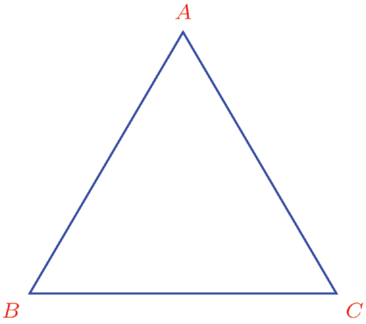
இதை ஒரு பொதுக்கருத்தாக எழுதலாம்:

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் சமம் எனில், இந்தப் பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமமாகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி கீழே வரையப்பட்டுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணங்களின் பிறக் கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.



இனி ஒரு வினா. ஒரு முக்கோணத்திலுள்ள மூன்று பக்கங்களும் சமமானால்?



ABC என்ற முக்கோணத்தில் மூன்று பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும்.

AB, AC என்ற பக்கங்கள் சமமானபடியால், மேற்கூறியபடி *B* யிலும், *C* யிலும் உள்ள கோணங்கள் சமமாகும்;

BA, BC என்ற பக்கங்கள் சமமானதால் மேற்கூறியபடி *A* யிலும் *C* யிலும் உள்ள கோணங்கள் சமமாகும்;

அப்போது எல்லா கோணங்களும் சமமானது அல்லவா.

கோணங்களின் தொகை 180° ஆனதால். ஒவ்வொரு கோணமும் $180° \div 3 = 60°$ என்றும் காணலாம்.

பக்கங்கள் எல்லாம் சமமான முக்கோணத்தை சமபக்க முக்கோணம் என்றல்லவா கூறுவோம். அப்படியானால் பொதுவாக பின்வருமாறு கூறலாம்.

எந்தவொரு சமபக்க முக்கோணத்திலும், அனைத்து கோணங்களும் 60° ஆகும்.

min = 0, max = 90° ஆகுமாறு என்ற Angle Slider 'α' உருவாக்கவும். (Slider Tool எடுத்துக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் Angle என்பதை தேர்வு செய்தால் போதும்).

நீளம் 6 ஆன AB என்ற கோடு வரையவும். ∠A = ∠B = α ஆகுமாறு கோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி C ஐ அடையாளப்படுத்தவும். ΔABC வரையவும்.

α மாறுவதற்கு ஏற்ப முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மாறுவதைப் பார்க்கவும். α = 60° ஆகும் போது முக்கோணத்தின் சிறப்புத்தன்மை என்ன? 45° ஆகும் போது?

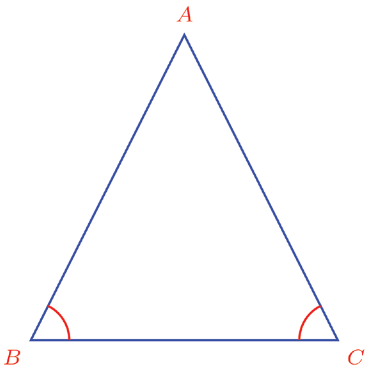
இனி வேறொரு வினா: முதலில் கூறிய கருத்தைத் திருப்பிக் கூறினால் சரியாகுமா?

அதாவது, ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு கோணங்கள் சமமானால், அவற்றின் எதிர் பக்கங்கள் சமமாகுமா?

இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்:

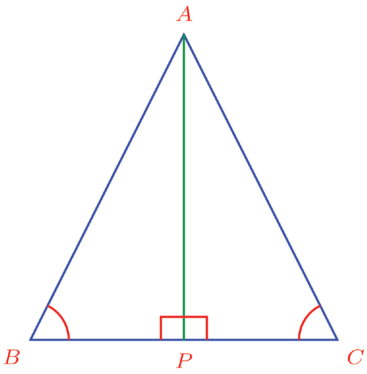
ABC என்ற முக்கோணத்தில் *B* யிலும் *C* யிலும் உள்ள கோணங்கள் சமமாகும்.

AB, AC என்னும் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகுமா என்பது தான் வினா.



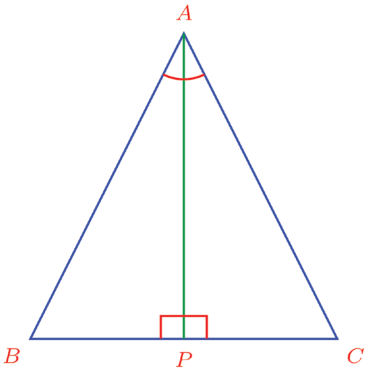
முன்பு செய்தது போல முக்கோணம் *ABC* ஐ இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்:

இங்கு மேல் உச்சியையும் அடிப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைப்பதற்கு பதில், மேல் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைவதே வசதியானது:



இப்போது இடது பக்கமும் வலது பக்கமும் உள்ள *ABP, ACP* ஆகிய முக்கோணங்களில், *B, C* ஆகிய உச்சிகளிலுள்ள கோணங்கள் சமமாகும். இரண்டு முக்கோணங்களிலும் *P* என்ற உச்சியிலுள்ள கோணங்கள் செங்கோணமானதால் சமமாகும்.

அப்படியானால் இரண்டு முக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது கோணங்களும் சமம் அல்லவா.



AP என்ற கோடு இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் பக்கமாகும்.

இரண்டு முக்கோணங்களிலும் ஒரு பக்கமும் அதன் முனைகளிலுள்ள கோணங்களும் சமம் அல்லவா? அப்போது இந்த முக்கோணங்களில் செங்குத்துப் பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள *AB*, *AC* ஆகிய பக்கங்கள் சமமாகும்.

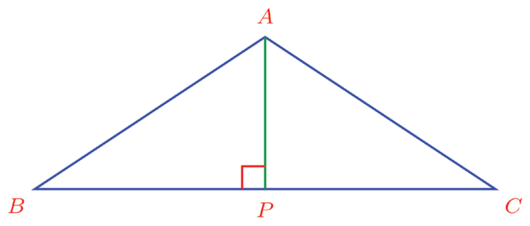
இவை அல்லவா *ABC* என்ற முக்கோணத்தில் சமமான கோணங்களின் எதிர் பக்கங்கள்.

அப்போது முதலில் எழுதிய கருத்தை திருப்பி கூறினாலும் சரியாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் சமம் எனில் இந்தக் கோணங்களின் எதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமமாகும்.

இதிலிருந்து வேறொரு கருத்தையும் பார்க்கலாம்.

படத்தில் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தில் சமமான பக்கங்கள் இணைகின்ற உச்சியிலிருந்து எதிர் பக்கத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.



AB, *AC* இவை சமம் ஆனதால் $\angle B$, $\angle C$ சமமாகும். இவை *ABP*, *ACP* என்னும் செங்கோண முக்கோணங்களிலுள்ள கோணங்களல்லவா. அப்போது இந்த முக்கோணங்களில் இரண்டு கோணங்கள் சமமாகும். எனவே மூன்றாவது கோணங்களும் சமம் ஆகும். அதாவது

$$\angle BAP = \angle CAP$$

இதன் பொருள் என்ன?

AP என்ற கோடு $\angle BAC$ என்ற கோணத்தை இரண்டு சம பாகங்களாக்குகின்றன. இனி இரண்டு முக்கோணங்களிலும் *AP* என்ற பக்கமும் அதிலுள்ள கோணங்களும் சமமானதால் இந்த முக்கோணங்களிலுள்ள மூன்றாவது பக்கமும் சமமாகும்.

$$BP = CP$$

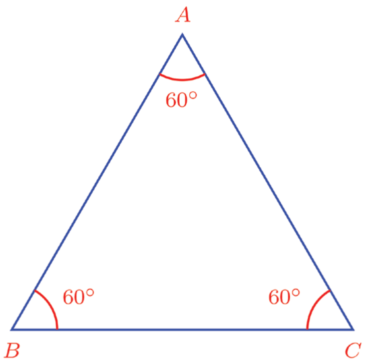
அதாவது *AP* என்ற செங்குத்துக்கோடு *BC* என்ற கோட்டை இரண்டு சமபாகங்களாக்குகிறது.

இவற்றை ஒரு பொதுக்கருத்தாக கூறலாம் அல்லவா.

ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தில், சமபக்கங்கள் இணையும் உச்சியிலிருந்து எதிர்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு, இந்தப் பக்கத்தையும் இந்த மூலையிலுள்ள கோணத்தையும் சமபாகம் செய்கிறது.

இனி வேறொரு வினா:

எந்த சமபக்க முக்கோணத்திலும் கோணங்கள் எல்லாம் 60° என்று தெரியும். மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் சமம் எனில் (60° வீதம்) பக்கங்கள் சமமாகுமா? ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் எதிர் பக்கங்கள் சமம் எனப் பார்த்தோம்.



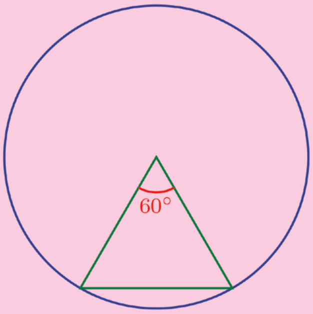
அதாவது படத்தில் $\angle B = \angle C$ ஆனதால் இவற்றின் எதிர் பக்கங்களான $AC = AB$ என கிடைக்கும்.

$\angle A = \angle C$ ஆனதால் $BC = AB$ என்றும் கிடைக்கும்.

அப்படியானால் $AB = BC = AC$ ஆகும். முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமானது.

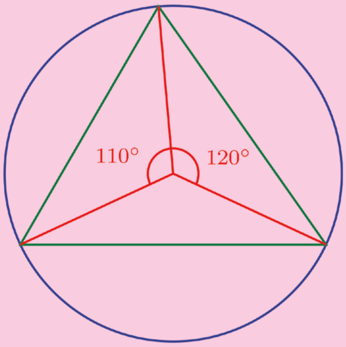
(1) ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் 120° ஆகும். மற்ற இரண்டு கோணங்கள் என்ன?

(2) படத்தில் ஒரு வட்டத்தின் மையமும் வட்டத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்து முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.



முக்கோணத்தின் மற்ற இரண்டு கோணங்கள் கணக்கிடலாம்.

(3) படத்தில் ஒரு வட்டத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.

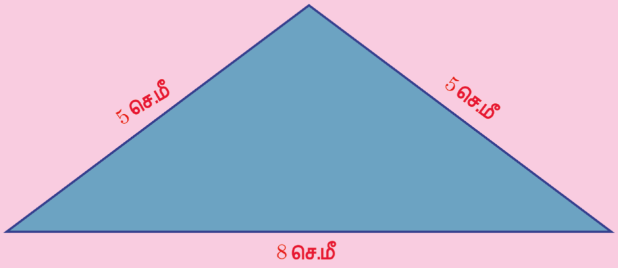


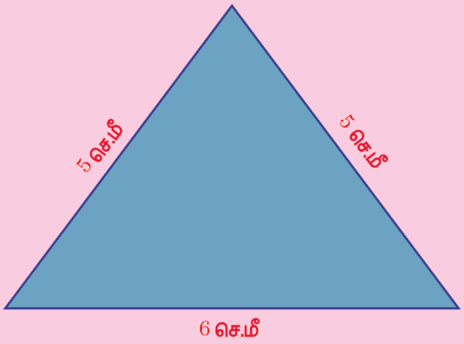
வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் வட்ட மையத்துடன் உருவாக்கும் மூன்று கோணங்களில் இரண்டின் அளவுகளும் கூறப்பட்டுள்ளது.

(i) வட்ட மையத்தில் மூன்றாவது கோணம் கணக்கிடவும்.

(ii) வட்டத்திலுள்ள பெரிய (பச்சை) முக்கோணத்திலுள்ள கோணங்களையெல்லாம் கணக்கிடவும்.

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் கணக்கிடவும்.





(5) ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் 70° ஆகும். மற்ற இரண்டு கோணங்களைப் பற்றி என்னென்ன கூறலாம்?

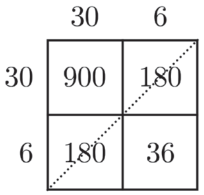
(6) ஒரு கோணம் 70°யும் ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சமமல்லாத எத்தனை இருசமபக்க முக்கோணங்கள் வரையலாம்?

3

வர்க்கசமன்பாடுகள்

தொகையின் வர்க்கம்

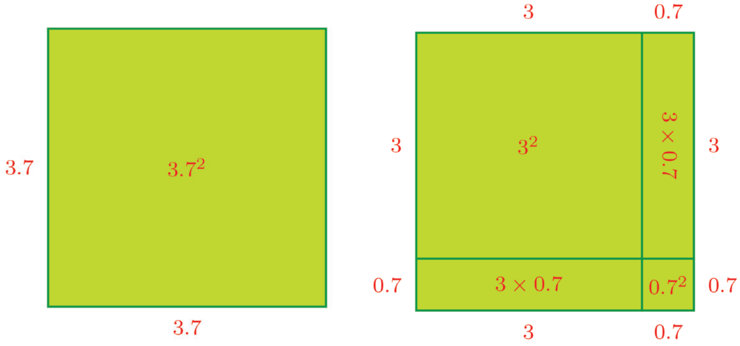
பல எண்களின் வர்க்கங்கள் கணக்கிடுவதற்கான ஒரு முறையை, **வர்க்கங்கள்** என்ற பாடத்தில் கற்றிருக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக,



$$36^2 = 30^2 + (30 \times 6 \times 2) + 6^2$$
$$= 900 + 360 + 36$$
$$= 1296$$

3.7^2 ஐக் கணக்கீடு செய்தது எவ்வாறு?

பக்கங்களின் நீளம் 3.7 ஆன சதுரத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கீடு செய்திருக்கிறோமல்லவா? (**வர்க்கங்கள்** என்ற பாடத்தில் **தசம வர்க்கம்** என்ற பகுதி):



$$3.7^2 = 3^2 + (3 \times 0.7 \times 2) + (0.7)^2$$
$$= 9 + 4.2 + 0.49$$
$$= 13.69$$

முதலாவது கணக்கில், 36 ஐ $30 + 6$ என விரித்தெழுதியல்லவா வர்க்கம் கணக்கீடு செய்தது; இரண்டாவது கணக்கில் 3.7 ஐ $3 + 0.7$ என விரித்தெழுதியும்.

வர்க்கம் கணக்கீடு செய்தது எவ்வாறு?

முதலாவது கணக்கில் 36^2 ஐக் கணக்கிட கூட்டியவை எவையெல்லாம்?

$30^2 = 30$ இன் வர்க்கம்

$6^2 = 6$ இன் வர்க்கம்

$30 \times 6 \times 2 = 30$ மற்றும் 6 இன் பெருக்கற்பலனின் இரண்டு மடங்கு.

இரண்டாவது கணக்கில் 3.7^2 ஐக் கணக்கிட கூட்டியவை எவையெல்லாம்?

$3^2 = 3$ இன் வர்க்கம்

$0.7^2 = 0.7$ இன் வர்க்கம்

$3 \times 0.7 \times 2 = 3$ மற்றும் 0.7 இன் பெருக்கற்பலனின் இரண்டு மடங்கு.

வேறு தொகைகள் எடுத்தாலும் இதைப் போன்று வர்க்கம் கணக்கிடலாம் அல்லவா. இந்த முறையைப் பொதுவாக எவ்வாறு கூறலாம்?

இரண்டு எண்களின் தொகையின் வர்க்கம், அந்த எண்களின் வர்க்கங்களினுடையவும் அவற்றின் பெருக்கற்பலனின் இரண்டு மடங்கினுடையவும் தொகை ஆகும்.

எண்களின் இத்தகைய பொதுவான செயல் தொடர்புகளை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி சுருக்கி எழுதுவதை, ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கின்றோம் அல்லவா. (**இயற்கணிதம்** என்ற பாடத்தில் **எண்களும் இயற்கணிதமும்** என்ற பகுதி).

மேலே எழுதிய வர்க்கக் கருத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கூறலாம்?

எண்கள் x, y என எடுத்தால், தொகை $x + y$.

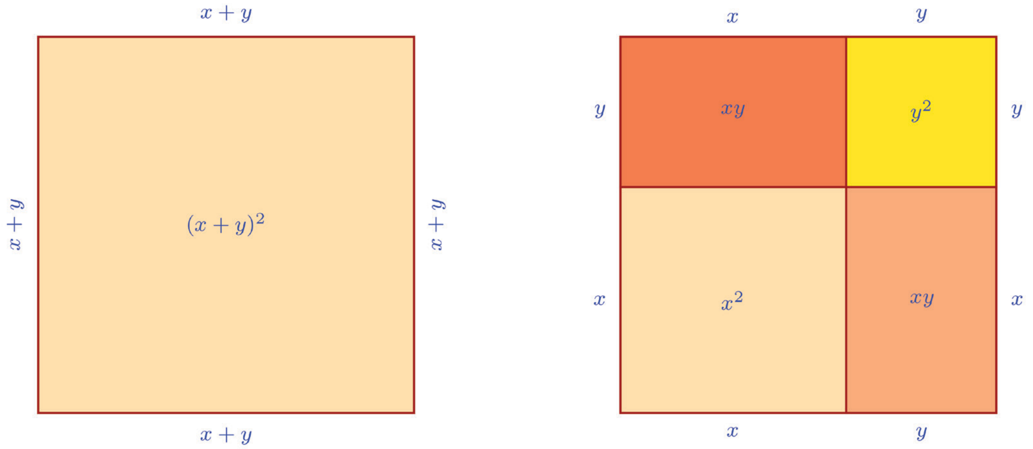
அதன் வர்க்கம்?

$(x + y)^2$ என எழுதலாம்.

அப்போது கருத்தின் இயற்கணித வடிவம் என்ன?

x, y எந்த எண்களானாலும் $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

வடிவியலாக இதனைப் பரப்பளவுகளின் தொடர்பாக இவ்வாறு காண்பிக்கலாம்.:



$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ என்ற சமன்பாட்டில் x, y ஆக எந்த எண்களையும் எடுக்கலாம் அல்லவா.

y ஆக 1 எடுத்தால்?

$$(x+1)^2 = x^2 + 1 + 2x$$

இயற்கணித வாக்கியங்களில் எழுத்துக்களை முதலில் எழுதுவதே வழக்கம். அதற்கேற்ப மேல் உள்ள சமன்பாட்டை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

இதில் x ஆக எந்த எண்ணையும் எடுக்கலாம். அப்போது முதலில் எழுதிய பொதுக் கருத்தின் ஒரு துணைக்கருத்தானது:

x எந்த எண் ஆனாலும், $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

அதாவது,

ஓர் எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டிய எண்ணின் வர்க்கம் கணக்கீடு செய்ய, அந்த எண்ணின் வர்க்கத்துடன், எண்ணின் இரண்டு மடங்கையும் ஒன்றையும் கூட்டினால் போதும்.

இதில் x ஆக 1, 2, 3, ... என இவ்வாறுள்ள எண்ணல் எண்களை எடுத்தால்?

$$2^2 = 1^2 + (2 \times 1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$3^2 = 2^2 + (2 \times 2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$4^2 = 3^2 + (2 \times 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

....

$$11^2 = 10^2 + (2 \times 10) + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$$

$$12^2 = 11^2 + (2 \times 11) + 1 = 121 + 22 + 1 = 144$$

....

என்றெல்லாம் காணலாம். (**வர்க்கங்கள்** என்ற பாடத்தில் **முழுவர்க்கங்கள்** என்ற பகுதியில் இதைப் பார்த்திருக்கிறோமல்லவா).

இனி $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ என்பதில் y ஆக $\frac{1}{2}$ ஐ எடுத்தால்?

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 \times x \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{1}{4} + x$$

$$= x^2 + x + \frac{1}{4}$$

அப்போது வேறொரு துணைக்கருத்தானது.

x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

இதிலும் x ஆக எண்ணல் எண்களை எடுத்தால்?

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\tfrac{1}{4}$$
$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + 2 + \frac{1}{4} = 4 + 2 + \frac{1}{4} = 6\tfrac{1}{4}$$
$$\left(3\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3^2 + 3 + \frac{1}{4} = 9 + 3 + \frac{1}{4} = 12\tfrac{1}{4}$$

இதன் தசம வடிவத்தையும் **வர்க்கங்கள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்திருக்கிறோமல்லவா. (**தசம வர்க்கங்கள்** என்ற பகுதி)

இனி இந்த சமன்பாட்டைப் பார்க்கவும்.

x ஆக பூஜ்ஜியமல்லாத எந்த எண்ணை எடுத்தாலும்

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x}$$
$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

இதில் x ஆக 2, 3, 4, ... என்ற எண்ணல் எண்களை எடுத்தால்?

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + \frac{1}{2^2} + 2 = 6\tfrac{1}{4}$$
$$\left(3\tfrac{1}{3}\right)^2 = 3^2 + \frac{1}{3^2} + 2 = 11\tfrac{1}{9}$$
$$\left(4\tfrac{1}{4}\right)^2 = 4^2 + \frac{1}{4^2} + 2 = 18\tfrac{1}{16}$$

....

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வர்க்கங்களை மனக்கணக்காகக் கணக்கிடவும்.

(i) 15^2 (ii) 25^2 (iii) 33^2 (iv) $\left(5\tfrac{1}{2}\right)^2$ (v) $\left(10\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vi) $\left(25\tfrac{1}{2}\right)^2$ (vii) $\left(5\tfrac{1}{5}\right)^2$

(2) தொகையின் வர்க்கத்தைப் பற்றியுள்ள பொதுக்கருத்தில், ஓர் எண்ணை 2 என எடுத்தால் கிடைக்கின்ற துணைக்கருத்து என்ன? இதைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை மனக்கணக்காகச் செய்யவும்:

(i) 22^2 என்ன?

(ii) 52^2 என்ன?

(iii) $25^2 = 625$ ஆகும்; 27^2 என்ன?

(3) $43^2 = 1849$ ஆகும்;

(i) 44^2 என்ன? (ii) 46^2 என்ன?

சிறப்புத்தன்மையுள்ள சில எண்களின் வர்க்கங்களின் சிறப்புகளைப் புரிந்து கொள்ள, தொகையின் வர்க்கத்தைப் பற்றியுள்ள சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்.

15^2	25^2	35^2
$= (10 + 5)^2$	$= (20 + 5)^2$	$= (30 + 5)^2$
$= 10^2 + (10 \times 5 \times 2) + 5^2$	$= 20^2 + (20 \times 5 \times 2) + 5^2$	$= 30^2 + (30 \times 5 \times 2) + 5^2$
$= 100 + 100 + 25$	$= 400 + 200 + 25$	$= 900 + 300 + 25$
$= 225$	$= 625$	$= 1225$

இறுதி இலக்கம் (ஒன்றாம் இடத்தின் இலக்கம்) 5 ஆன எல்லா எண்களுடையவும் வர்க்கத்தின் இறுதியில் உள்ள இரண்டு இலக்கங்கள் சேர்ந்தால் 25 தான் ஆகுமா?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி பரிசோதிக்கலாம். எந்த எண்ணினுடையவும் இறுதியில் உள்ள இலக்கம், எண்ணினை 10 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கின்ற மீதி அல்லவா? (ஐந்தாம் வகுப்பில் **எண் தொடர்புகள்** என்ற பாடத்தில் **மீதிக் கணக்குகள்** என்ற பகுதி).

அப்போது 5 ல் முடிவடைகின்ற ஓர் எண்ணை 10 ஆல் வகுத்தால் மீதி 5.

அதில் வகுத்தல் பலன் n என எடுத்தால், இவ்வகையான எண்களின் பொது வடிவம் $10n + 5$ (ஏழாம் வகுப்பில் **இயற்கணிதம்** என்ற பாடத்தில் **மடங்கும் மீதியும்** என்ற பகுதியை நினைவு கூரவும்).

இந்த வடிவத்திலுள்ள ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் என்ன?

$$(10n + 5)^2 = (10n)^2 + (10n \times 5 \times 2) + 5^2$$
$$= 100n^2 + 100n + 25$$

இதில் $100n^2 + 100n$ என்பதை இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா:

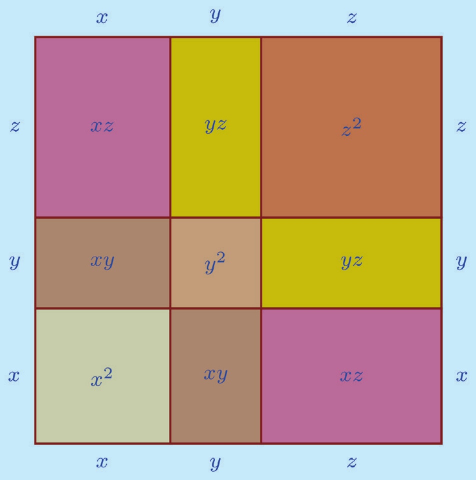
$$100n^2 + 100n = 100(n^2 + n)$$

அப்போது

$$(10n + 5)^2 = 100(n^2 + n) + 25$$

மூன்று எண்கள்

இரண்டு எண்களின் தொகையின் வர்க்கத்தை வடிவியல் முறையில் கணக்கிட சதுரத்தை நான்காகப் பிரித்து பரப்பளவுகளைக் கூட்டியது போல, மூன்று எண்களின் தொகையின் வர்க்கத்தையும் இவ்வாறு காணலாம்:



இதிலிருந்து இவ்வாறு கிடைக்கும்:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

அதாவது, $n^2 + n$ என்ற எண்ணை 100 ஆல் பெருக்கி 25 ஐக் கூட்டியதே வர்க்கம். எந்த எண்ணையும் 100 ஆல் பெருக்கினால் கடைசியில் உள்ள இரண்டு இலக்கங்களும் 0.

அப்போது 25 ஐக் கூட்டினால் கடைசியில் உள்ள இரண்டு இலக்கங்களும் சேர்ந்து 25 ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கணக்கின்படி

$$\begin{aligned} 65^2 &= ((6^2 + 6) \times 100) + 25 \\ &= (42 \times 100) + 25 \\ &= 4200 + 25 \\ &= 4225 \end{aligned}$$

இத்தகைய வர்க்கங்களில் வேறு இலக்கங்கள் சேர்ந்த எண்ணையும் கணக்கிடலாம்:

அதற்காக $(10n + 5)^2 = 100(n^2 + n) + 25$ என்ற சமன்பாட்டில் $n^2 + n$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

அப்போது

$$(10n + 5)^2 = (n(n + 1) \times 100) + 25$$ என ஆகும்.

இதிலிருந்து, வர்க்கத்தில் இறுதியில் உள்ள 25 (இரண்டு இலக்கங்கள்) நீக்கினால் கிடைக்கின்ற எண் $n(n + 1)$ எனக் காணலாமல்லவா.

இதில் n என்பது, எண்ணின் இறுதியில் உள்ள இலக்கமான 5 ஐ நீக்கினால் கிடைக்கின்ற எண் அல்லவா. அப்போது வர்க்கம் கணக்கிட வேண்டிய எண்ணில் 5 ஐ நீக்கினால் கிடைக்கின்ற எண்ணை அதற்கு அடுத்த எண்ணல் எண்ணால் பெருக்கியதே, வர்க்கத்தில் 25 ஐ நீக்கினால் கிடைக்கின்ற எண்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$\begin{aligned} 75^2 &= (7 \times 8 \times 100) + 25 \\ &= 5600 + 25 \\ &= 5625 \end{aligned}$$

195^2 ஆனால்?

முதலில் 19×20 கணக்கிடுக

$$19 \times 20 = 380$$

இதன் இறுதியில் 25 ஐச் சேர்த்து வைத்தால் 195 இன் வர்க்கம் கிடைக்கும்.

$$195^2 = 38025$$

76 இன் விளையாட்டு

$$\begin{aligned} 76^2 &= 5776 \\ 176^2 &= 30976 \\ 276^2 &= 76176 \end{aligned}$$

76 ல் முடிவடைகின்ற வேறு எண்களுடைய வர்க்கம் கண்டுபிடித்துப் பார்க்கவும். என்ன சிறப்பம்சம் காணப்படுகிறது?

இது ஏன்?

76 ல் முடிவடைகின்ற எந்த எண்ணையும் $100x + 76$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$(100n + 76)^2 = 10000n^2 + 15200n + 5776.$$

n எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும் $10000n^2$ னுடையவும் $15200n$ னுடையவும் தொகையில் ஒன்றாவது, பத்தாவது இடங்களில் பூஜ்ஜியமாக இருக்குமல்லவா. இவற்றின் தொகையுடன் 5776 ஐக் கூட்டும் போது கடைசி இரண்டு இலக்கம் 76 ஆக இருக்கும்.

76 ற்குப் பதில் வேறு ஏதேனும் இரண்டு எண்களுக்கு இந்த சிறப்பம்சம் இருக்கிறதா?

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்.

எந்த எண்ணையும் 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 0, 1, 2 இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்குமல்லவா.

மீதி 0 எனில், எண் 3 இன் மடங்கு; அப்போது 3 இன் மடங்கு அல்லாத எண்களை 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 அல்லது 2.

இத்தகைய எண்களின் வர்க்கங்களை 3 ஆல் வகுத்தால் ?

எண்	வர்க்கம்	3 ஆல் வகுத்தால் மீதி
1	1	1
2	4	1
4	16	1
5	25	1

இத்தகைய எந்த எண்ணின் வர்க்கத்தையும் 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 தான் ஆகுமா? இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி பரிசோதிக்கலாம்.

3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வருகின்ற எண்களையெல்லாம்.

$$3n + 1, \ (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதலாமல்லவா. (ஏழாம் வகுப்பில் **இயற்கணிதம்** என்ற பாடத்தில் **மடங்கும் மீதியும்** என்ற பகுதி).

இத்தகைய எண்களின் வர்க்கங்கள்?

$$(3n + 1)^2 = (3n)^2 + (3n \times 1 \times 2) + 1^2$$

$$= 9n^2 + 6n + 1$$

இதில் $9n^2 + 6n$ என்பதனை 3 ன் மடங்காக எழுதலாம்.

$$9n^2 + 6n = 3(3n^2 + 2n)$$

கணினி உதவி

மேலே காணப்படும் அட்டவணையைத் தயாரிக்க பைதன் மொழியில் ஒரு புரோகிராம் எழுதலாம்.

```
for n in range(1,11):
    if n%3! = 0:
        print (n, n**2, (n**2)%3)
```

இதில் முதல் வரிசையில், 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்களாக n எடுப்பதற்கான கட்டளை ஆகும். இரண்டாவது வரிசையில் n%3 என்பது, n ஐ 3 ஆல் வகுத்து மீதி காண்பதற்கான கட்டளையும், ! = 0 என்பதன் பொருள் பூஜ்ஜியமல்ல என்றும் ஆகும். அப்போது இந்த வரியை

if n% 3! = 0 என வாசிக்கும் போது பொருள், n ஐ 3 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 0 அல்லது என ஆகும்.

இந்த நிபந்தனையை ஏற்றுக்கொள்ளும் எண்களை என்ன செய்ய வேண்டும் எனக் இறுதி வரிசையில் கூறப்படுகிறது. இத்தகைய எண்கள், அவற்றின் வர்க்கங்கள், அவற்றை 3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் இவையெல்லாம் எழுதிக் காண்பிக்கவும் என்பதே இந்த கட்டளை.

புரோகிராம் இந்த அட்டவணை தரும்.

```
1   1    1
2   4    1
4   16   1
5   25   1
7   49   1
8   64   1
10  100  1
```

அப்போது

$$(3n+1)^2 = 3(3n^2+2n)+1$$

அதாவது இத்தகைய எந்த வர்க்கமும், 3 இன் மடங்குடன் 1 கூட்டியதாகும்; அதாவது 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வருவதாகும்.

இனி 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 வருகின்ற எண்கள்?

இவற்றின் பொது வடிவம்

$$3n+2, \ (n=0, 1, 2, 3, ...)$$

இவற்றின் வர்க்கங்கள்

$$(3n+2)^2 = 9n^2+12n+4 = 3(3n^2+4n)+4$$

இத்தகைய ஓர் எண்ணை 3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கின்ற மீதி என்ன?

சமன்பாட்டிலுள்ள 4 ஐ 3 + 1 என எழுதலாமல்லவா.

அப்போது

$$\begin{aligned}(3n+2)^2 &= 3(3n^2+4n)+3+1\\ &= 3(3n^2+4n+1)+1\end{aligned}$$

மீண்டும் 3 ன் மடங்குடன் 1 கூட்டிய எண்ணே கிடைத்தது அல்லவா?

அதாவது, எண்ணை 3 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி 2 ஆனாலும் வர்க்கத்தை 3 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 தான் ஆகும்.

அப்போது என்ன கூறலாம்?

3 ன் மடங்கு அல்லாத எந்த எண்ணின் வர்க்கத்தையும் 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 ஆகும்.

3 ன் மடங்கான எந்த எண்ணின் வர்க்கமும் 3 இன் மடங்கே அல்லவா. (ஏன்?) பொதுவாக இதனை ஒரு கருத்தாக பின்வருமாறு கூறலாம்.

எந்த முழு வர்க்கத்தையும் 3 ஆல் வகுத்தால், மீதி 0 அல்லது 1 ஆகும்.

இதை திருப்பி இவ்வாறும் கூறலாம்:

3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 வருகின்ற எண்கள் முழுவர்க்கங்கள் அல்ல.

(1) சில ஒற்றை எண்களின் வர்க்கம் கணக்கீடு செய்து, கீழே கூறப்பட்டுள்ளவற்றைப் பரிசோதிக்கவும். அவை சரியாவதற்கான காரணத்தை விவரிக்கவும்:

(i) ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்கள் எல்லாம் ஒற்றை எண்களே ஆகும்.

(ii) எந்த ஒற்றை எண்ணினுடையவும் வர்க்கத்தை 4 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கின்ற மீதி 1 ஆகும்.

(iii) எந்த ஒற்றை எண்ணினுடையவும் வர்க்கத்தை 8 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி 1 ஆகும்.

(2) சில எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களை 4 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியைக் கணக்கீடு செய்க. கீழே கூறப்பட்டுள்ள கருத்துக்களின் காரணங்களை விவரிக்கவும்.

(i) எந்த எண்ணல் எண்ணினுடையவும் வர்க்கத்தை 4 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி 0 அல்லது 1 ஆகும்.

(ii) 4 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 அல்லது 3 கிடைக்கும் எந்த எண்களும் முழு வர்க்கங்களல்ல.

(3) இந்தக் கணக்குகளைப் பார்க்கவும்.

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

மேலும் சில ஒற்றை எண்களை எடுத்து, முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத முடியுமா எனப் பரிசோதிக்கவும். ஒன்றைவிடப் பெரிய எல்லா ஒற்றை எண்களையும் இவ்வாறு எழுத இயலும் காரணத்தை விவரிக்கவும்.

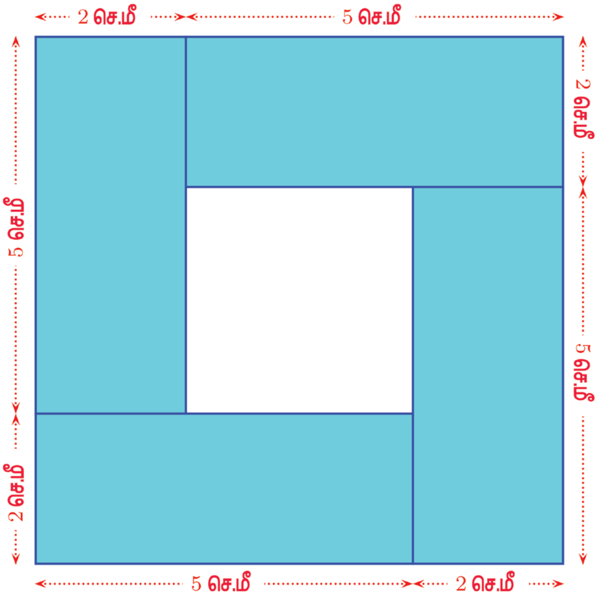
(குறிப்பு: ஒற்றை எண்களின் பொது வடிவம் ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்ததை நினைவு கூரவும்).

(4) ஒன்றில் முடிவடைகின்ற எந்த எண்ணின் வர்க்கமும் 1 இல் தான் முடிவடையும் என நிரூபிக்கவும், 5 இல் முடிவடைகின்ற எண்களின் வர்க்கங்கள்?

6 இல் முடிவடைகின்ற எண்களின் வர்க்கங்கள்?

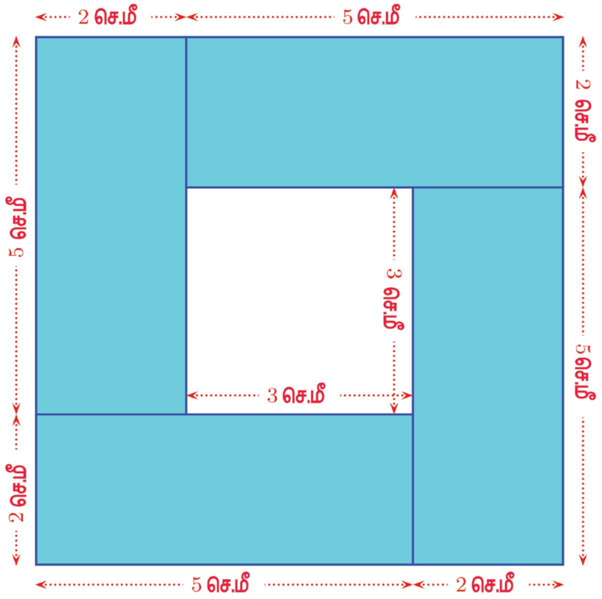
வித்தியாசத்தின் வர்க்கம்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்;



ஒரே போல் உள்ள நான்கு செவ்வகங்களை இணைத்து ஒரு சதுரம் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. சதுரத்தின் உள்ளே உள்ள சிறிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?

சிறிய செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் கணக்கிடலாமல்லவா.

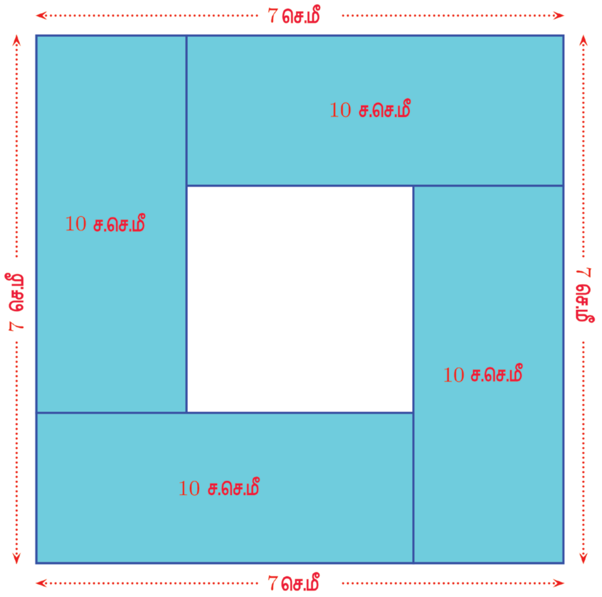


அதாவது இது ஒரு சதுரமாகும். பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர்.

பரப்பளவு

$$3^2 = 9 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்.}$$

வேறொரு முறையிலும் இதனைக் கணக்கிடலாம். பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவிலிருந்து நான்கு செவ்வகங்களின் பரப்பளவைக் கழிக்கவும்;



அதாவது, பரப்பளவு

$$7^2 - (10 \times 4) = 49 - 40 = 9 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

இதில் சிறிய சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தைக் கணக்கீடு செய்தது எவ்வாறு?

$$5 - 2 = 3$$

பெரிய சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம்?

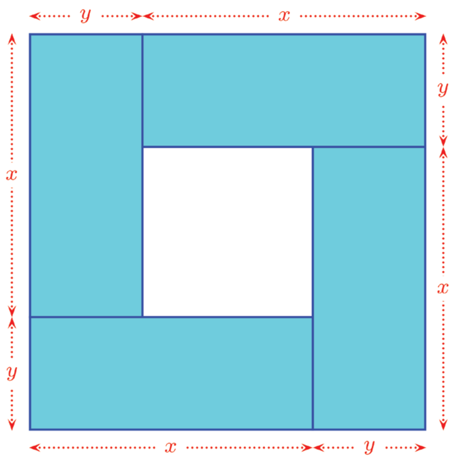
$$5 + 2 = 7$$

அப்போது இங்கு பார்த்த கணக்கு, எண்கள் மட்டுமாகக் கூறினால்?

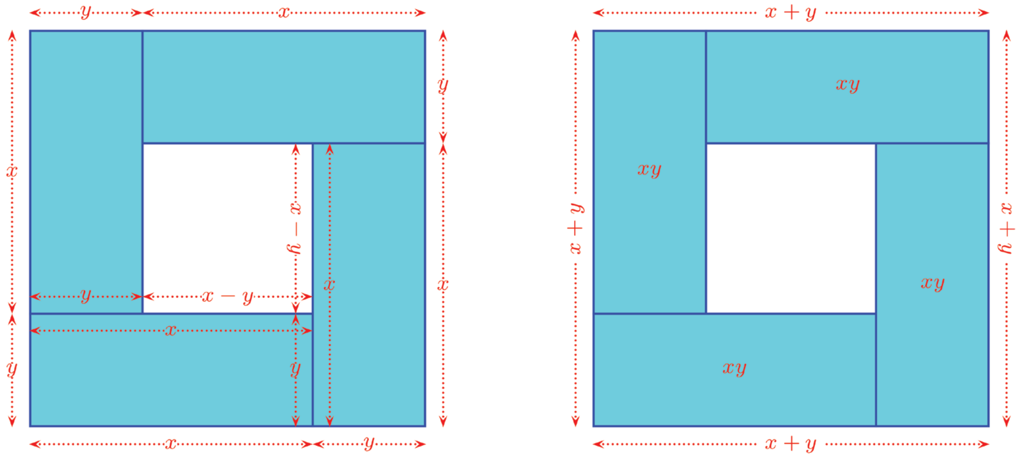
$$(5 - 2)^2 = (5 + 2)^2 - (5 \times 2 \times 4)$$

5 ற்கும் 2 ற்கும் பதிலாக வேறு எண்களையெடுத்தாலும் இது சரியாகுமா?

ஒரே போல் உள்ள நான்கு செவ்வகங்களின் பக்கங்களின் நீளம் x, y என எடுத்துப் பார்க்கலாம்:



முன்பு செய்தது போல சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவை இரண்டு முறைகளில் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம்:



இடது பக்கத்தில் உள்ள படத்திலிருந்து

சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவு $(x-y)^2$

வலது பக்கத்தில் உள்ள படத்திலிருந்து

சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவு $(x+y)^2 - 4xy$

அப்போது

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

இதில் $(x+y)^2$ என்பதை இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

இப்போது கிடைத்த சமன்பாட்டில் இதனைப் பயன்படுத்தினால்

$$(x-y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy$$

சமன்பாட்டின் வலது பக்கத்தில் கழிக்கும் $4xy$ என்பது $2xy + 2xy$ அல்லவா. அப்போது $4xy$ ஐக் கழிப்பதற்கு, முதலில் ஒரு $2xy$ ஐயும் பின்பு ஒரு $2xy$ ஐயும் கழித்தால்? (ஏழாம் வகுப்பில் **கணக்கில் சுருக்கெழுத்து** என்ற பாடத்தில் **ஒவ்வொன்றாகவும் மொத்தமாகவும்** என்ற பகுதியை நினைவு கூரவும்).

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x^2 + y^2 + 2xy) - 4xy \\ &= x^2 + y^2 + 2xy - 2xy - 2xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy\end{aligned}$$

இதில் x, y எந்த எண்களும் ஆகலாமல்லவா, அதாவது

x, y எந்த எண்கள் ஆனாலும் $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

இதனை சாதாரண மொழியில் கூறினால்?

இரண்டு எண்களின் வித்தியாசத்தின் வர்க்கம், எண்களின் வர்க்கங்களின் தொகையிலிருந்து அவற்றின் பெருக்கல் பலனின் இரண்டு மடங்கை கழித்தது ஆகும்.

சில எண்களின் வர்க்கம் கணக்கிட இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 99^2 ஐக் கணக்கிட $99 = (90 + 9)$ என எழுதி, தொகையின் வர்க்கம் கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, $99 = (100 - 1)$ என எழுதி, வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தை கணக்கிடலாம்:

$$\begin{aligned}99^2 &= (100-1)^2 \\ &= 100^2 - (100 \times 1 \times 2) + 1^2 \\ &= 10000 - 200 + 1\end{aligned}$$

$$= 9801$$

இதைப் போன்று

$$\begin{aligned} 48^2 &= (50-2)^2 \\ &= 50^2 - (50 \times 2 \times 2) + 2^2 \\ &= 2500 - 200 + 4 \\ &= 2304 \end{aligned}$$

(1) கீழேயுள்ள வர்க்கங்களை மனக்கணக்காகக் கணக்கிடவும்.

(i) 29^2 (ii) 38^2 (iii) 999^2 (iv) $\left(9\frac{1}{2}\right)^2$ (v) $(9.7)^2$

(2) இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$$3^2 - (2 \times 3) = 3 = 2^2 - 1$$

$$4^2 - (2 \times 4) = 8 = 3^2 - 1$$

$$5^2 - (2 \times 5) = 15 = 4^2 - 1$$

இவற்றின் பொதுக்கருத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விவரிக்கவும்.

தொகை மற்றும் வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களைக் குறித்துள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து வேறு சில சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கூட்டினால் என்ன கிடைக்கும்?

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

இதைத் திருப்பி எழுதினால்

$$2(x^2 + y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2$$

இதில் x, y ஆகப் பல எண்ணல் எண்களை எடுத்தால் பின்வருமாறு கிடைக்குமல்லவா.

$$\begin{aligned} 2(2^2 + 1^2) &= 10 = 3^2 + 1^2 \\ 2(3^2 + 2^2) &= 26 = 5^2 + 1^2 \\ 2(5^2 + 1^2) &= 52 = 6^2 + 4^2 \\ 2(6^2 + 4^2) &= 104 = 10^2 + 2^2 \end{aligned}$$

இவ்வாறு எந்த இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் தொகையை எடுத்தாலும், அதன் இரண்டு மடங்கையும் வேறு இரண்டு முழுவர்க்கங்களின் தொகையாக எழுதலாம்.

இதனைப் பயன்படுத்தி 20, 40, 80 என்ற எண்களை இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் தொகையாக எழுதிப் பார்க்கவும்:

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தை குறித்துள்ள சமன்பாடு கிடைத்தது எவ்வாறு?

முதலில்

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

என்ற சமன்பாட்டை உருவாக்கினோம் அல்லவா? இதன் பொருள் என்ன?

$(x+y)^2$ என்ற எண்ணிலிருந்து $4xy$ என்ற எண்ணைக் கழித்தால், $(x-y)^2$ என்ற எண் கிடைக்கும்.

அப்போது $(x+y)^2$ இலிருந்து $(x-y)^2$ஐக் கழித்தால் $4xy$ கிடைக்குமல்லவா. அதாவது

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

இதை திருப்பி எழுதினால்

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

இதில் y ஆக 1 ஐ எடுத்தால் இவ்வாறாகும்:

$$4x = (x+1)^2 - (x-1)^2$$

இனி x ஆக $2, 3, 4, \ldots$ என்ற எண்ணல் எண்களை எடுத்தால் பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$\begin{aligned} 8 &= 3^2 - 1^2 \\ 12 &= 4^2 - 2^2 \\ 16 &= 5^2 - 3^2 \end{aligned}$$

....

அதாவது 8 முதல் உள்ள 4 ன் மடங்குகளை எல்லாம் இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம்.

1 ஐத் தவிர அனைத்து ஒற்றை எண்களையும் இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம் என முன்பே பார்த்தோமல்லவா.

எந்த எண்ணையும் இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலுமா எனப் பார்க்கலாம்.

பைதாகரஸ் மும்மைகள்

மூன்று எண்ணல் எண்களில் இரண்டின் வர்க்கங்களின் தொகை மூன்றாவது வர்க்கத்திற்கு சமமானால், இந்த மூன்று எண்களை ஒரு பைதாகரஸ் மும்மைகள் என்று கூறலாம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோமல்லவா . எடுத்துக்காட்டாக

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

எனவே $3, 4, 5$ என்ற மூன்று எண்களும் ஒரு பைதாகரஸ் மும்மை ஆகும்.சுமார் பி.சி.இ இரண்டாயிரத்தில் பாபிலோனியாவில் உள்ள ஒரு களிமண் பலகையில் இவ்வகை மும்மைகளின் ஒரு அட்டவணையே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வகை எல்லா மும்மைகளையும் கண்டுபிடிக்க ஒரு முறை உண்டு $m > n$ ஆன இரண்டு எண்ணல் எண்களை எடுத்து கீழே கூறப்பட்டுள்ளதைப் போல் a, b, c என்ற எண்களைக் கணக்கிடுக.

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2mn \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

இனி

$$(x-y)^2 + 4xy = (x+y)^2$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

எனக் காணலாம்.

ஏறக்குறைய பி.சி.இ மூன்றாம் நூற்றாண்டிலேயே கிரீஸ் கணித மேதைகளுக்கு இந்த முறை தெரிந்திருந்தது.

அதற்காக $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ என்ற சமன்பாட்டினை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

இந்த சமன்பாட்டில்

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

எனவும்

$$\frac{1}{4}(x-y)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

எனவும் எழுதினால், சமன்பாட்டை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

இதன் பொருள் என்ன?

எந்த இரண்டு எண்களுக்கிடையே (எண்ணல் எண்கள் ஆக வேண்டுமென்பதில்லை) பெருக்கற் பலனை இரண்டு வர்க்கங்களின் (முழு வர்க்கங்கள் ஆக வேண்டுமென்பதில்லை) வித்தியாசமாக எழுதலாம்; மேலும் தெளிவாக கூறினால்

எந்த இரண்டு எண்களுடையவும் பெருக்கற்பலன், அவற்றின் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பாதிகளின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாகும்.

எந்த எண் x ஐயும் $x \times 1$ என எழுதலாமல்லவா. அப்போது மேலே கூறியதற்கு ஏற்ப

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

எடுத்துக்காட்டாக

$$11 = \left(\frac{11+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{11-1}{2}\right)^2 = 6^2 - 5^2$$

$$10 = \left(\frac{10+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{10-1}{2}\right)^2 = \left(5\frac{1}{2}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$$

சில பெருக்கல் பலன்களை எளிதாக கணக்கிடவும் மேலே கூறிய முறையைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக

135×65 ஐப் பார்க்கவும். தொகை மற்றும் வித்தியாசத்தின் பாதியைக் கணக்கீடு செய்தால்

$$\frac{135+65}{2} = 100$$

$$\frac{135-65}{2} = 35$$

எனக் கிடைக்கும், எனவே மேற்கண்ட கருத்தின்படி

$$\begin{aligned} 135 \times 65 &= 100^2 - 35^2 \\ &= 10000 - 1225 \\ &= 8775 \end{aligned}$$

இதைப் போன்று, 26.5×23.5 ஐக் கணக்கிடலாம்:

$$\begin{aligned} 26.5 \times 23.5 &= \left(\frac{26.5 + 23.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{26.5 - 23.5}{2}\right)^2 \\ &= 25^2 - 1.5^2 \\ &= 625 - 2.25 \\ &= 622.75 \end{aligned}$$

(1) இந்தக் கணக்குகளைப் பார்க்கவும்.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

(i) இதே வரிசைமுறையில் அடுத்த இரண்டு வரிகளை எழுதுக

(ii) இவற்றின் பொதுக் கருத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விவரிக்கவும்.

(2) சில எண்ணல் எண்களை இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக இரண்டு முறைகளில் எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$\begin{aligned} 24 &= 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2 \\ 32 &= 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2 \\ 40 &= 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2 \end{aligned}$$

8 இன் தொடர்ச்சியான சில மடங்குகளையும் முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக இரண்டு முறைகளில் எழுதவும்.

24 முதல் உள்ள 8 இன் மடங்குகளையெல்லாம் இவ்வாறு இரண்டு முறைகளில் எழுதுவதை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விவரிக்கவும்.

(3) சில எண்களை இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக இரண்டு முறையில் எழுதியிருப்பதைப் பார்க்கவும்:

$$\begin{aligned} 15 &= 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2 \\ 21 &= 11^2 - 10^2 = 5^2 - 2^2 \\ 35 &= 18^2 - 17^2 = 6^2 - 1^2 \end{aligned}$$

(i) 15, 21, 35 ஆகிய எண்களை இரண்டு காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எவ்வாறெல்லாம் எழுதலாம்?

(ii) இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமானது, இரண்டு முறைகளில் எழுத இயலுகின்றதுமான வேறு இரண்டு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(iii) இதிலிருந்து கிடைக்கும் பொதுக்கருத்து என்ன?

(4) கீழேயுள்ள பெருக்கற்பலன்களை இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதிக் கணக்கீடு செய்க:

(i) 78×22 (ii) 301×299 (iii) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ (iv) 10.7×9.3

(5) கீழேயுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பெருக்கலிலும், பெரிய எண் கிடைப்பது எது என பெருக்கிப் பார்க்காமல் கண்டுபிடிக்கவும்:

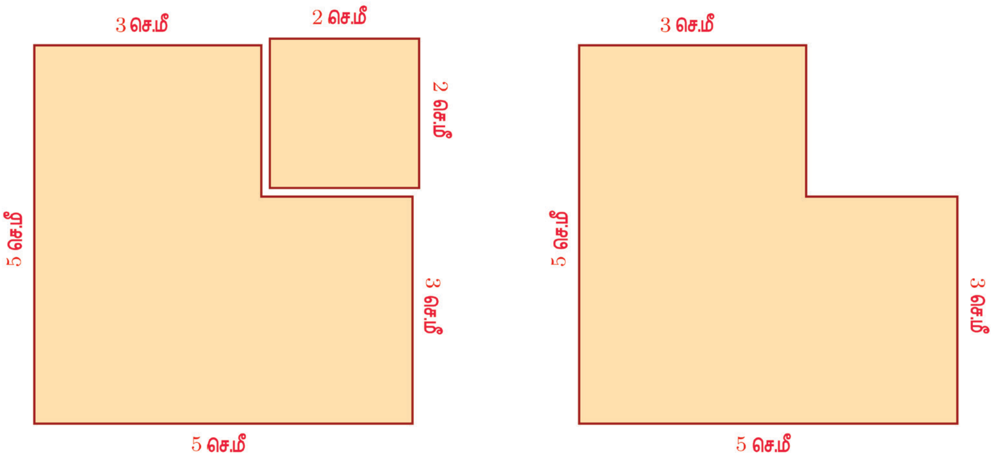
(i) 75×25 76×24

(ii) 76×24 74×26

(iii) 10.6×9.4 10.4×9.6

வர்க்கவித்தியாசம்

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:

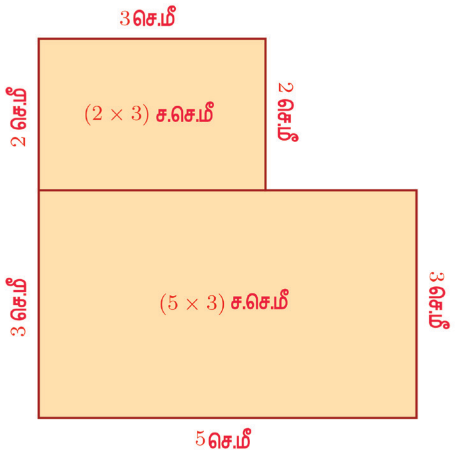


ஒரு சதுரத்தின் மூலையிலிருந்து ஒரு சிறிய சதுரம் வெட்டி மாற்றப்பட்டுள்ளது. மீதமுள்ள பாகத்தின் பரப்பளவு என்ன? எளிதல்லவா?

பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவிலிருந்து, சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவைக் கழிக்கவும்

$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \text{ சதுர சென்டீமீட்டர்}$$

இதை வேறொரு முறையிலும் கணக்கிடலாம். மீதியுள்ள பகுதியை இரண்டு செவ்வகங்களாக பிரிக்கலாமல்லவா. இவற்றின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால் போதும்:



மீதியுள்ள பாகத்தின் பரப்பளவு

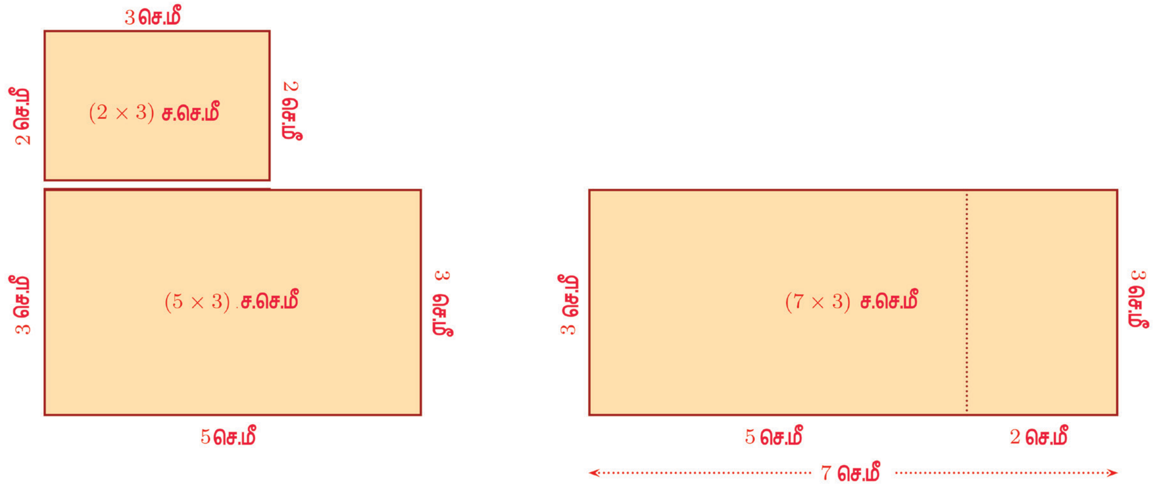
$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = 15 + 6 = 21 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

கணக்கீடு செய்வது பின்வருமாறு ஆகலாம்:

$$(5 \times 3) + (2 \times 3) = (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3 = 21$$

இந்தக் கணக்கீட்டின் இறுதியில், 7 ஐயும் 3 ஐயும் அல்லவா பெருக்கியது. பக்கங்கள் 7 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டரும் ஆன செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அல்லவா இது?

அப்போது மீதமுள்ள பாகத்தை இவ்வாறு ஒரு செவ்வகம் ஆக்கலாமா?



மேலே உள்ள சிறிய செவ்வகத்தை வெட்டி எடுத்து, பெரிய செவ்வகத்தின் வலது பக்கத்தில் சேர்த்து வைத்தால் போதும். இந்த மாற்றத்தை எண்களில் எழுதினால்,

$$5^2 - 2^2 = 7 \times 3$$

இதில் இடது பக்கத்தில் உள்ள 5, 2 என்ற எண்களிலிருந்து வலது பக்கத்தில் உள்ள 7 உம் 3 உம் கிடைத்தது எவ்வாறு?

$$7 = 5 + 2$$

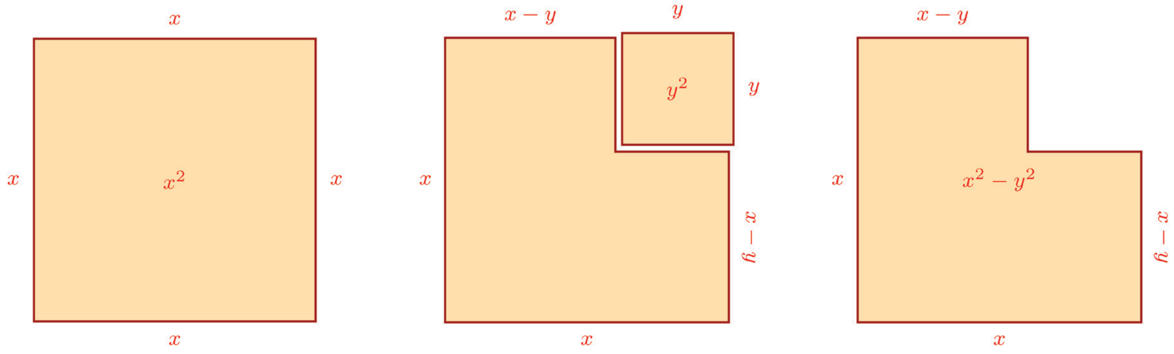
$$3 = 5 - 2$$

அப்போது

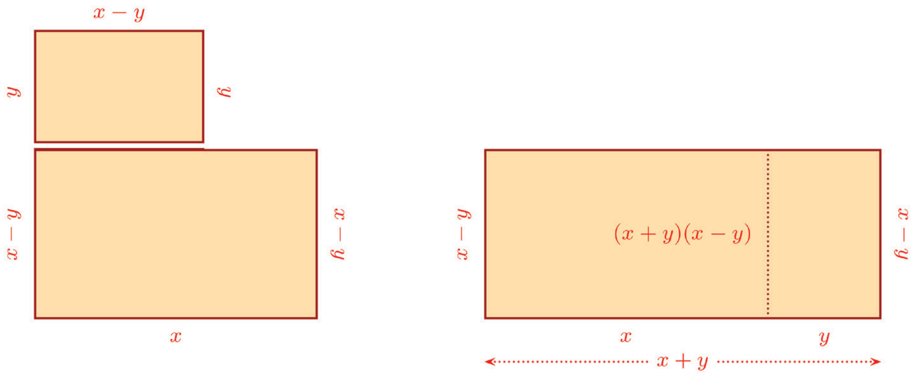
$$5^2 - 2^2 = (5 + 2) \times (5 - 2)$$

எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்தாலும் இதுபோல வர்க்கங்களின் வித்தியாசம், தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலன் ஆகுமா?

எண்களை x, y என எடுத்து, சதுரப் பிரச்சனையின் படங்களைப் பார்க்கலாம்:



முன்பு செய்தது போல மேல் பகுதியிலிருந்து ஒரு செவ்வகம் வெட்டியெடுத்து, வலது பக்கத்தில் இணைத்து வைக்கவும்.



அப்போது இதனை ஒரு பொதுக்கருத்தாக எழுதலாம் அல்லவா.

x, y எந்த எண்களானாலும் $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

இதை சாதாரண மொழியில் கூறினால்?

இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் என்பது எண்களின் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனாகும்.

இரண்டு எண்களின் பெருக்கற்பலனை வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதுகின்ற முறையை முன் பகுதியில் பார்த்தோமல்லவா. மாறாக, இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தை பெருக்கற்பலனாக எழுதுகின்ற முறையே இப்போது பார்த்தது.

எடுத்துக்காட்டாக

$$168^2 - 162^2 = (168 + 162) \times (168 - 162)$$
$$= 330 \times 6$$
$$= 1980$$

பின்ன எண்களிலும் இதைச் செய்யலாம்.

$$\left(5\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(4\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(5\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\right) \times \left(5\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 10 \times 1 = 10$$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ என்ற சமன்பாட்டில், y ஆக 1 ஐ எடுத்தால், அது இவ்வாறாகும்.

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ எனவும் எழுதலாம்.

இதனை திருப்பி வாசித்தால்

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

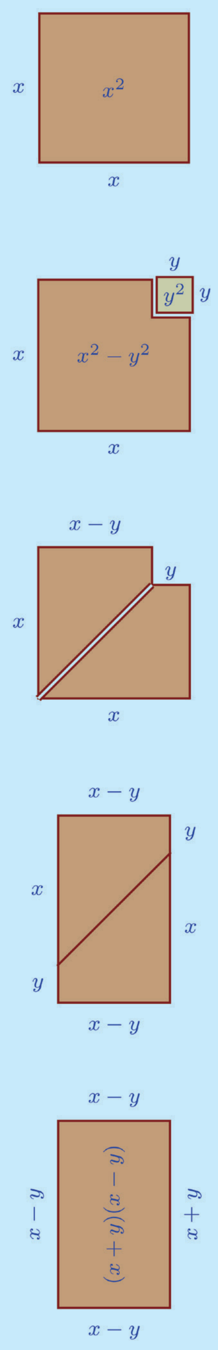
இதில் x ஆக $2, 3, 4, \ldots$ என்றிவ்வாறான எண்ணல் எண்களை எடுத்தால் பின்வருமாறு காணலாம்:

$$1 \times 3 = 2^2 - 1$$
$$2 \times 4 = 3^2 - 1$$
$$3 \times 5 = 4^2 - 1$$

....

....

வேறொரு முறை



இதனை சாதாரண மொழியில் கூறினால்?

அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று எண்ணல் எண்களில் முதல் மற்றும் கடைசி எண்களின் பெருக்கற்பலன், நடுவில் உள்ள எண்ணின் வர்க்கத்தில் இருந்து ஒன்றைக் கழித்ததாகும்.

அடுத்தடுத்துள்ள மூன்று எண்ணல் எண்களில் முதல் மற்றும் கடைசி எண்களின் தொகை, நடுவில் உள்ள எண்ணின் இரண்டு மடங்காகும் என ஏழாம் வருப்பில் கற்றதை நினைவு கூரவும். (**இயற்கணிதம்** என்ற பாடத்தில் **எண்களும் இயற்கணிதமும்** என்ற பகுதி).

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்களை மனக்கணக்காகச் செய்யவும்.

(i) $68^2 - 32^2$ (ii) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ (iii) $3.6^2 - 1.4^2$

(2) இந்தக் கணக்குகளைப் பார்க்கவும்

$$3^2 - 2^2 = 5 = 3 + 2$$

$$4^2 - 3^2 = 7 = 4 + 3$$

$$5^2 - 4^2 = 9 = 5 + 4$$

(i) இதே வரிசையில் மேலும் அடுத்த இரண்டு வரிகளை எழுதுக.

(ii) அதன் பொதுக்கருத்தை இயற்கணித சமன்பாடாக எழுதுக

(iii) இந்தப் பொதுக்கருத்தை சாதாரண மொழியில் எழுதுக

(3) நாட்காட்டியில் ஒன்பது எண்களுள்ள ஒரு சதுரம் எடுத்து நடுவில் உள்ள எண்ணின் இடது வலது, மேல் கீழ் உள்ள எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்.

ஞாயிறு	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

இடது மற்றும் வலது பக்க எண்களின் பெருக்கற்பலனையும், மேல் மற்றும் கீழ் உள்ள எண்களின் பெருக்கற்பலனையும் கணக்கிட்டு, அவற்றின் வித்தியாசத்தையும் கணக்கிடுக:

$$8 \times 10 = 80$$

$$80 - 32 = 48$$

$$2 \times 16 = 32$$

இதனைப் போன்று ஒன்பது எண்களுள்ள வேறு சதுரங்களை எடுத்து இந்தக் கணக்குகளைச் செய்யவும், எல்லா சதுரத்திலும் வித்தியாசம் 48 கிடைப்பதற்கான காரணத்தை, இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விவரிக்கவும்.

(குறிப்பு: நடுவில் உள்ள எண் x என எடுப்பதே வசதி.)

(4) மேலேயுள்ள கணக்கில் அடையாளப்படுத்தியுள்ளதைப் போல நாட்காட்டியின் ஒன்பது எண்களின் சதுரத்தையும், அதன் நான்கு மூலைகளிலும் உள்ள எண்களையும் அடையாளப்படுத்துக.

ஞாயிறு	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

எதிர் மூலைகளில் உள்ள எண் ஜோடிகளைப் பெருக்கி வித்தியாசத்தைக் கணக்கீடு செய்க.

$$15 \times 3 = 45$$

$$45 - 17 = 28$$

$$1 \times 17 = 17$$

இதைப் போன்று ஒன்பது எண்களுள்ள வேறு சதுரங்களை எடுத்து இந்தக் கணக்குகளைச் செய்யவும். எல்லா சதுரங்களிலும் வித்தியாசம் 28 கிடைப்பதற்கான காரணத்தை இயற்கணிம் பயன்படுத்தி விவரிக்கவும்.

(5) ஒரு சதுரத்தின் சுற்றளவு 20 சென்டிமீட்டராகும். ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இந்த சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தை விட 2 சென்டிமீட்டர் நீளம் கூடுதலும், மற்றொரு பக்கத்திற்கு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தை விட 2 சென்டிமீட்டர் நீளம் குறைவுமாகும்.

   (i) செவ்வகத்தின் சுற்றளவு என்ன?

   (ii) சதுரத்தினுடையவும் செவ்வகத்தினுடையவும் பரப்பளவுகள் என்ன?

(6) ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு ஒரு சதுரத்தின் பக்கத்தை விட நீளம் கூடுதலும் மற்றொரு பக்கத்திற்கு இந்த சதுரத்தின் பக்கத்தை விட அதே அளவு நீளம் குறைவும் ஆகும்.

   (i) சதுரத்தினுடையவும் செவ்வகத்தினுடையவும் சுற்றளவுகளைக் குறித்து என்ன கூறலாம்?

   (ii) சதுரம், செவ்வகம் இவற்றில் பரப்பளவு கூடியது எது?

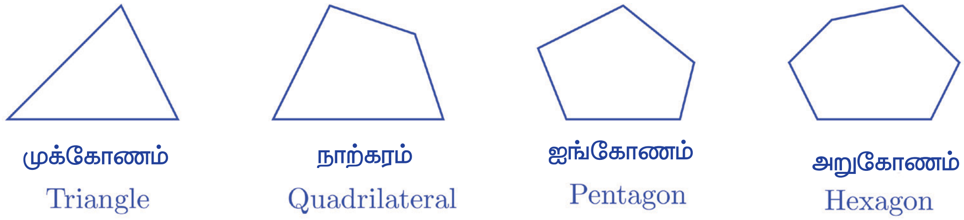
1 ஐ விடப் பெரிய எல்லா ஒற்றை எண்களையும் சில இரட்டை எண்களையும் இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாம் எனப் பார்த்தோமல்லவா. எந்த வகை எண்ணல் எண்களை இரண்டு முழு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுத இயலாதது?

4

பலகோணங்கள்

பெயர்கள்

நேர் கோடுகள் மட்டும் சேர்ந்த பல வடிவங்களைப் பார்த்திருக்கிறீர்களல்லவா.

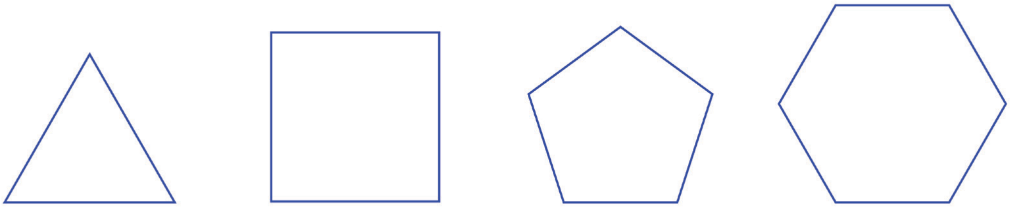


முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்களும், மூன்று உச்சிகளும்;

நாற்கரத்திற்கு பக்கங்களும் உச்சிகளும் நான்காகும்; ஐங்கோணத்திற்கு ஐந்து, அறுகோணத்திற்கு ஆறு.

பக்கங்கள் மற்றும் உச்சிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்து, இதைப் போன்ற எத்தனை வடிவங்கள், வேண்டுமென்றாலும் வரையலாம் அல்லவா. இவற்றின் பொதுவான பெயர் **பலகோணம் (Polygon)** எனப்படும்.

மேலே உள்ள படங்களை மேலும் அழகுபடுத்தலாம்:



இப்போது ஒவ்வொரு பலகோணத்தினுடையவும் பக்கங்கள் சமநீளமும், கோணங்கள் எல்லாம் ஒரே அளவு ஆன இத்தகைய பலகோணங்களை **ஒழுங்கு பலகோணங்கள் (Regular Polygon)** எனக் கூறுவர்.

கோணங்கள்

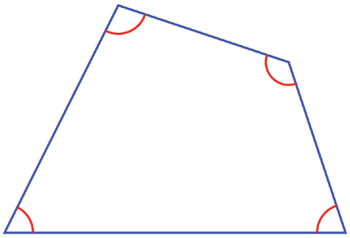
எந்த முக்கோணத்திலும் கோணங்களையெல்லாம் கூட்டினால் $180°$ கிடைக்கும் என ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா? (**இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **முக்கோணக் கணக்கு** என்ற பகுதி).

ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களையும் கூட்டினால்?

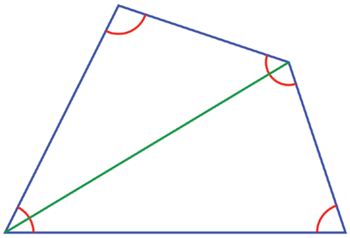
செவ்வகம் எனில் ஒவ்வொரு கோணமும் $90°$; எல்லாம் சேர்ந்து $90° \times 4 = 360°$

எல்லா நாற்கரங்களிலும் இது சரியாகுமா?

இந்த நாற்கரத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்தால் இதன் இரண்டு கோணங்கள் இரண்டாகப் பிரியும்.



விசித்திரமான பலகோணங்கள்

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்

இவற்றை நேர்கோடுகள் மட்டும் பயன்படுத்தி வரையப்பட்டுள்ளன. ஆகையால் இவற்றையெல்லாம் சில நேரங்களில் பலகோணங்களாக ஏற்றுக் கொள்ளலாம். ஆனால் நமது பாடத்தில், உச்சிகள் உள்வாங்கியதோ, பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வதோ ஆன வடிவங்களைப் பலகோணங்கள் என்ற குழுக்களில் உட்படுத்துவதில்லை. நாம் பொதுவாகக் கூற நினைக்கும் பல கருத்துகளும் இவைகளுக்குப் பொருந்தாததே காரணம் ஆகும்.

நாற்கரம் இப்போது இரண்டு முக்கோணங்கள் ஆனது அல்லவா. பிரிந்த கோணங்களின் மேல் பாகங்கள், மேலே உள்ள முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் அல்லவா? கீழேயுள்ள பாகங்கள், கீழே உள்ள முக்கோணத்தினுடையவும்.

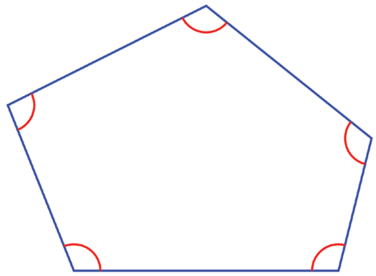
அப்போது இரண்டு முக்கோணங்களினுடையவும் எல்லா கோணங்களையும் கூட்டினால், நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களையும் கூட்டிய தொகையே கிடைக்கும் அல்லவா?

ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடையவும் கோணங்களைக் கூட்டினால் $180°$; இரண்டு முக்கோணங்கள் ஆகும் போது இதன் இரண்டு மடங்கு $180° \times 2 = 360°$

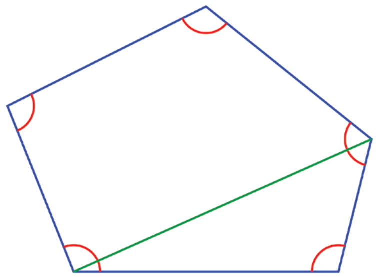
அப்போது என்ன கிடைத்தது?

எந்த நாற்கரத்திலும் எல்லா கோணங்களுடையவும் தொகை $360°$.

இனி ஐங்கோணம் ஆனால்?



இவ்வாறு ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்து பார்ப்போம்:



(எந்தப் பலகோணத்திலும் அடுத்தடுத்து அல்லாத இரண்டு உச்சிகளை இணைக்கும் எல்லா கோடுகளையும் **மூலைவிட்டங்கள்** எனக் கூறுகிறோம்.)

இரண்டு கோணங்கள் இரண்டாகப் பிரிந்தது; ஐங்கோணம் ஒரு நாற்கரமும் ஒரு முக்கோணமும் ஆனது.

பிரிந்த கோணங்களில் கீழேயுள்ள பாகங்கள் முக்கோணத்தின் கோணங்கள் அல்லவா?

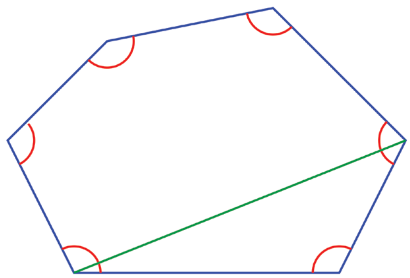
மேலே உள்ள பாகங்கள் நாற்கரத்தின் கோணங்களும். அப்போது நாற்கரம் மற்றும் முக்கோணத்தின் கோணங்களையெல்லாம் கூட்டினால், ஐங்கோணத்தின் ஐந்து கோணங்களையும் கூட்டுவதற்கு சமம் ஆகும்.

நாற்கரத்தின் கோணங்களின் தொகை $360°$

முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180°$

ஐங்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $360° + 180° = 540°$

இதைப் போன்று எந்த அறுகோணத்தினுடையவும் கோணங்களின் தொகையை ஊகிக்கலாமா? உதவிக்கு ஒரு படத்தையும் எடுக்கலாம்:



அறுகோணத்தை ஐங்கோணமும் முக்கோணமும் சேர்ந்த வடிவமாகக் காணலாம் அல்லவா. கோணங்களின் தொகை $540° + 180° = 720°$

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

- பலகோணங்களை முக்கோணம், நாற்கரம், ஐங்கோணம், அறுகோணம் என இவ்வாறு வரிசையாக எடுத்தால், ஒரு பலகோணத்தில் இருந்து அடுத்த பலகோணத்திற்கு மாறும்போது ஒரு உச்சி (ஒரு பக்கமும்) அதிகரிக்கிறது.
- இந்த மாற்றத்தை, மேலும் ஒரு முக்கோணத்தை சேர்த்து வைத்ததாகவும் காணலாம்.

கோணங்களின் தொகை $180°$ கூடும்.

அப்போது, கோணங்களின் தொகையை இவ்வாறு வரிசையாக எழுதலாம்:

	பலகோணம்	பக்கங்கள்	கோணங்களின் தொகை
1	முக்கோணம்	3	$180°$
2	நாற்கரம்	4	$180° + 180° = 180° \times 2$
3	ஐங்கோணம்	5	$(180° \times 2) + 180° = 180° \times 3$
4	அறுகோணம்	6	$(180° \times 3) + 180° = 180° \times 4$
5	எழுகோணம்	....	....
6	எண்கோணம்	....	....

இவ்வாறு பார்க்கும்போது, 10 பக்கங்களுள்ள பலகோணக்தின் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு என்று கூறலாமா?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) முதலில் முக்கோணம், இரண்டாவது நாற்கரம், மூன்றாவது ஐங்கோணம் என இவ்வாறு வரிசையாக எடுத்தால், 10 பக்கங்களுள்ள பலகோணம் (தசகோணம்) எத்தனையாவது இடத்தில் இருக்கும்?

(ii) அப்போது மேலே உள்ள அட்டவணை தொடர்ந்தால், தசகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை, $180°$ இன் எத்தனை மடங்காகும்?

அவ்வாறு 10 பக்கங்களுள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180° \times 8 = 1440°$ எனக் கணக்கிடலாம். எந்தப் பலகோணத்திலும் கோணங்களின் தொகை இவ்வாறு கணக்கிடலாம் அல்லவா.

ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை, பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் இருந்து 2 ஐக் கழித்து $180°$ ஆல் பெருக்கியதாகும்.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி இந்தக் கருத்தை பின்வருமாறு கூறலாம்;

n பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180° \times (n - 2)$

எடுத்துக்காட்டாக 20 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகையை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

$$180° \times (20 - 2) = 180° \times 18$$
$$= (18^2 \times 10)°$$
$$= 3240°$$

மாறாக ஒரு வினா: ஏதேனும் பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 900° ஆகுமா?

எந்த பலகோணத்தினுடையவும் கோணங்களின் தொகை 180° இன் மடங்கு அல்லவா.

900 என்ற எண் 180 என்ற எண்ணின் மடங்காகுமா? அதற்கு 900 த்தை 180 ஆல் வகுத்துப் பார்க்க வேண்டும்.

முதலில் பொதுக் காரணிகளைத் தவிர்க்க வேண்டும். (ஐந்தாம் வகுப்பில் **எண்களுக்குள்ளே** என்ற பாடத்தில் **பொதுக் காரணிகள்** என்ற பகுதி).

900 த்தையும் 180 ஐயும் பின்வருமாறு பிரித்து எழுதலாம்:

$$900 = 9 \times 10 \times 10$$
$$180 = 9 \times 10 \times 2$$

அப்போது

$$900 \div 180 = 10 \div 2 = 5$$

அதாவது

$$900° = 180° \times 5$$

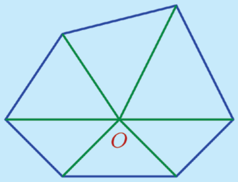
அப்போது கோணங்களின் தொகை 900° ஆன பலகோணம் உள்ளது.

அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள்?

5 + 2 = 7 பக்கங்கள், அல்லவா?

வேறொரு பிரித்தல்

ஒரு பலகோணத்தின் உள்ளேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து உச்சிகளுக்கு கோடுகள் வரைந்தும் அதனை முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.



n பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தை இவ்வாறு பிரித்தால், n முக்கோணங்கள் கிடைக்கும் அல்லவா.
இங்கு கோணங்களின் தொகை $= 180° \times n$.
இந்தக் கோணங்களில் எல்லா முக்கோணங்களினுடையவும் O வில் உள்ள கோணங்களைத் தவிர பிற கோணங்களின் தொகை, பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகைக்குச் சமம் ஆகும். O வில் உள்ள கோணங்களின் தொகை 360° என முன்பு பார்த்தோமல்லவா.
அப்படியானால் பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை
$(180° \times n) - (180° \times 2) = 180° \times (n - 2)$

(1) ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 1980° ஆகும். இதைவிட ஒரு பக்கம் அதிகமாக உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு? ஒரு பக்கம் குறைவான பலகோணத்தில்?

(2) 27 பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?

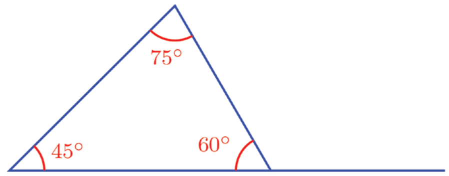
(3) ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 8100° ஆகும். அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் இருக்கும்?

(4) ஏதேனும் பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 1000° ஆகுமா? காரணத்தை விவரிக்கவும்.

(5) 20 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் எல்லா கோணங்களுக்கும் ஒரே அளவாகும். ஒவ்வொன்றினுடையவும் டிகிரி அளவு எவ்வளவு?

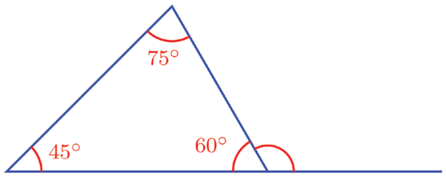
வெளிக்கோணங்கள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் வலது பக்கமாக சற்று நீட்டி வரையப்பட்டுள்ளது.

அப்போது முக்கோணத்தின் வலது உச்சியில், வெளிப்புறமாக ஒரு கோணம் கிடைக்கிறதல்லவா?

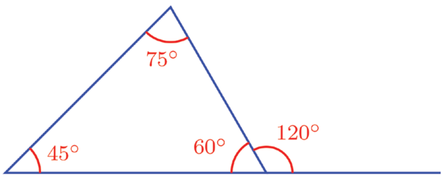


இவ்வாறு ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டும் போது முக்கோணத்திற்கு வெளியே ஒரு மூலையில் உருவாகும் கோணத்தை முக்கோணத்தின் ஒரு **வெளிக்கோணம் (Outer angle)** எனக் கூறப்படுகிறது. அப்போது இந்த உச்சியில் முக்கோணத்தின் உள்ளே இருக்கும் கோணத்தை **உட்கோணம் (Inner angle)** எனக் கூறலாம்.

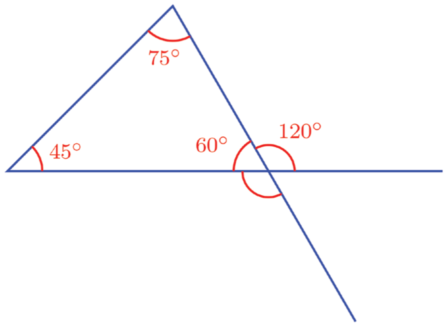
படத்தில் வெளிக்கோணத்தின் அளவு எவ்வளவு?

முக்கோணத்தின் வலது பக்கம், நீட்டிய அடிப்பக்கத்தில் சந்திக்கும் போது இரு பக்கங்களிலும் உருவாகின்ற கோணங்கள் அல்லவா உட்கோணமும் வெளிக்கோணமும். அதனால் இவற்றின் தொகை $180°$ ஆகும். (ஆறாம் வகுப்பில் **கோடுகளும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **கோடுகள் இணையும்** போது என்ற பகுதி).

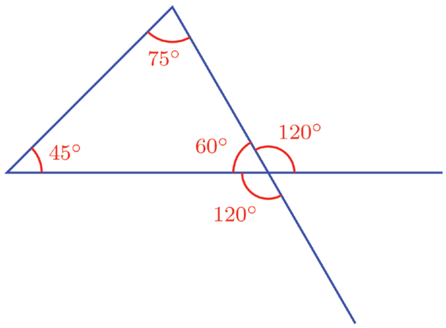
அப்போது வெளிக்கோணம் $180° - 60° = 120°$



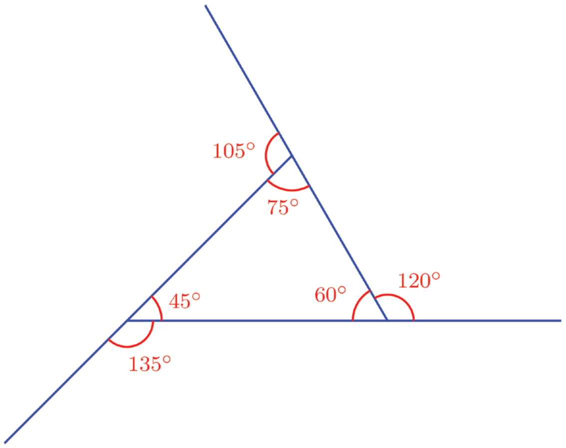
மேலும் முக்கோணத்தின் வலது பக்கம் கீழே நீட்டினால் வலது மூலையில் வேறொரு வெளிக்கோணம் உருவாகும் அல்லவா.



அதுவும் 120° அல்லவா? (ஏன்?)



அதாவது, 180° இல் இருந்து உட்கோணத்தைக் கழித்தால் வெளிக்கோணம் கிடைக்கும்; இதைப் போன்று முக்கோணத்தின் பிற இரண்டு உச்சிகளிலும் ஒவ்வொரு வெளிக்கோணம் வரையலாம் அல்லவா.



எந்த முக்கோணத்திலும் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உள்ள உட்கோணம் மற்றும் வெளிக்கோணம் ஆகியவற்றின் தொகை 180° ஆகும்.

இங்கு வேறொரு கருத்தையும் காணலாம். முக்கோணத்தின் ஏதாவது இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள உட்கோணங்களைக் கூட்டிப் பார்க்கவும்:

எடுத்துக்காட்டாக, $45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

இது மூன்றாவது உச்சியின் வெளிக்கோணம் அல்லவா?

பிற இரண்டு உட்கோணங்களைக் கூட்டிப் பார்க்கவும்.
எந்த இரண்டு உச்சிகளிலும் உள்ள உட்கோணங்களைக் கூட்டினால் மூன்றாவது உச்சியின் வெளிக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா? இது ஏன்?
இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்.

(i) மூன்று உட்கோணங்களினுடையவும் தொகை 180° ஆனதால், இரண்டு உட்கோணங்களின் தொகை, 180° இல் இருந்து மூன்றாவது கோணத்தை கழித்ததாகும்.

(ii) இது மூன்றாவது உச்சியின் வெளிக்கோணத்திற்கு சமம் ஆகும்.

முக்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவை மாற்றினாலும், இதைப் போன்று சிந்திக்கலாம் அல்லவா. அப்போது எந்த முக்கோணத்திலும் இது சரியாகும். அதாவது, முக்கோணத்தின் எந்த இரண்டு உச்சிகளிலும் உள்ள உட்கோணங்களைக் கூட்டினாலும், மூன்றாவது உச்சியின் வெளிக்கோணம் கிடைக்கும்.
இந்தக் கருத்தை பின்வருமாறும் கூறலாம்:

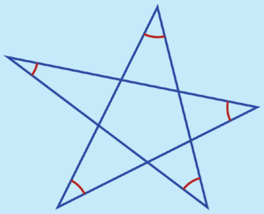
எந்த முக்கோணத்திலும், ஒரு உச்சியிலுள்ள வெளிக்கோணம், பிற இரண்டு உச்சிகளிலும் உள்ள உட்கோணங்களின் தொகைக்கு சமமாகும்.

மேலும் ஒரு கருத்தைப் பார்ப்போம். மூன்று உட்கோணங்களும், மூன்று வெளிக்கோணங்களும் சேர்ந்த ஆறு கோணங்களையும் கூட்டிப் பார்க்கவும். 540° கிடைக்கும் அல்லவா? கோணங்களை மாற்றி வேறொரு முக்கோணம் வரைந்து, ஆறு கோணங்களையும் கூட்டிப் பார்க்கவும். எல்லா முக்கோணங்களிலும் இந்த தொகை 540° ஆவது ஏன்?

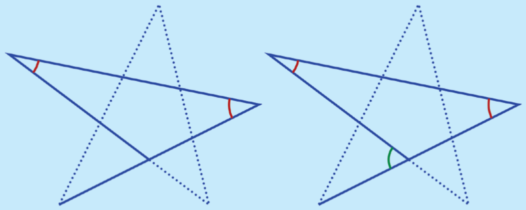
ஆறு கோணங்களையும் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உள்ள உட்கோணத்தினுடையவும், வெளிக்கோணத்தினுடையவும் மூன்று ஜோடிகளாக்கிக் கூட்டிப் பார்க்கவும்:

நட்சத்திரக் கணக்கு

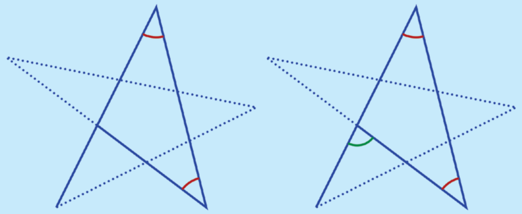
இந்த நட்சத்திரத்தின் ஐந்து உச்சிகளிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகையைக் கணக்கிட வேண்டும்:



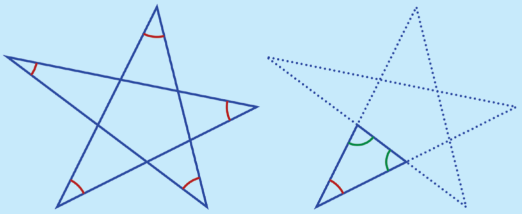
கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் முதலில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தை மட்டும் கருதினால், அதில் அடையாளபடுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்களின் தொகை, இரண்டாவது படத்தில் பச்சை நிறத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணமாகும் எனக் காணலாம்:



இதைப் போன்று பிற இரண்டு உச்சிகளின் கோணங்களின் தொகையை ஒரு கோணமாகப் பார்க்கலாம்:



அவ்வாறு நட்சத்திரத்தின் ஐந்து கோணங்களின் தொகையை, ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் தொகையாகக் காணலாம்.



அவ்வாறு நட்சத்திரத்தின் கோணங்களின் தொகை 180°

(i) ஒவ்வொரு ஜோடியினுடையவும் தொகை 180°

(ii) மூன்று ஜோடிகளினுடையவும் தொகை $180^\circ \times 3 = 540^\circ$

(iii) ஆறு கோணங்களின் தொகை 540°

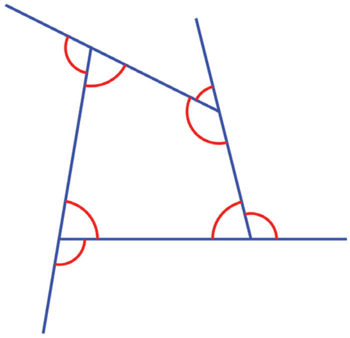
(iv) இதில் உட்கோணங்களின் தொகை 180°

(v) வெளிக்கோணங்களின் தொகை $540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$

முக்கோணங்களின் கோணங்கள் எதுவாக இருந்தாலும், இந்த முறையில் வெளிக்கோணங்களின் தொகை 360° எனக் கிடைக்கும்.

எந்த முக்கோணத்திலும், ஒவ்வொரு உச்சியிலும் ஒரு வெளிக்கோணம் வீதம் எடுத்தால், அவற்றின் தொகை 360° ஆக இருக்கும்.

முக்கோணங்களில் செய்ததைப் போன்று, நாற்கரத்திலும் பக்கங்களை நீட்டி வெளிக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்.



இதில் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உள்ள உட்கோணம் மற்றும் வெளிக்கோணம் ஆகியவற்றின் தொகை 180° அல்லவா?

இந்த நாற்கரத்தின் நான்கு உட்கோணங்கள் மற்றும் நான்கு வெளிக்கோணங்கள் ஆகியவற்றின் மொத்தத்தொகை எவ்வளவு?

முக்கோணத்தில் செய்ததைப் போன்று, ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உள்ள உட்கோணம் மற்றும் வெளிக்கோணம் இவற்றை ஜோடிகளாக்கினால் நான்கு ஜோடிகள்; ஒவ்வொரு ஜோடியினுடையவும் தொகை 180°; மொத்தம் $180^\circ \times 4 = 720^\circ$

இதில் உட்கோணங்களின் தொகை 360°

வெளிக்கோணங்களின் தொகை $720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$

அப்போது நாற்கரங்களிலும், வெளிக்கோணங்களின் தொகை 360° ஆகும்.

ஐங்கோணம் ஆனால்?

படம் வரையாமல் (அல்லது மனதில் ஊகித்துக் கொண்டு) சிந்திக்கலாம். ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உட்கோணம் மற்றும் வெளிக்கோணம் ஆகியவற்றின் தொகை 180°; அவ்வாறு ஐந்து ஜோடிகள். மொத்தம் $180^\circ \times 5$.

இதில் உட்கோணங்களின் தொகை $180^\circ \times (5-2) = 180^\circ \times 3$

வெளிக்கோணங்களின் தொகை

$$(180^\circ \times 5) - (180^\circ \times 3) = 180^\circ \times (5-3) = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

எந்தப் பலகோணத்திலும் இவ்வாறு கணக்கிடலாம் அல்லவா.

பொதுவாக n உச்சிகள் உள்ள பலகோணத்தில், ஒவ்வொரு உச்சியிலும் உள்ள உட்கோணத்தையும் வெளிக்கோணத்தையும் ஜோடியாக எடுத்தால்

மொத்த கோணங்களின் தொகை $180^\circ \times n$

உட்கோணங்களின் தொகை $180^\circ \times (n-2)$

வெளிக்கோணங்களின் தொகை

$$(180^\circ \times n) - (180^\circ \times (n-2)) = 180^\circ \times (n-(n-2)) = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

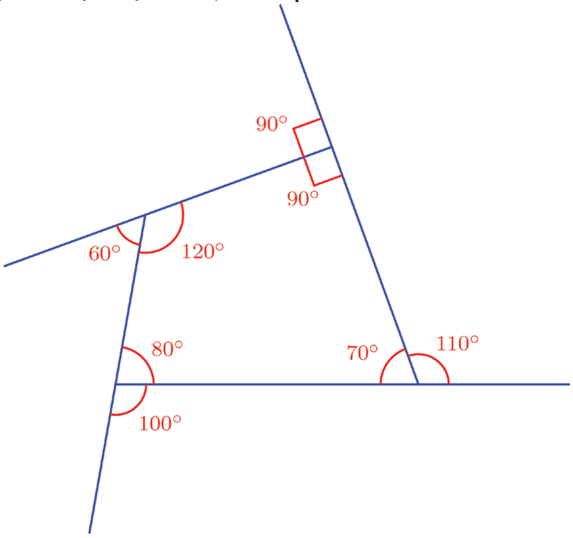
(ஏழாம் வகுப்பில் **கணக்கில் சுருக்கெழுத்து** என்ற பாடத்தில் **கூட்டலும் கழித்தலும்** என்ற பகுதி)

அதாவது,
எந்த பலகோணத்திலும் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் ஒரு வெளிக்கோணம் வீதம் எடுத்துக் கூட்டினால் 360° கிடைக்கும்.

இதைச் சற்று சுருக்கி, பின்வருமாறும் கூறலாம்;

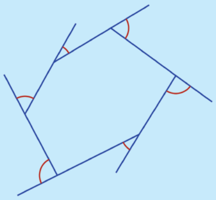
எந்தப் பல கோணத்திலும்,
வெளிக்கோணங்களின் தொகை 360° ஆகும்.

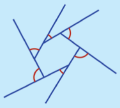
இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கு செய்வோம்:
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்;

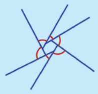


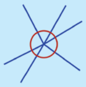
மீண்டும் மீண்டும் சுருங்கினால்

ஒரு பலகோணத்தின் கோணங்கள் மாறாமல், பக்கங்களைப் படிப்படியாகச் சுருக்கலாம்.

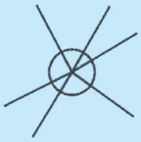








இறுதியாக பலகோணமே இல்லாமல் ஒரு புள்ளி மட்டும் இருந்தால்?
பலகோணத்தின் வெளிக்கோணங்களின் தொகை என்ன ?



ஏதேனும் இரண்டு உச்சிகளின் வெளிக்கோணங்களின் தொகையையும், பிற இரண்டு உச்சிகளின் உட்கோணங்களின் தொகையையும் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக, கீழேயுள்ள இரண்டு வெளிக்கோணங்களை எடுத்தால், தொகை

$$100° + 110° = 210°$$

மேலேயுள்ள இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள உட்கோணங்களின் தொகை

$$120° + 90° = 210°$$

இதைப் போன்று பிற ஜோடிகளை எடுத்துப் பார்க்கவும். தொகைகள் சமமாகுமா?

பிற நாற்கரங்களிலும் இது சரியாகுமா?

நாற்கரத்தின் உட்கோணங்கள் $a°$, $b°$, $c°$, $d°$ என எடுக்கலாம். அப்போது வெளிக்கோணங்கள் $180° - a°$, $180° - b°$, $180° - c°$, $180° - d°$

இரண்டு உச்சிகளின் வெளிக்கோணங்கள் $180° - a°$ உம் $180° - d°$ உம் எடுத்துப் பார்க்கவும்;

அவற்றின் தொகை

$$(180° - a°) + (180° - d°) = 360° - (a° + d°)$$

நாற்கரத்தின் எல்லா உட்கோணங்களினுடையவும் தொகை 360° அல்லவா.

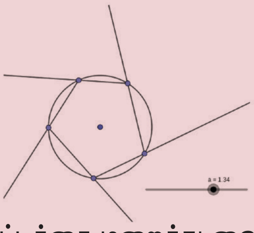
$$a° + b° + c° + d° = 360°$$

அப்போது

$$360° - (a° + d°) = b° + c°$$

அதாவது, இரண்டு வெளிக்கோணங்களின் தொகை, பிற இரண்டு உச்சிகளின் உட்கோணங்களின் தொகையாகும். கோணங்களின் வரிசையை மாற்றினாலும் இதுவே கிடைக்கும் அல்லவா.

min 0.01, max 2, increment = 0.01 ஆகும் விதம் a என்ற ஸ்லைடரை உருவாக்கவும். ஆரம் a ஆன ஒரு வட்டம் வரைந்து ஐந்து அல்லது ஆறு புள்ளிகள் வைக்கவும். இந்தப் புள்ளிகளைப் படத்தில் காண்பது போல் இணைக்கவும். (ray tool பயன்படுத்தலாம்.)



இனி வட்டத்தை மறைத்து வைக்கவும். Angle எடுத்து வெளிக்கோணங்கள் அடையாளப்படுத்தவும். a என்ற எண்ணை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

எந்த நாற்கரத்திலும், இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள வெளிக்கோணங்களின் தொகை பிற இரண்டு உச்சிகளின் உட்கோணங்களின் தொகைக்கு சமமாகும்.

முக்கோணங்களில் ஒரு உச்சியிலுள்ள வெளிக்கோணம் பிற இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள உட்கோணங்களின் தொகைக்கு சமமாகும் எனப் பார்த்தோம். நாற்கரத்தின் இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள வெளிக்கோணங்களின் தொகை பிற இரண்டு உச்சிகளிலுள்ள உட்கோணங்களின் தொகைக்கு சமம் எனவும் புரிந்துகொண்டோம்.

அப்போது இனி ஆய்வு செய்ய வேண்டிய சில காரியங்கள் உள்ளன:

(i) ஐங்கோணங்களில் வெளிக்கோணங்கள் மற்றும் உட்கோணங்களுக் கிடையேயும் இதைப் போன்று ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா?

(ii) அறுகோணங்களில்?

(iii) பலகோணங்களுக்கெல்லாம் பொருந்துகின்ற இதைப் போன்ற பொதுக் கருத்து உள்ளதா?

(1) 18 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் எல்லா உட்கோணங்களும் சமமாகும்.
   (i) அதன் ஒவ்வொரு வெளிக்கோணமும் எத்தனை டிகிரியாகும்?
   (ii) அதன் ஒவ்வொரு உட்கோணமும் எத்தனை டிகிரியாகும்?

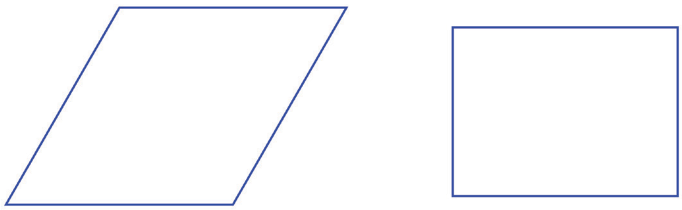
(2) (i) ஒரு பலகோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் ஒரு வெளிக்கோணம் வீதம் எடுத்து கூட்டிக் கிடைக்கும் தொகையும், எல்லா உட்கோணங்களினுடைவும் தொகையும் சமமான பலகோணம் எது?
   (ii) வெளிக்கோணங்களின் தொகை உட்கோணங்களின் தொகையின் இரண்டு மடங்காகும் பலகோணம் எது?
   (iii) வெளிக்கோணங்களின் தொகை உட்கோணங்களின் தொகையின் பாதியாகும் பலகோணம் எது?
   (iv) வெளிக்கோணங்களின் தொகை உட்கோணங்களின் தொகையின் மூன்றில் ஒன்றாகும் பலகோணம் எது?

ஒழுங்கு பலகோணங்கள்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளம் எனில் கோணங்களுக்கும் ஒரே அளவாகும் என **சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் கற்றோம் அல்லவா; (**இரு சமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி). மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கெல்லாம் ஒரே அளவு எனில், பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும் எனக் கண்டோம்.

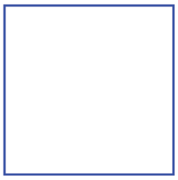
ஆனால் பிற பலகோணங்களில், பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமானதால் கோணங்களுக்கு ஒரே அளவாகும் என்பதில்லை; கோணங்கள் ஒரே அளவானால், பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளம் ஆக வேண்டும் என்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சாய்வுசதுரத்தில் பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமாகும்; கோணங்கள் சமமாக வேண்டுமென்பதில்லை. ஒரு செவ்வகத்தில் கோணங்கள் எல்லாம் செங்கோணங்களாகும்; பக்கங்கள் சமமாக வேண்டுமென்பதில்லை.



சதுரமானால்?

பக்கங்களும் சமம் கோணங்களும் சமம்.



பாடத்தின் முதல் பகுதியில் கூறியதைப்போல், பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமும், கோணங்களுக்கெல்லாம் ஒரே அளவும் உள்ள பலகோணங்கள் ஒழுங்கு பலகோணங்கள் எனக் கூறப்படுகிறது. n பக்கங்கள் உள்ள பலகோணத்தின் கோணங்களின் தொகை $180° \times (n-2)$ ஆகும் எனவும், வெளிக்கோணங்களின் தொகை $360°$ ஆகும் எனவும் கற்றோம் அல்லவா. ஒழுங்கு பலகோணத்தில் கோணங்களுக்கெல்லாம் ஒரே அளவாகும் அல்லவா. எனவே வெளிக்கோணங்களுக்கும் ஒரே அளவாகும் (ஏன்?) அப்போது ஒழங்கு பலகோணங்களின் ஒவ்வொரு உட்கோணம் மற்றும் வெளிக்கோணத்தின் அளவுகளைக் கணக்கிடலாம்.

***n* பக்கங்கள் உள்ள ஒரு ஒழுங்கு பலகோணத்தில்**

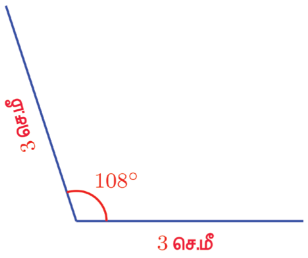
- **உட்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும்** $180° \times \frac{n-2}{n}$
- **வெளிக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும்** $360° \times \frac{1}{n}$

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தில் உட்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும்

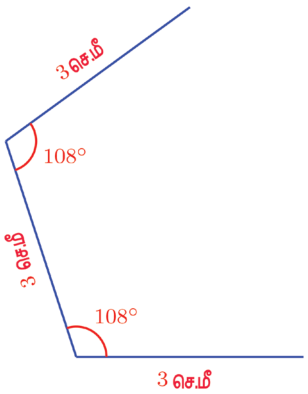
$$180° \times \frac{3}{5} = 108°$$

அப்போது எல்லாப் பக்கங்களின் நீளமும் 3 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரைவது எவ்வாறு ?

முதலில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, அதன் ஒரு முனையில் $108°$ சாய்வில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு வரையவும்.

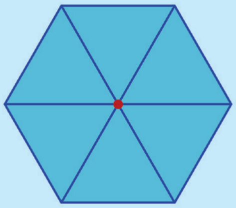


இனி இரண்டாவது கோட்டுடன் $108°$ சாய்வில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு வரையவும்.



சேர்த்து வைக்கலாம்

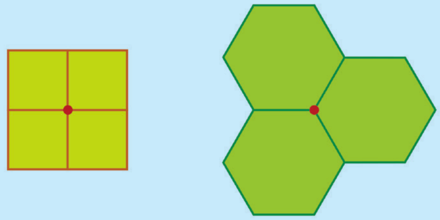
படத்தில் 6 சமமான சமபக்க முக்கோணங்கள் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி சேர்த்து வைத்திருப்பதைப் பார்க்கவும்.



இதைப் போன்று வேறு எந்தெந்த சமமான ஒழுங்கு பலகோணங்களை ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி இவ்வாறு சேர்த்து வைக்கலாம்.

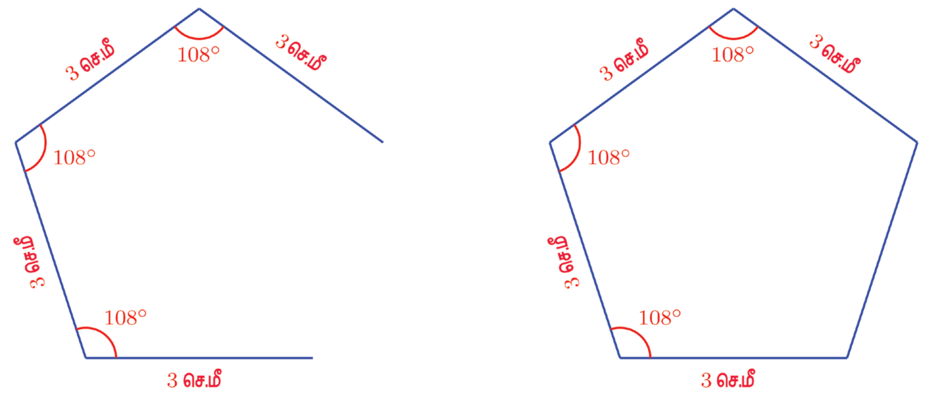
ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணம் $360°$ அல்லவா. சமமான ஒழுங்கு பலகோணங்கள் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றிலும் சேர்த்து வைக்க பலகோணத்தின் கோணஅளவு 360 இன் காரணியாக இருக்க வேண்டும்.

படத்தைப் பார்க்கவும்.



இனி ஏதேனும் ஒழுங்கு பலகோணங்கள் இருக்கின்றனவா? ஒழுங்கு பலகோணங்கள் இல்லையெனில்?

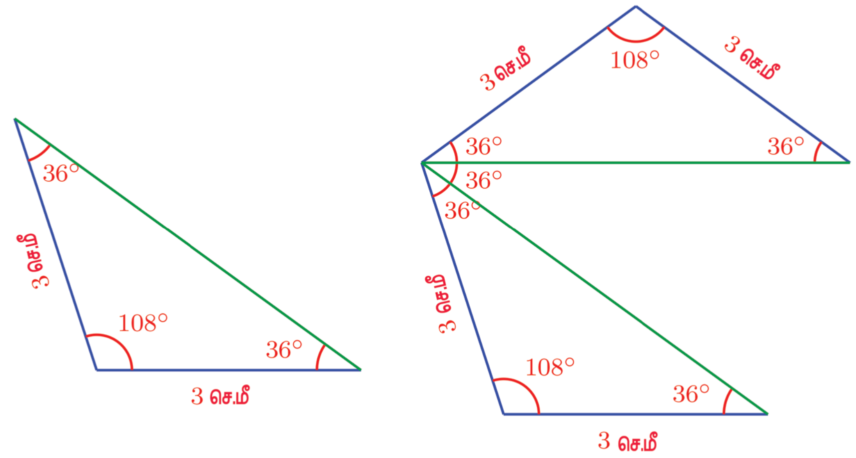
இந்தக் கோட்டுடன் 108° சாய்வில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு வரையவும். இதன் முனைப் புள்ளியையும், முதல் கோட்டின் முனைப்புள்ளியையும் இணைக்கவும்.



ஐங்கோனமானது; ஒழுங்கு ஐங்கோணமாகுமா?

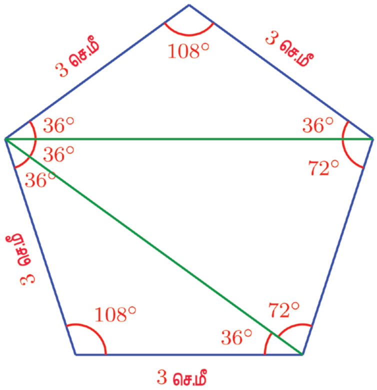
கடைசியாக வரைந்த கோட்டின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர் எனவும், கடைசியில் உருவான இரண்டு கோணங்கள் 108° எனவும் எவ்வாறு உறுதிப்படுத்தலாம்?

கோணங்களைக் குறித்து முதலில் பார்க்கலாம். முதல் இரண்டு கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு ஒரு இருசமபக்க முக்கோணமும், மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு வேறொரு இரு சமபக்க முக்கோணமும் வரையலாம் அல்லவா. அவற்றின் கோணங்களைக் கணக்கிடலாம்:



இந்த முக்கோணங்களின் இரண்டு (நீலம்) பக்கங்களின் நீளமும் (3 சென்டிமீட்டர்) அவை இணையும் கோணமும் (108°) சமமாகும். அப்போது அவற்றின் மூன்றாவது (பச்சை) பக்கங்களின் நீளமும் சமமாகும். (**சமமுக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு பக்கங்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது கடைசியில் வரைந்த கோடு, வேறொரு இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கமாகும். அதன் கோணங்களையும் கணக்கிடலாம்:



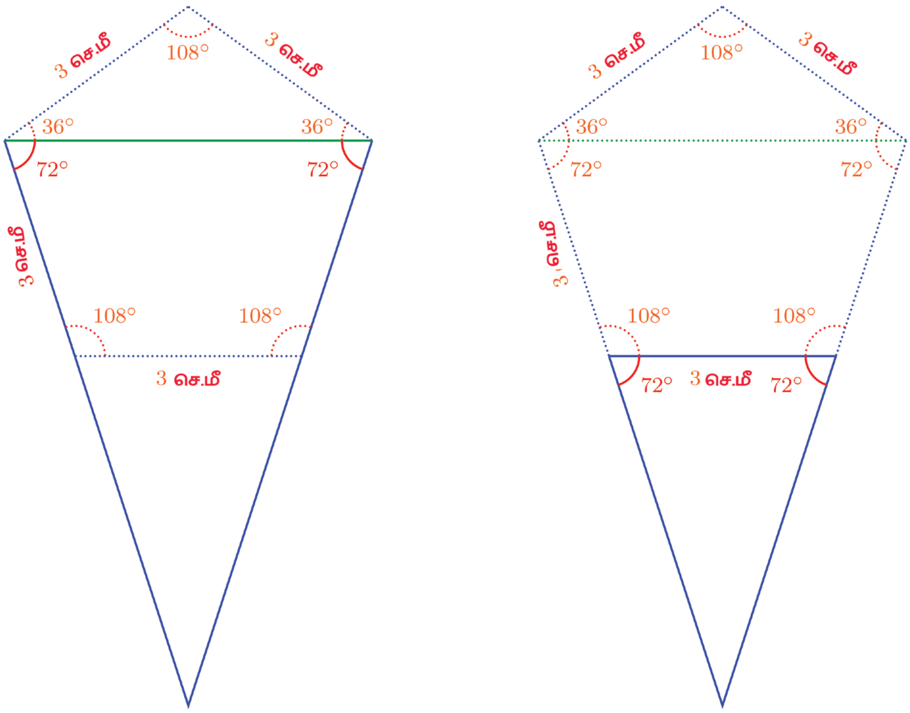
கடைசியில் உருவான இரண்டு கோணங்களும் $36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$ எனக் கிடைத்தது அல்லவா?

இனி இறுதிக் கோட்டின் நீளமும் 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும் எனக் காண்பதற்கு, ஐங்கோணத்தின் இடது மற்றும் வலது பக்கங்களை நீட்டி சந்திக்கச் செய்யவும். அப்போது இரண்டு இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் கிடைக்கும் (எவ்வாறு?)

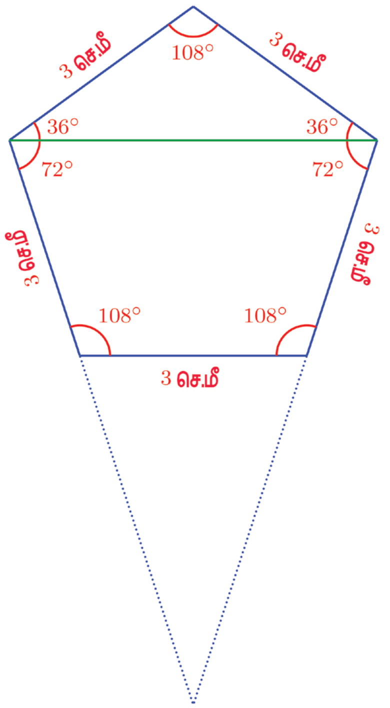
கவராயம்

செங்கோணமானியோ, கோணமானியோ பயன்படுத்தி கோணங்களை அளக்காமல், கவராயம் பயன்படுத்தியும் ஒழுங்கு பலகோணங்களை வரையலாம். இவ்வாறு சமபக்க முக்கோணம், சதுரம் ஒழுங்கு அறுகோணம் வரைவதை நாம் பல வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா.

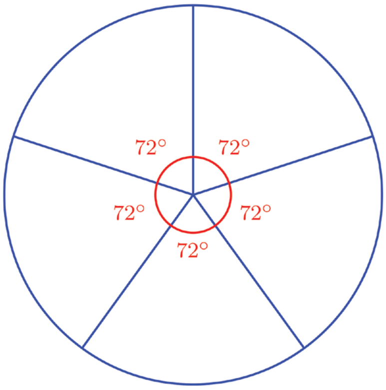
கவராயம் பயன்படுத்தி ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரைய பல வழிகள் உள்ளன. ஒரு எளிய வழிமுறை. www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pentagon Construction.shtml என்ற இணையதளப் பக்கத்தில் உள்ளது. கவராயமும் அளவுகோலும் மட்டும் பயன்படுத்தி 17 பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம் வரையலாம் என்று புகழ்பெற்ற கணிதமேதையான கௌஸ் தனது பத்தொன்பதாம் வயதில் நிறுவினார். இதைப் பற்றிய கூடுதல் தகவல்கள் en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon என்ற இணையதளப் பக்கத்தில் உள்ளது.

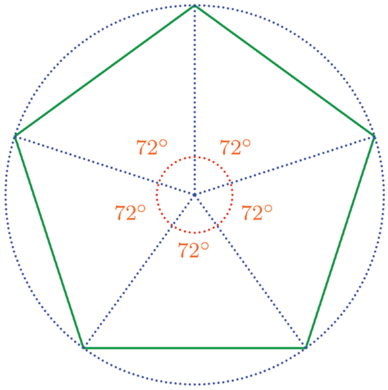


பெரிய முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்களின் நீளத்தில் இருந்து, சிறிய முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்களின் நீளத்தைக் கழித்தால் கிடைக்கும் எண்களும் சமமாக வேண்டும் அல்லவா. இடது பக்கங்களின் நீளத்தைக் குறைத்தால் 3 சென்டிமீட்டர் கிடைக்கும்; அப்போது வலது பக்கங்களின் நீளத்தைக் குறைத்தாலும் 3 சென்டிமீட்டர் கிடைக்கும்:



ஒழுங்கு ஐங்கோணம் வரைவதற்கு வேறொரு முறையும் உள்ளது. ஒரு வட்டம் வரைந்து, வட்டமையத்தில் $360° \times \frac{1}{5} = 72°$ வீதம் உள்ள 5 கோணங்களை வரையவும்:





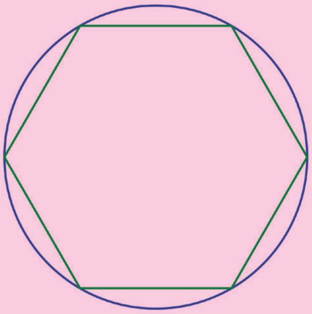
இந்த ஐங்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமும், கோணங்களுக்கெல்லாம் ஒரே அளவும் ஆவதற்கான காரணம் என்ன?

இவ்வாறு வரையும் போது உள்ள பிரச்சனை, பக்கங்களின் நீளம் 3 செண்டிமீட்டராவதற்கு வட்டத்தின் ஆரம் என்னவாக இருக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிடுவது அவ்வளவு எளிதல்ல என்பதாகும்.

(1) (i) பக்கங்களின் நீளம் சமமானதும், கோணங்களின் அளவு வேறுபட்டதுமான ஒரு அறுகோணம் வரையவும்.

(ii) கோணங்கள் எல்லாம் சமமானதும், பக்கங்களின் நீளம் வேறுபட்டதுமான ஒரு அறுகோணம் வரையவும்.

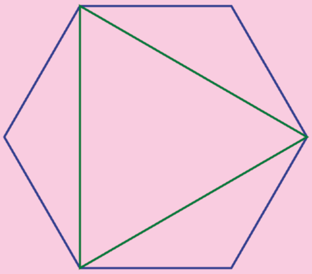
(2) படத்தில் உச்சிகள் எல்லாம் வட்டத்தில் உள்ள ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம் தரப்பட்டுள்ளது. அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு சமமாகும் என நிரூபிக்கவும்.



(3) பக்கங்களின் நீளம் 3 செண்டிமீட்டரான ஒழுங்கு எண்கோணம் (எட்டு பக்கங்கள் உள்ள பலகோணம்) வரையவும்.

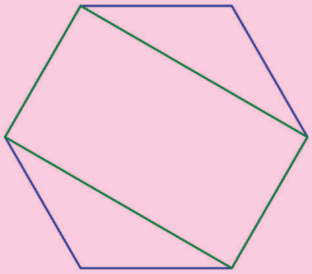
(4) 3 செண்டிமீட்டர் ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்து, உச்சிகள் எல்லாம் இந்த வட்டத்தில் ஆகுமாறு ஒழுங்கு எண்கோணம் வரையவும்.

(5) படத்தில் ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒன்றுவிட்ட உச்சிகளை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது:



இது ஒரு சமபக்க முக்கோணமா? ஏன்?

(6) படத்தில் ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் நான்கு உச்சிகளை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



இந்த நாற்கரம் செவ்வகமா? ஏன்?

(7) 15 பக்கங்கள் உள்ள ஒரு ஒழுங்கு பலகோணத்தின் ஒவ்வொரு உட்கோணத்தையும், வெளிக்கோணத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(8) ஒரு ஒழுங்கு பலகோணத்தின் ஒரு வெளிக்கோணம் 20° எனில் அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன?

(9) ஒரு ஒழுங்கு பல கோணத்தின் ஒரு உட்கோணம் 168° எனில் அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன?

5

சமன்பாட்டுத் தீர்வு

கூட்டலும் கழித்தலும்

சுஹறா பணப்பெட்டியைத் திறந்து எண்ணிப் பார்க்கிறாள். "எத்தனை ரூபாய் உள்ளது?" அம்மா கேட்டாள். "ஏழு ரூபாய் கூடத் தந்தால் ஐம்பது ரூபாயாகும்". சுஹறாரா விருப்பத்தைக் கூறினாள். சுஹறாவின் பணப்பெட்டியில் எத்தனை ரூபாய் உள்ளது?

7 ரூபாய் கூட்டினால் 50 ரூபாயாகும். அப்போது பெட்டியிலுள்ளது 50 ஐ விட 7 குறைவு.

$$50 - 7 = 43$$

(1) "ஆறு மதிப்பெண் கூடுதல் கிடைத்திருந்தால்" கணிதத் தேர்வில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண் கிடைத்திருக்கும் என ராஜன் வருத்தப்பட்டான். கிடைத்த மதிப்பெண் என்ன?

(2) "5 வருடத்திற்குப் பிறகு, 18 வயதாகும், ஓட்டுப் போடலாம்", லிஸி கணக்கிட்டாள். லிஸியின் தற்போதைய வயது என்ன?

(3) 123 ஐ 321 ஆக மாற்ற எத்தனை கூட்ட வேண்டும்?

(4) 432 ஐ 234 ஆக மாற்ற எத்தனை கழிக்க வேண்டும்?

வேறொரு கணக்கு:

உண்ணிக்கு விஷூ கை நீட்டம் கிடைத்ததிலிருந்து 8 ரூபாய் எடுத்து ஒரு பேனா வாங்கினான். மீதி 42 ரூபாய் உள்ளது. விஷூ கைநீட்டம் கிடைத்த ரூபாய் எத்தனை?

8 ரூபாய் குறைந்த போது 42 ரூபாய் ஆனது. அப்போது கைநீட்டம் கிடைத்தது, 42 ஐ விட8 கூடுதல்:

$$42 + 8 = 50$$

(1) கோபாலன் கடைக்கு ஒரு குலை வாழைப்பழம் வாங்கினான். அதில் அழுகிய 7 பழங்களை மாற்றிய போது 46 பழங்கள் இருந்தன எனில் குலையில் எத்தனை பழங்கள் இருந்திருக்கும்?

(2) விமலா 163 ரூபாய்க்கு பொருட்கள் வாங்கினாள். 337 ரூபாய் மீதி உள்ளது. விமலாவிடம் எவ்வளவு ரூபாய் இருந்திருக்கும்?

(3) எந்த எண்ணிலிருந்து 123 ஐக் கழித்தால் 321 கிடைக்கும்?

பெருக்கலும் வகுத்தலும்

ஒரு முதலீட்டுத் திட்டத்தில் முதலீடு செய்த தொகை ஆறு வருடங்களில் இரண்டு மடங்காகும். கடைசியில் பத்தாயிரம் ரூபாய் கிடைக்க இப்பொழுது எவ்வளவு ரூபாய் முதலீடு செய்ய வேண்டும்?

முதலீட்டு தொகையின் இரண்டு மடங்கு 10000; அப்போது மூதலீட்டு தொகை 10000 இன் பாதி, 5000.

வியாபாரத்தின் லாபத்தை நான்கு பேர் சமமாக பங்கிட்ட போது ஜோஸிற்கு 1500 ரூபாய் கிடைத்தது. மொத்த லாபம் எத்தனை ரூபாய்?

லாபத்தின் $\frac{1}{4}$ பாகம் 1500 ஆகும்; அப்போது மொத்த லாபம் 1500 இன் 4 மடங்கு: $1500 \times 4 = 6000$.

(1) ஒரு நிறுவனத்தின் மேலாளரின் சம்பளம் அலுவலக உதவியாளரின் சம்பளத்தின் ஐந்து மடங்கு ஆகும். மேலாளருக்கு மாதம் 75000 ரூபாய் சம்பளம் கிடைக்கிறது எனில் அலுவலக உதவியாளருக்கு மாதம் எத்தனை ரூபாய் கிடைக்கும்? ?

(2) ஓர் உல்லாசப் பயணம் சென்றவர்கள், மொத்தம் செலவான 12500 ரூபாயை சமமாகப் பங்கிடத் தீர்மானித்தனர்; ஒவ்வொருவரும் 2500 ரூபாய் கொடுக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிட்டனர். எனில் உல்லாசப் பயணம் சென்றவர்கள் எத்தனை பேர்?

(3) ஓர் எண்ணை 12 ஆல் பெருக்கிய போது 756 கிடைத்தது. பெருக்கப்பட்ட எண் எது?

(4) ஓர் எண்ணை 21 ஆல் வகுத்த போது 756 கிடைத்தது. வகுக்கப்பட்ட எண் எது?

பலவகை மாற்றம்

இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்:

இரண்டு நோட்டு புத்தகங்களும், ஆறு ரூபாய்க்கு ஒரு பேனாவும் வாங்கிய போது 46 ரூபாய் செலவானது. ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை என்ன?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம். மேலும் 6 ரூபாய்க்கு பேனா வாங்கிய போது தான் 46 ரூபாயானது. பேனா வாங்காமலிருந்தால்?

40 ரூபாய் ஆகியிருக்கும்.

இந்த 40 ரூபாய் இரண்டு நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலையல்லவா. அப்போது ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை 20 ரூபாய்.

இனி திருப்பிப் பார்த்தால்?

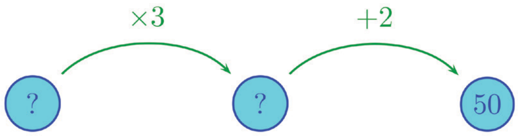
20 ரூபாய் விலையுள்ள இரண்டு நோட்டு புத்தகங்களுக்கு 40 ரூபாய், பேனாவிற்கு 6 ரூபாய்;

மொத்தம் 46 ரூபாய்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஓர் எண்ணின் மூன்று மடங்குடன் இரண்டு கூட்டிய போது 50 ஆனது. எண் எது?

தெரியாத ஓர் எண்ணை முதலில் 3 ஆல் பெருக்கி, பின்பு 2 கூட்டிய போது 50 ஆனது.

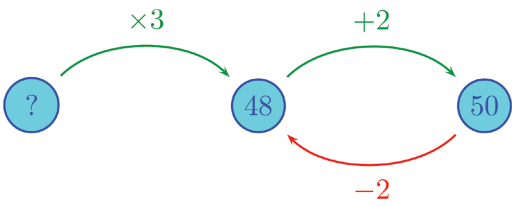


பழங்காலக் கணிதம்

சுமார் பி.சி.இ மூவாயிரம் ஆண்டிலேயே எகிப்தியர்கள் பல்வேறு கருத்துகளை எழுதிப் பாதுகாத்து வைத்திருந்தனர். பப்பைரஸ் என்ற தாவரத்தின் தண்டுகளிலிருந்து உருவாக்கிய காகிதத்தில் எழுதினர். இத்தகைய ஆவணங்களை தொல்பொருள் ஆராய்ச்சியாளர்கள் கண்டுபிடித்தனர். அத்தகைய ஆவணங்களே பப்பைரஸ் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

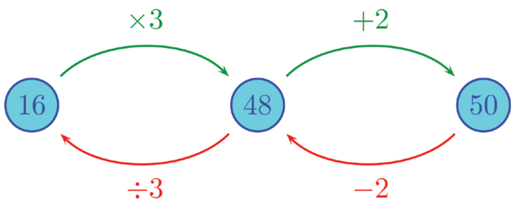
எகிப்தில் இத்தகைய ஒரு பப்பைரஸில் கணித பிரச்சனைகள் மற்றும் அவற்றைத் தீர்க்கும் முறைகளும் விவாதிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இது பி.சி.இ. 1650 இல் எழுதப்பட்டதாக மதிப்பிடப்படுகிறது. ஆரம்பத்தில் அதை எழுதியவர் தனது பெயரை ஆமோஸ் என்றும் 200 ஆண்டுகள் பழமையான ஆவணத்திலிருந்து நகல் எடுத்தார் என்றும் கூறினர். பிரிட்டீஷ் அருங்காட்சியகத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள இந்த ஆவணம் ஆமோஸால் பப்பைரஸ் எனவும் கூறப்படுகிறது. (இதை கண்டுபிடித்தது அலெக்டாண்டர் ரின்ட் என்ற ஆராட்சியாளர் ஆனதால் இதற்கு ரின்ட் பப்பைரஸ் என்று கூறுகிறோம்.) இதில் எண்கள் மற்றும் வடிவங்கள் பற்றிய பிரச்சனைகள் விவாதிக்கப்படுகிறது.

தொடங்கிய எண் திரும்பக் கிடைக்க என்னென்ன செய்ய வேண்டும்?
இறுதி 2 கூட்டிய போதல்லவா 50 ஆனது; அப்போது அதற்கு முன் $50 - 2 = 48$ ஆக இருந்தது.



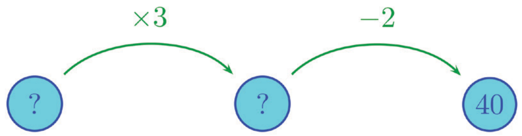
இனி 48 லிருந்து, தொடங்கிய எண்ணை அடைவது எவ்வாறு?

3 ஆல் பெருக்கிய போது 48 ஆனது. அப்போது தொடங்கிய எண் $48 \div 3 = 16$

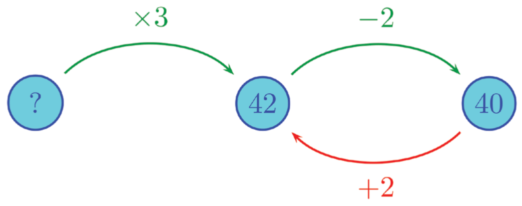


இப்போது செய்த கணக்கை இவ்வாறு மாற்றினால்?

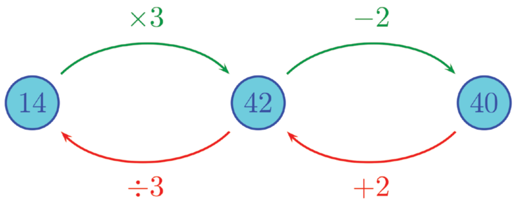
ஓர் எண்ணின் மூன்று மடங்கிலிருந்து இரண்டைக் கழித்தபோது 40 கிடைத்தது எனில் எண் எது?



இங்கு கடைசியாக 2 கழிப்பதற்கு முன்பு உள்ள எண் $40 + 2 = 42$;



இது 3 ஆல் பெருக்கிய போது கிடைத்ததாகும்; அப்போது அதற்கு முன்பு $42 \div 3 = 14$ அதாவது, தொடங்கிய எண் 14.



இவ்வாறான கணக்குகளை இனி மனக்கணக்காகச் செய்யலாமல்லவா.
இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

ஓர் எண்ணுடன் 2 ஐக் கூட்டி, 3 ஆல் பெருக்கிய போது 60 கிடைத்தது எனில் எண் எது?
இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) இறுதியாக 3 ஆல் பெருக்கிய போது தான் 60 கிடைத்தது; அப்போது அதற்கு முன்பு $60 \div 3 = 20$

(ii) முதலில் 2 கூட்டியபோது தான் 20 கிடைத்தது; அப்போது தொடங்கிய எண் $20 - 2 = 18$

(1) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 50 மீட்டரும், ஒரு பக்கம் 5 மீட்டருமாகும். அடுத்த பக்கம் எத்தனை மீட்டர்?

(2) அனிதாவும் தோழிகளும் பேனா வாங்கினார்கள். 5 பேனாக்கள் சேர்த்து வாங்கிய போது மொத்த விலையிலிருந்து மூன்று ரூபாய் குறைவாகக் கிடைத்தது. அவர்களுக்கு 32 ரூபாய் செலவானது. ஒவ்வொன்றாக வாங்கியிருந்தால், ஒவ்வொரு பேனாவிற்கும் எத்தனை ரூபாய் வீதம் கொடுக்க வேண்டும்?

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகளிலெல்லாம் ஓர் எண்ணில் சில செயல்கள் செய்து விடைகள் கூறப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) இரண்டு மடங்குடன் மூன்று கூட்டிய போது 101

(ii) மூன்று மடங்குடன் இரண்டு கூட்டிய போது 101

(iii) இரண்டு மடங்கிலிருந்து மூன்று கழித்த போது 101

(iv) மூன்று மடங்கிலிருந்து இரண்டு கழித்த போது 101

(4) ஓர் எண்ணை 6 ஆல் பெருக்கி 4 கூட்டிய போது 100 கிடைத்தது. எண் எது?

(5) ஓர் எண்ணுடன் 6 ஐக் கூட்டி 4 ஆல் பெருக்கிய போது 100 கிடைத்தது. எண் எது?

மடங்கும் பாகமும்

ஒரு சிறிய கணக்கு:

> கோபுவிற்கு 3 நோட்டுப் புத்தகங்களும், தங்கை மீனாவிற்கு 2 நோட்டுப் புத்தகங்களும் வாங்கிய போது 100 ரூபாயானது. ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை என்ன?

மொத்தம் வாங்கியது 5 அல்லவா. மொத்த விலை 100 ரூபாய்.

எனவே ஒன்றின் விலை $100 \div 5 = 20$

இந்தக் கணக்கில், நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை என்ற எண்ணை மட்டும் பயன்படுத்திக் கூறினால்?

> ஓர் எண்ணின் 3 மடங்கும் 2 மடங்கும் கூட்டிய போது 100 ஆனது. எண் எது?

எந்த எண்ணினுடையவும் 3 மடங்கும் 2 மடங்கும் கூட்டினால் 5 மடங்கு ஆகுமல்லவா?

அப்போது, எண்ணின் 5 மடங்கு 100; எண் 100 இன் $\frac{1}{5}$ பாகம், 20.

எண்கள் மட்டும் பயன்படுத்தி வேறொரு கணக்கு:

> ஓர் எண்ணின் 3 மடங்குடன் 10 கூட்டிய போது, எண்ணின் 5 மடங்கானது. எண் எது?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) 3 மடங்கைவிட 10 கூடுதல் 5 மடங்கு

(ii) 5 மடங்கு 3 மடங்கு இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 10

(iii) எண்ணின் 2 மடங்கு 10

(iv) எண், 10 இன் பாதி 5

எண் சுழற்சி

ஓர் எண்ணுடன் 2 ஐக் கூட்டிய தொகை தெரியுமெனில், எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க 2 ஐக் கழிக்கவும். எண்ணிலிருந்து 2 ஐக் கழித்தது தெரியுமென்றால்? எண் திரும்பக் கிடைக்க 2 ஐக் கூட்டவும். இதுபோல எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கி கிடைக்கும் பெருக்கற் பலனிலிருந்து எண் கிடைக்க 2 ஆல் வகுக்கவும், வகுத்தல் பலனிலிருந்து எண் கிடைக்க பெருக்கவும் அல்லவா செய்ய வேண்டியது.

இந்த முறையைக் குறித்து சி.இ. பன்னிரண்டாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த பாரதக் கணித மேதை பாஸ்கராச்சாரியார் தனது **லீலாவதி** என்ற நூலில் விளக்கியுள்ளார். எண் சுழற்சி என்று அவர் குறிப்பிடும் இந்த முறை கூறுவது இவ்வாறாகும்:

> விடை தெரியுமெனில் எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க வகுத்தலைப் பெருக்கலாக்கவும், பெருக்கலை வகுத்தலாக்கவும், வர்க்கத்தை வர்க்க மூலமாக்கவும், வர்க்க மூலத்தை வர்க்கமாக்கவும் வேண்டும்.

(1) ஓர் எண்ணின் 2 மடங்கும் 7 மடங்கும் கூட்டிய போது 27 கிடைத்தது. எண் எது?

(2) ஓர் எண்ணின் 12 மடங்குடன் 99 ஐக் கூட்டிய போது எண்ணின் 21 மடங்கானது. எண் எது?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு குப்பியில் நிரப்பப்பட்ட தண்ணீரும், அதன் நான்கில் ஒரு பாகமும் எடுத்த போது ஒரு லிட்டரானது. குப்பியில் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

குப்பியில் நிரப்பப்பட்ட தண்ணீரும் அதன் $\frac{1}{4}$ பாகமும் சேர்த்தால் குப்பியில் கொள்ளும் தண்ணீரின் $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ மடங்காகுமல்லவா. இது 1 லிட்டர் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது.

அதாவது குப்பியில் கொள்ளும் தண்ணீரின் $\frac{5}{4}$ மடங்கு 1 லிட்டர்.

அப்போது குப்பியில் கொள்ளும் தண்ணீர், 1 லிட்டரின் $\frac{4}{5}$ பாகம். (ஏழாம் வகுப்பில் **தலைகீழ் பின்னங்கள்** என்ற பாடத்தில் **நேராகவும் மாறாகவும்** என்ற பகுதி).

அதாவது குப்பியில் $\frac{4}{5}$ லிட்டர், அதாவது $1000 \times \frac{4}{5} = 800$ மில்லி லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும். இந்தக் கணக்கையும் எண்களை மட்டும் பயன்படுத்திக் கூறலாம்:

ஓர் எண்ணின் $\frac{5}{4}$ மடங்கு 1 எனில், எண் எது?

எண் $1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ எனக் கணக்கிடலாம்.

வேறொரு கணக்கு:

ஒரு பாத்திரத்தில் மூன்றிலொரு பாகம் தண்ணீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. மேலும் ஒரு லிட்டர் ஊற்றிய போது பாத்திரம் பாதி நிரம்பியது. பாத்திரத்தில் மொத்தம் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

இதனை எண்களை மட்டும் பயன்படுத்திக் கூறினால் வினா இவ்வாறாகும்.

ஓர் எண்ணின் $\frac{1}{3}$ பாகத்துடன் 1 கூட்டிய போது $\frac{1}{2}$ பாகமானது. எண் எது?

$\frac{1}{2}$ பாகம் $\frac{1}{3}$ பாகம் இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் 1 அல்லவா.

இந்த வித்தியாசம் எண்ணின் எத்தனை பாகமாகும்?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

அப்போது எண்ணின் $\frac{1}{6}$ பாகம் 1; எண் 6

அதாவது, பாத்திரத்தில் 6 லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்.

நம் நாட்டில் மிகவும் பிரபலமான ஒரு பழைய கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

பறவைக் கூட்டத்திடம் மாணவி கேட்டாள், "நீங்கள் எத்தனை பேர்?" ஒரு பறவை இவ்வாறு கூறியது:

நாங்களும் எங்கள் அளவும்

எங்களில் பாதியும்

அதில் பாதியும்

ஒன்றும் சேர்ந்தால் நூறாகும்

எத்தனை பறவைகள் இருந்தன?

பறவைகளின் எண்ணிக்கை என்ற எண்ணில், பறவை கூறிய செயல்களைச் செய்து பார்ப்போம்:

நாங்களும் எங்கள் அளவும்	:	எண்ணின் 2 மடங்கு
எங்களில் பாதி	:	எண்ணின் $2\frac{1}{2}$ மடங்கு
அதில் பாதி	:	எண்ணின் $2\frac{3}{4}$ மடங்கு
1 உம் கூடச் சேர்ந்தால்	:	எண்ணின் $2\frac{3}{4}$ மடங்குடன் 1 கூட்டியது

அப்போது வினா இவ்வாறாகும்:

ஓர் எண்ணின் $2\frac{3}{4}$ மடங்குடன் 1 ஐக் கூட்டினால் 100 ஆகும். எண் எது?

முதலில், எண்ணின் $2\frac{3}{4}$ மடங்கு, $100 - 1 = 99$ எனக் கணக்கிடலாம். இனி $2\frac{3}{4}$ ஐ இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

அதாவது எண்ணின் $\frac{11}{4}$ மடங்கு 99

அப்போது எண்

$$99 \times \frac{4}{11} = \frac{9 \times 11 \times 4}{11} = 9 \times 4 = 36$$

பறவைக் கூட்டத்தில் 36 பறவைகள் இருந்தன.

(1) ஒரு கயிற்றிலிருந்து அதன் மூன்றிலொரு பாகம் வெட்டி மாற்றிய போது, மீதியுள்ள பாகத்தின் நீளம் 10 மீட்டர். கயிற்றின் நீளம் எவ்வளவு இருந்தது?

(2) ஒரு பாத்திரத்திலுள்ள பாலின் பாதியும், மீதியுள்ளதன் மூன்றிலொரு பாகமும் பயன்படுத்திய பிறகு, 5 லிட்டர் மீதி இருந்தது. பாத்திரத்தில் எத்தனை லிட்டர் பால் இருந்திருக்கும்?

இயற்கணிதமுறை

இப்போது செய்த அனைத்து கணக்குகளிலும் உள்ள பொதுவான பண்பு என்ன? ஏதோ ஓர் எண்ணில் சில செயல்களைச் செய்த போது கிடைக்கின்ற முடிவு எந்த எண் என கூறப்பட்டுள்ளது. எந்த எண்ணிலிருந்து தொடங்கியது எனக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கப்பட்டது? செய்த எல்லா செயல்களுடையவும் எதிர்வரிசை செயல்கள் (இறுதியில் செய்ததை முதலில் என்ற வரிசையில்) செய்யவும். எடுத்துக்காட்டாக இந்த கணக்கைப் பார்க்கலாம்.

> ரஷீதா 4 கிலோகிராம் வெண்டைக்காயும் 20 ரூபாய்க்கு மல்லி இலை, கறிவேப்பிலை முதலியன வாங்கிய போது 200 ரூபாயானது. ஒரு கிலோகிராம் வெண்டைக்காயின் விலை என்ன?

முதலில் இதனைக் கணித மொழியில் எழுதலாம்.

> ஒரு எண்ணை 4 ஆல் பெருக்கி 20 ஐக் கூட்டினால் 200 கிடைக்கும் எனில் எண் எது?

தொடங்கிய எண்ணைக் கண்டுபிடிப்பது எவ்வாறு? கடைசியாக கூட்டிய 20 ஐ முதலில் கழிக்கவும். பின் முதலில் பெருக்கிய 4 ஆல் வகுக்கவும். அதாவது

$$(200 - 20) \div 4 = 180 \div 4 = 45$$

அவ்வாறு ஒரு கிலோகிராம் வெண்டைக்காயின் விலை 45 ரூபாய் எனக் காணலாம்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> 10 மீட்டர் நீளமுள்ள கம்பியை வளைத்து, ஒரு செவ்வகம் உருவாக்க வேண்டும். அகலத்தை விட நீளம் 1 மீட்டர் கூடுதலாகவும் இருக்க வேண்டும் எனில் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு, பத்து மீட்டர் அல்லவா. அது நீளமும் அகலமும் கூட்டியதன் இரண்டு மடங்காகும். இங்கு நீளம் அகலத்தை விட 1 மீட்டர் கூடுதல். அப்போது நீளத்தையும் அகலத்தையும் கூட்டுக என்பது, அகலமும், அகலத்தோடு 1 கூட்டியதையும் கூட்ட வேண்டும் என்பதாகும்.

அப்போது பிரச்சனையை எண்களைமட்டும் பயன்படுத்திக் கூறினால்?

> ஓர் எண்ணினுடையவும், அத்துடன் 1 கூட்டிய எண்ணினுடையவும் தொகையின் 2 மடங்கு 10 ஆகும். எண் எது?

இறுதியாக எடுத்த இரண்டு மடங்கை நீக்கினால் இவ்வாறு கூறலாம்:

ஓர் எண்ணினுடையவும், அதனுடன் 1 கூட்டிய எண்ணினுடையவும் தொகை 5; எண் எது?

எந்த எண்ணானாலும், அந்த எண்ணையும் அதனுடன் 1 ஐக் கூட்டிய எண்ணையும் கூட்டுவது, அதன் இரண்டு மடங்குடன் 1 ஐக் கூட்டுவதற்கு சமம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தது நினைவிருக்கிறதா? (**இயற்கணிதம்** என்ற பாடத்தில் **எண்களும் இயற்கணிதமும்** என்ற பகுதி).

இந்தக் கருத்தை இயற்கணிதத்தில் எழுதுவதே சிறப்பு எனப் பார்த்தோம்.

x எந்த எண் ஆனாலும் $x + (x + 1) = 2x + 1$

இப்போது சிந்திக்கின்ற கணக்கில் இக்கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்: இந்தக் கணக்கில் எண் x என எடுத்தால், இந்தப் பிரச்சனை இவ்வாறாகும்.

$2x + 1 = 5$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்னவாக வேண்டும்?

இதன் பொருள் என்ன?

ஓர் எண்ணின் இரண்டு மடங்குடன் 1 ஐக் கூட்டிய போது 5; எண் எது?

எதிர்வரிசை செயல்களின் வழியாக எண் கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா?

$$(5 - 1) \div 2 = 2$$

எனவே செவ்வகத்தின் அகலமும் நீளமும் 2 மீட்டர், 3 மீட்டர் எனக் கிடைக்கும்.

இவ்வாறான கணக்குகளை, தொடக்கம் முதல் இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி செய்வதே சில வேளைகளில் வசதியாக இருக்கும்.

இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 25 மாணவர்களுக்கு பேனா வாங்க 85 ரூபாய் செலவானது. 4 ரூபாய் மற்றும் 3 ரூபாய் மதிப்புள்ள பேனாக்கள் வாங்கப்பட்டன. ஒவ்வொரு விலையிலுமுள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

மொத்தம் 25 பேனாக்கள் வாங்கப்பட்டன.

அப்போது ஏதேனும் ஒரு வகை பேனாவின் எண்ணிக்கை கணக்கிட்டால், அதனை 25 லிருந்து கழித்தால் மற்ற பேனாவின் எண்ணிக்கையும் கிடைக்கும்..

முதலில் 4 ரூபாய் பேனாக்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டுப் பார்ப்போம். இந்த எண்ணை மட்டும் பயன்படுத்தி, கணக்கை எவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்?

பெயர் வந்த விதம்

அரபு படைப்புகளின் மொழிபெயர்ப்பு மூலம் தற்போதைய ஐரோப்பாவில் இயற்கணிதம் பரவியது. இவற்றுள் முதன்மையானது கணதவியலாளர் முகமது அல்காரிஷ்மியின் படைப்புகள் ஆகும்.

சி.இ 8 ஆம் நூற்றாண்டில் அல்காரிஷ்மி வாழ்ந்தார்.

ஒரு எண்ணிலிருந்து 2 ஐக் கழித்தால் 5 கிடைத்தது என்பதிலிருந்து எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க 5 உம் 2 உம் கூட்டப்பட்டன. அத்தகைய செயல்களை **அல்ஜபர்** என்ற அரபு வார்த்தையால் அல்காரிஷ்மி குறிப்பிட்டார். "கூட்டிச் சேர்க்கவும்" அல்லது "பழையது போல் மாற்றுதல்" என்பதே இந்த வார்த்தையின் பொருள். இயற்கணிதத்திற்கு ஆங்கிலத்தில் algebra எனப் பெயர் வந்தது இந்த அரபு வார்த்தையிலிருந்து ஆகும்.

ஒழுங்கான வழிமுறை வாயிலாக ஒரு பிரச்சனைக்கு தீர்வு காணும் திட்டத்திற்கு (குறிப்பாக கணினிகளில்) algorithm என்று பெயர். அல்காரிஷ்மி என்ற வார்த்தையிலிருந்து இது உருவானது.

ஓர் எண்ணின் 4 மடங்கும், 25 லிருந்து அந்த எண்ணைக் கழித்ததன் 3 மடங்கும் கூட்டினால் 85; எண் எது?

இதை எதிர்வரிசை செயல்முறையில் மாற்றுவது கடினம் அல்லவா?

கணக்கை இயற்கணிதத்தில் மாற்றினால்?

4 ரூபாய் பேனாக்களின் எண்ணிக்கையை x என எடுத்து கணக்கிலுள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் இதைப் பயன்படுத்தி எழுதிப் பார்க்கலாம்:

4 ரூபாய் பேனாக்களின் எண்ணிக்கை	:	x
அவற்றின் விலை	:	$4x$
3 ரூபாய் பேனாக்களின் எண்ணிக்கை	:	$25 - x$
அவற்றின் விலை	:	$3(25 - x)$
மொத்த விலை	:	$4x + 3(25 - x)$

அப்போது வினா என்ன?

$4x + 3(25 - x) = 85$ எனில், x என்ன?

இதில் $3(25 - x)$ என்ற பாகத்தை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம் அல்லவா.

$$3(25 - x) = (3 \times 25) - (3 \times x)$$
$$= 75 - 3x$$

இதைப் பயன்படுத்தி $4x + 3(25 - x)$ ஐயும் மாற்றலாம்:

$$4x + 3(25 - x) = 4x + 75 - 3x$$
$$= 4x - 3x + 75$$
$$= x + 75$$

இப்போது வினா என்னவானது?

$x + 75 = 85$ எனில், x என்ன?

ஓர் எண்ணுடன் 75 ஐக் கூட்டினால் 85 ஆகுமெனில், எண் $85 - 75 = 10$ அல்லவா?

அப்போது இந்தக் கணக்கில் $x = 10$

அதாவது, 4 ரூபாய் பேனா 10, 3 ரூபாய் பேனா $25 - 10 = 15$.

(1) 80 மீட்டர் சுற்றளவுள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம், அகலத்தின் இரண்டு மடங்கை விட ஒரு மீட்டர் கூடுதலாகும். அதன் அகலமும் நீளமும் என்ன?

(2) நூறு ரூபாய்க்கு சில்லறை மாற்றிய போது இருபது ரூபாய் நோட்டுகளும், பத்துரூபாய் நோட்டுகளும் கிடைத்தன. மொத்தம் ஏழு நோட்டுகள் எனில் ஒவ்வொன்றின் எண்ணிக்கை என்ன?

(3) ஒரு புத்தகத்தின் விலை, ஒரு பேனாவின் விலையை விட 4 ரூபாய் கூடுதலாகும். ஒரு பென்சிலின் விலை, பேனாவின் விலையை விட 2 ரூபாய் குறைவாகும். ஒருவர் 5 புத்தகங்களும், 2 பேனாக்களும் 3 பென்சில்களும் வாங்கினர். மொத்தம் 54 ரூபாய் எனில் ஒவ்வொன்றின் விலை என்ன?

(4) நாட்காட்டியில் நான்கு எண்கள் உள்ள ஒரு சதுரத்தை அடையாளப்படுத்தி, அதிலுள்ள எண்களை எல்லாம் கூட்டிய போது 80 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

அஜயனுக்கு விஜயனை விட பத்து வயது கூடுதல். அடுத்த வருடம் அஜயனின் வயது, விஜயனின் வயதின் இரண்டு மடங்காகும். இவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தித் தொடங்கலாம். விஜயனின் தற்போதைய வயது x என எடுத்து, கணக்கிலுள்ள எண்களையெல்லாம் இதைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்:

விஜயனின் வயது : x

அஜயனின் வயது : $x + 10$

அடுத்த வருடம் விஜயனின் வயது : $x + 1$

அடுத்த வருடம் அஜயனின் வயது : $x + 11$

அடுத்த வருடம் விஜயனின் வயதின் இரண்டு மடங்கு அஜயனின் வயது எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. பிரச்சனையை எவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்?

$2(x + 1) = x + 11$ எனில், x என்ன?

இதில் $2(x + 1)$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா.

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

எனவே வினா என்ன?

சமன்பாடுகள்

ஒரு எண்ணின் 2 மடங்குடன் 1 ஐக் கூட்டிய போது 9 கிடைத்தது. இதனை இயற்கணிதத்தில் எவ்வாறு எழுதலாம்?

$$2x + 1 = 9$$

இந்த எண் 4 என எளிதாக கணக்கிடலாமல்லவா. அதாவது x என்பது 4 என எடுத்தால் மட்டுமே மேலே குறிப்பிட்ட சமன்பாடு சரியாகும். இதனை கணித மொழியில் கூறினால்,

$2x + 1 = 9$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = 4$

சில இயற்கணித சமன்பாடுகளில், எழுத்துக்களாக எந்த எண்களை எடுத்தாலும் சரியாகும் எனக் கண்டிருக்கிறோமல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

இவ்வாறான சமன்பாடுகளை முற்றொருமைகள் **(Identities)** எனலாம்.

$2x + 2 = x + 11$ எனில், x என்ன?

இனி?

பல வகைகளில் தொடரலாம்.

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) $2x$ என்ற எண்ணுடன் 2 ஐக் கூட்டிய போது $x + 11$ என்ற எண் கிடைத்தது

(ii) $2x$ என்ற எண் $x + 11$ என்ற எண்ணிலிருந்து 2 ஐக் கழித்தது.

(iii) $2x = (x + 11) - 2$

(iv) $2x = x + 9$

இறுதியாக கிடைத்த சமன்பாட்டின் பொருள் என்ன?

x என்ற எண்ணுடன் 9 ஐக் கூட்டிய போது $2x$ ஆனது; அதாவது x இரண்டு மடங்கானது.

ஓர் எண்ணுடன் அதே எண்ணைக் கூட்டினால் அல்லவா இரண்டு மடங்காகும்.

ஒன்பதின் விளையாட்டு

9 இல் முடிகின்ற ஏதேனும் இரண்டிலக்க எண் எடுத்து இலக்கங்களின் தொகையும் பெருக்கற்பலனும் கூட்டிப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக 29 ஐ எடுத்தால் இலக்கங்களின் தொகை $2 + 9 = 11$: பெருக்கற்பலன் $2 \times 9 = 18$

இவற்றைக் கூட்டினால் $18 + 11 = 29$.

9 இல் முடிகின்ற எல்லா இரண்டிலக்க எண்களுக்கும் இது சரியாகுமா?

எண் $10x + 9$ என எடுத்துப் பார்க்கவும்.

9 அல்லாமல் வேறு ஏதேனும் இலக்கங்களில் முடிகின்ற இரண்டிலக்க எண்களுக்கு இச்சிறப்பு உள்ளதா?

$10x + y = x + y + xy$ என்பதிலிருந்து y கண்டு பிடிக்கலாமா?

எனவே x என்ற எண் 9 ஆகும்.

அதாவது, விஜயனின் வயது 9, அஜயனின் வயது $9 + 10 = 19$

வேறொரு விதமாகவும் சிந்திக்கலாம். பிரச்சனையின் இயற்கணித வடிவம் இவ்வாறாகும்.

$2x + 2 = x + 11$ எனில், x என்ன?

x ஆக ஏதேனும் எண் எடுத்த போது $2x + 2$ என்ற செயலும், $x + 11$ என்ற செயலும் செய்தபோது ஒரே விடை கிடைக்கும் என்பதே இச்சமன்பாட்டின் பொருள்.

அப்போது இரண்டு செயல்களிலும் ஒரே எண்ணைக் கழித்தாலும் ஒரே விடை கிடைக்க வேண்டுமல்லவா?

கழிப்பது x எனில்?

$$(2x + 2) - x = x + 2$$

$$(x + 11) - x = 11$$

இந்த விடைகள் சமம் எனப் பார்த்தோமல்லவா. எனவே

$$x + 2 = 11$$

இதிலிருந்து $x = 9$ எனக் காணலாம்.

இந்தக் கணக்கைப் பாருங்கள்:

அமிலமும் தண்ணீரும் சேர்ந்த திரவத்தில் 60% அமிலமாகும். மேலும் 6 லிட்டர் அமிலம் ஊற்றினால், அமிலம் 75% ஆகும். முதலில் எத்தனை லிட்டர் அமிலம் இருந்தது?

இதில் முதலில் எத்தனை லிட்டர் திரவம் இருந்தது எனக் கூறவில்லை. இது x லிட்டர் என எடுக்கலாம். இதில் 60% அமிலமும், மீதியுள்ள 40% தண்ணீரும் ஆகும் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது,

மொத்த திரவம்	x லிட்டர்
அமிலம்	$\frac{60}{100}x = \frac{3}{5}x$ லிட்டர்
தண்ணீர்	$\frac{40}{100}x = \frac{2}{5}x$ லிட்டர்

இனி 6 லிட்டர் அமிலம் ஊற்றிய பிறகு இந்த அளவுகள் எவ்வாறாகும்?

மொத்த திரவம்	$x + 6$ லிட்டர்
அமிலம்	$\frac{3}{5}x + 6$ லிட்டர்
தண்ணீர்	$\frac{2}{5}x$ லிட்டர்

இப்போது அமிலத்தின் அளவு, மொத்த திரவத்தின் 75% எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. அதாவது, இப்போது அமிலத்தின் அளவு

$$(x+6) \times \frac{75}{100} = \frac{3}{4}(x+6) \text{ லிட்டர்}$$

முன்பு செய்த கணக்கீட்டிற்கேற்ப தற்போதைய அமிலத்தின் அளவு $\frac{3}{5}x + 6$ லிட்டர் ஆகும். அப்போது

$$\frac{3}{4}(x+6) = \frac{3}{5}x+6$$

இதனை இவ்வாறு எழுதலாமல்லவா.

$$\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} = \frac{3}{5}x+6$$

அதாவது, $\frac{3}{4}x$ என்ற எண்ணுடன் $4\frac{1}{2}$ கூட்டிய போது $\frac{3}{5}x + 6$ என்ற எண்ணானது. அப்போது இதன் முதல் எண், இரண்டாவது எண்ணிலிருந்து $4\frac{1}{2}$ கழித்ததல்லவா ?

$$\frac{3}{4}x = \left(\frac{3}{5}x + 6\right) - 4\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{5}x + 1\frac{1}{2}$$

இதன் பொருள் என்ன?

$\frac{3}{5}x$ ஐ விட $1\frac{1}{2}$ கூடுதலாகும் $\frac{3}{4}x$. வேறொரு முறையில் கூறினால், $\frac{3}{4}x$, $\frac{3}{5}x$ இவற்றிற்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் $1\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = 1\frac{1}{2}$$

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x$ என்பதை இவ்வாறு கணக்கிடலாமல்லவா.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x$$

அப்போது கணக்கிலுள்ள சமன்பாடு இவ்வாறாகும்.

$$\frac{3}{20}x = 1\frac{1}{2}$$

அதாவது x என்ற எண்ணின் $\frac{3}{20}$ பாகம் $1\frac{1}{2}$ ஆகும். அப்போது x என்ற எண், $1\frac{1}{2}$ இன் $\frac{20}{3}$ மடங்கல்லவா? (ஏழாம் வகுப்பில் **தலைகீழ் பின்னங்கள்** என்ற பாடத்தில் **மடங்கும் பாகமும்** என்ற பகுதி).

$$\begin{aligned} x &= 1\frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{20}{3} \\ &= \frac{3 \times 20}{2 \times 3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

அப்போது முதலில் மொத்தம் 10 லிட்டர் திரவம் இருந்தது.

(1) அப்புவின் அம்மாவின் வயது, அப்புவின் வயதின் ஒன்பது மடங்கு ஆகும். ஒன்பது வருடங்களுக்குப் பிறகு, இது மூன்று மடங்காகும். இவர்களின் தற்போதைய வயது என்ன?

(2) ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களினுடையவும் மாணவிகளினுடையவும் எண்ணிக்கை சமம். எட்டு மாணவர்கள் மட்டும் வராமலிருந்த ஒரு நாள், இந்த வகுப்பிலுள்ள மாணவிகளின் எண்ணிக்கை மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் இரண்டு மடங்கு ஆனது. மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

(3) மாணவர்களும், மாணவிகளும் உள்ள ஒரு வகுப்பில் 50% மாணவிகள். மேலும் 10 மாணவிகள் வந்த போது மாணவிகளின் எண்ணிக்கை 60% ஆனது. வகுப்பில் முதலில் எத்தனை பேர் இருந்தனர்?

(4) மீண்டும் ஒரு பழைய கணக்கு: ஒரு குளத்தில் தாமரைப் பூக்கள் மலர்ந்திருக்கின்றன. பறந்து வந்த பறவைக் கூட்டம், களைப்பை மாற்றுவதற்கு பூக்களில் அமர்ந்தன. ஒரு தாமரையில் ஒரு பறவை வீதம் அமர்ந்த போது ஒரு பறவைக்கு இடமில்லை. ஒரு தாமரையில் இரு பறவைகள் சேர்ந்து அமர்ந்தபோது, ஒரு தாமரை அதிகம். தாமரைகள் எத்தனை? பறவைகள் எத்தனை?

6

புதிய எண்கள்

நிறமுள்ள எண்கள்

நீதுவும், ஹரியும் அன்வரும் ஒரு விளையாட்டு விளையாடுகிறார்கள்; எண்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு சீட்டு விளையாட்டு. 1 முதல் 5 வரையுள்ள எண்கள் எழுதிய 50 சீட்டுகள், ஒவ்வொரு எண்ணும் 10 வீதம்; பாதி சீட்டுகளில் எண்கள் கருப்பு நிறத்திலும் மீதி சிவப்பு நிறத்திலும் எழுதப்பட்டுள்ளன.

முதலில் ஒவ்வொருவரும் ஒரு கருப்பு நிற 5 ஐ எடுக்கின்றனர். மீதி சீட்டுகளை எல்லாம் கலந்து கவிழ்த்து அடுக்கி வைக்கின்றனர். இனி ஒவ்வொருவரும் அடுக்கிலிருந்து ஒவ்வொரு சீட்டாக எடுக்கின்றனர். கிடைப்பது கருப்பு எண் எனில் அதைக் கூட்டலாம். சிவப்பு எண் எனில் கழிக்க வேண்டும். இவ்வாறு கூட்டியும் கழித்தும் விளையாட்டை தொடர்கின்றனர். முதலில் 10ஐ விடக் கூடுதல் கிடைக்கும் நபர் வெற்றி பெறுவார்.

முதலில் கிடைத்தது பின்வருமாறு

நீது 2 அன்வர் 1 ஹரி 3

அப்போது, விளையாட்டின் விதிப்படி, ஒவ்வொரு வருடையவும் இப்போதைய எண்கள் எழுதலாம்:

நீது	5	7
அன்வர்	5	6
ஹரி	5	2

இரண்டாவது தடவை கிடைத்தது பின்வருமாறு

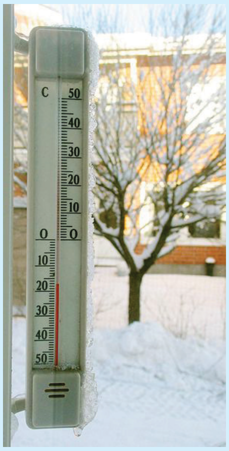
நீது 1 அன்வர் 3 ஹரி 3

குறை வெப்பநிலை

செய்தித்தாள்களிலும் தொலைக் காட்சியிலும் ஒவ்வொரு நாளிலும் பல்வேறு இடங்களின் வெப்பநிலைகள் கூறுவதைக் கேட்டிருப்பீர்களல்லவா. வடஇந்தியாவில் பல்வேறு இடங்களிலும் வெப்பநிலை குளிர்காலத்தில் $-1°C$, $-2°C$ என்றெல்லாம் கூறுவதுண்டு. இதன் பொருள் என்ன?

தண்ணீர் உறைந்து திடப்பொருளாகின்ற வெப்பநிலையே பூஜ்யம் டிகிரி செல்சியஸ் $(0°C)$ எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இதற்கும் கீழேயுள்ள வெப்பநிலைகளைத்தான் குறை சேர்த்து கூறுவது.

ஒரு கண்ணாடி குழாயினுள் வெப்பம் கூடும் போது பாதரச ஸ்தம்பம் பெருக்கமடைந்து உயரவும் வெப்பம் குறையும் போது பாதரச ஸ்தம்பம் சுருங்கி கீழிறங்கவும் செய்யும். இதைப் பயன்படுத்தியே பொதுவாக வெப்பம் அளக்கப்படுகிறது. குளிர் பிரதேசங்களில் பயன்படுத்தும் இத்தகைய வெப்பமானிகளில் பூஜ்யத்திற்கு கீழேயும் எண்கள் அடையாளப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்.



படத்திலுள்ள வெப்பமானியில் காட்டப்பட்டிருப்பது $-20°C$ க்கும் $-15°C$ க்கும் இடையிலுள்ள வெப்ப நிலைகளாகும்.

இப்போது ஒவ்வொருவருடையவும் நிலையை எவ்வாறு எழுதலாம்?

நீது	5	7	8
அன்வர்	5	6	3
ஹரி	5	2	

ஹரியின் காரியத்தில் வாதம் ஏற்பட்டது.

2 லிருந்து 3 கழிக்க இயலாது; எனவே அவனுடைய தற்போதைய எண் 0 என எழுதலாம் என்று ஹரி கூறினான்.

அவ்வாறு இல்லை, ஹரி விளையாட்டில் தோல்வியடைந்தான், இனி நீதுவும் நானும் விளையாடினால் போதுமென்று அன்வர் கூறினான்.

அது வேண்டாம், ஹரி இனியும் விளையாடட்டும்; அடுத்த முறை கிடைக்கும் எண்ணிலிருந்து 1 கழித்தால் போதும் என நீது கருத்து தெரிவித்தாள்.

இதை எல்லாரும் ஒப்புக் கொண்டனர். ஹரியின் கட்டத்தில் “1 கழிக்க வேண்டும்" என எழுதலாம் என்று தீர்மானித்தனர்.

அப்படியானால் சற்று சுருக்கி −1 என்று எழுதினால் போதும் என அன்வர் கூறினான். இதை எல்லோரும் ஏற்றுக் கொண்டனர்.

நீது	5	7	8
அன்வர்	5	6	3
ஹரி	5	2	−1

அடுத்த முறை ஹரி தப்பினான்.

நீது 4 அன்வர் 5 ஹரி 3

விளையாடுகிறவர்களின் தற்போதைய நிலையை எழுதலாமா?

நீது	5	7	8	4
அன்வர்	5	6	3	
ஹரி	5	2	−1	

குளிர், கடுங்குளிர்

இந்தியாவில் மிகக் குளிரான பகுதி லடாக்கில் திராஸ் என்ற நகரமாகும். இங்கு வெப்பநிலை −60 °C வரை குறைந்ததாக குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

பூமியில் மிகக் குளிரான பகுதி அண்டார்டிகா கண்டம் ஆகும்

இங்கு தான் பூமியில் மிகக் குறைந்த வெப்பநிலையான −89°C குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஹரிக்கு இப்போது கிடைத்தது 3;

முன்பு இருந்த கடன் 1 ஐ கழித்தால் 2.

அன்வரின் காரியம்?

3 லிருந்து 5 கழிக்க இயலாது. முன்பு ஹரியின் காரியத்தில் செய்தது போல அடுத்த முறை கிடைக்கும் எண்ணிலிருந்து கழித்தால் போதும் என தீர்மானித்தனர்.

எவ்வளவு கழிக்க வேண்டும்?

2 கழிக்க வேண்டும் என்பதை முன்பு செய்தது போல –2 என எழுதலாம்.

நீது	5	7	8	4
அன்வர்	5	6	3	–2
ஹரி	5	2	–1	2

நான்காவது தடவை கிடைத்த சீட்டுகள் பின்வருமாறு:

நீது 3 அன்வர் 2 ஹரி 5

தற்போதைய நிலை எழுதலாமா?

நீது	5	7	8	4	
அன்வர்	5	6	3	–2	
ஹரி	5	2	–1	2	

பூஜ்யத்திற்கு கீழ்

சீட்டு விளையாட்டில் 2 இலிருந்து 3 கழிக்க வேண்டி வந்த போது அதை –1 என எழுதினோமல்லவா.

$$2 - 3 = -1$$

என எழுதலாம். இதன் பொருள் என்ன?

2 இலிருந்து 2 கழித்தால் 0 ஆகும். இங்கு கழிக்க வேண்டியது 3 ஆனதால் மேலும் 1 கழிக்க வேண்டும்; இதை –1 என எழுதலாம்

$$0 - 1 = -1$$

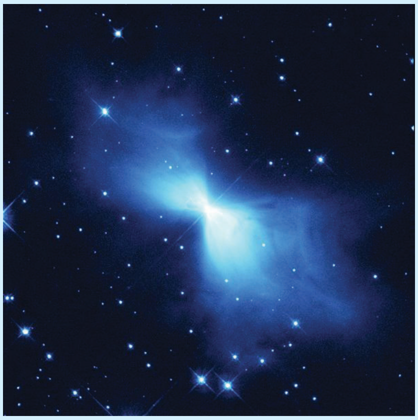
இது போல 3 இலிருந்து 5 கழித்தது எவ்வாறு?

3 இலிருந்து 3 கழித்தால் 0; இனி எத்தனை கழிக்க வேண்டும்?

$$0 - 2 = -2$$

குளிர்கால வரம்பு

நமக்குத் தெரிந்த பேரண்டம் முழுவதும் எடுத்தால் மிகக் குறைந்த தட்ப வெப்பநிலை கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. பூமியிலிருந்து ஐந்நூறு கோடி கோடி (5×10^{16}) கிலோமீட்டர் தூரத்திலுள்ள பூமராங் நெபூலா என்று பெயரிடப்பட்டுள்ள ஒரு நட்சத்திர கூட்டத்திலாகும். அது –272.15°C ஆகும்.



பேரண்டத்தில் வழக்கமாக உள்ள மிகக் குறைந்த வெப்பநிலை இதுதான் எனினும் இதை விடவும் குறைந்த வெப்ப நிலை ஆய்வகங்களில் சரியாக உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆனால் இயற்பியலில் வெப்பத்தைப் பற்றிய கோட்பாடுகள் படி–273.15°C டிகிரி செல்சியசோ அதைவிடக் குறைவாகவோ ஆன வெப்பநிலை உருவாகவோ அல்லது உருவாக்கவோ இயலாது.

இவ்வாறு குறை அடையாளம் சேர்த்தெழுதுகின்ற எண்களை **குறை எண்கள் (Negative numbers)** எனக் கூறுவர்

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு தேர்வில் 25 வினாக்களுண்டு. சரியான விடைகளுக்கெல்லாம் 2 மதிப்பெண் வீதம் கிடைக்கும்; தவறான விடைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 1 மதிப்பெண் வீதம் குறைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக 19 விடைகள் சரியும் 6 விடைகள் தவறுமானால், மொத்தம் கிடைக்கும் மதிப்பெண்

$$(2 \times 19) - 6 = 32$$

மாறாக ஆனால்?

சரியான 6 விடைகளுக்கு $(2 \times 6) = 12$ மதிப்பெண் கிடைக்கும். தவறான 19 விடைகளுக்கு 19 மதிப்பெண் குறையும்.

குறை பணம்

சி.இ ஏழாம் நூற்றாண்டு முதல் இந்தியாவில் பணப் பரிவர்த்தனைகளில் கடனைக் குறிப்பிட குறை எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. இக்காலத்திலும் இத்தகைய சூழல்களில் குறை எண்கள் பயன்படுத்துவதுண்டு.

மதிப்பெண் $12 - 19$

இதை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

12 லிருந்து 12 கழிக்கும் போது 0 ஆகும்; இனி எவ்வளவு கழிக்க வேண்டும்?

$$19 - 12 = 7$$

அப்போது

$$12 - 19 = 0 - 7 = -7$$

பின்ன எண்களின் குறையும் சில வேளைகளில் தேவைப்படும். பின்வரும் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

ஒரு தேர்வில் 10 வினாக்கள் உண்டு. சரியான ஒவ்வொரு விடைக்கும் 1 மதிப்பெண், தவறான ஒவ்வொரு விடைக்கும் $\frac{1}{2}$ மதிப்பெண் குறைக்கப்படும். எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதி 3 விடைகள் மட்டும் சரியான ஒரு நபருக்கு எத்தனை மதிப்பெண்கள் கிடைக்கும்?

சரியான 3 விடைகளுக்கு 3 மதிப்பெண் கிடைக்கும். தவறான 7 விடைகளுக்கு, 7 இன் பாதி $3\frac{1}{2}$ மதிப்பெண் குறையும்.

3 இலிருந்து 3 கழித்தால் 0. மேலும் $\frac{1}{2}$ கழிக்க வேண்டும். அப்போது மொத்த மதிப்பெண்.

$$3 - 3\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

இந்தத் தேர்வில் ஒரு விடை மட்டும் சரியாக எழுதிய நபருக்கு எத்தனை மதிப்பெண் கிடைக்கும்?

$$1 - 4\frac{1}{2}$$

இதை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

$$1 - 1 = 0$$

இனியும் கழிக்க வேண்டியது

$$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

அப்போது

$$1 - 4\frac{1}{2} = 0 - 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$$

குறை எண்களையும் பயன்படுத்தித் தொடங்கும் போது $1, 2, 1\frac{1}{2}$ போன்ற (குறையல்லாத) எண்களை **மிகை எண்கள் (Positive numbers)** என்று கூறுவர்.

அப்போது 0 என்ற எண்? அது மிகை எண்ணுமல்ல. குறை எண்ணுமல்ல

சிறிய மிகை எண்ணிலிருந்து பெரிய மிகை எண்ணைக் கழிக்கும் போது கிடைக்கும் குறை எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க முதலில் பூஜ்யத்தை அடைந்து பின்பு பூஜ்யத்திலிருந்து கழிக்கவும் செய்தோம். இதற்கு பதில் நேரடியாகக் கணக்கிடலாம் அல்லவா?

குறை மாடிகள்

உயரம் கூடிய கட்டிடங்களில் ஒரு மாடியில் இருந்து மற்றொன்றிற்கு செல்ல லிப்ட் என்ற இயந்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதில் பல மாடிகளைக் குறிக்கும் எண்கள் எழுதிய பொத்தான்கள் இருக்கும். இதை அழுத்தினால் தேவையான தளத்தை அடையலாம். ஒரு லிப்டிலுள்ள இத்தகைய பொத்தான்கள் கீழே படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இதில் -1, -2 ஆகிய குறை எண்கள் எதற்கு?

இந்தக் கட்டிடத்தில் தரைமட்டத்திற்கு கீழ் சில தளங்கள் உண்டு. அவற்றில் முதல் தளத்தை -1 என்றும் அதற்கு கீழ் உள்ள தளத்தை -2 என்றும் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மேலே எழுதிய கணக்குகளையெல்லாம் மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும்.

$$2 - 3 = -1 \qquad 3 - 2 = 1$$
$$3 - 5 = -2 \qquad 5 - 3 = 2$$
$$12 - 19 = -7 \qquad 19 - 12 = 7$$
$$3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$1 - 4\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2} \qquad 4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

இவற்றிலிருந்து என்ன புரிந்தது?

மிகை எண்களில் சிறியதிலிருந்து பெரியதைக் கழித்தால் கிடைப்பது, பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்து கிடைப்பதன் குறையாகும்.

இதை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தியும் எழுதலாம்.

> ***x*, *y* என்ற ஏதேனும் இரு மிகை எண்களில் $x < y$ எனில்**
>
> $$x - y = -(y - x)$$

கீழே கூறப்பட்டுள்ளவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $4 - 9$ (ii) $14 - 29$ (iii) $5 - 10$

(iv) $25 - 65$ (v) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

கூட்டலும் கழித்தலும்

எண்களால் ஆன சீட்டு விளையாட்டில் ஒருவரின் எண் -2 என்பதன் பொருள், இனிக் கிடைப்பதிலிருந்து 2 கழிக்க வேண்டும் என்பதல்லவா. தொடர்ந்து அடுக்கிலிருந்து கருப்பு நிற 2 கிடைத்தால் அவருடைய எண்

$$2 - 2 = 0$$

எண் -2 ஆக இருக்கும் போது 2 கூட்டுவதை

$$-2 + 2$$

எனவும் எழுதலாம். அதாவது

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$

10 வினாக்கள் உள்ள தேர்வில் சரியான விடைகளுக்கெல்லாம் 1 மதிப்பெண் கொடுப்பதும் தவறான விடைகளுக்கெல்லாம் 1 மதிப்பெண் கழிக்கவும் செய்யப்படுகிறது.

முதல் 5 விடைகள் தவறாகவும் அடுத்த 5 விடைகள் சரியாகவும் செய்தால் எத்தனை மதிப்பெண் கிடைக்கும்? சரியான 5 விடைகளின் 5 மதிப்பெண்களிலிருந்து தவறான விடைகளின் 5 மதிப்பெண்கள் கழித்தால் மொத்த மதிப்பெண் 0.

விடை எழுதியதற்கு ஏற்ப கணக்கீடு செய்தால் மொத்த மதிப்பெண் $-5 + 5$ என எழுதலாம். அதாவது,

$$-5 + 5 = 5 - 5 = 0$$

முதல் 4 விடைகள் தவறும், அடுத்த 6 விடைகள் சரியும் ஆனால்?

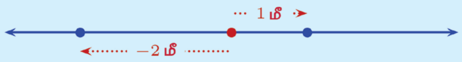
அது $-4 + 6$ என எழுதலாம். சரியான விடைகளுக்குக் கிடைத்த 6 மதிப்பெண்களில் இருந்து தவறான விடைகளுக்கு இழக்கும் 4 மதிப்பெண்களைக் கழித்தால் $6 - 4 = 2$. அப்போது

$$-4 + 6 = 6 - 4 = 2$$

முதல் 6 தவறானதும், அடுத்த 4 சரியானதும் எனில்?

திசைமாற்றம்

ஒரு நேர்கோடு வழியாக உள்ள இயக்கத்தைப் பற்றிக்கூறும்போது, கோட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு திசைக்குள்ள தூரங்களை மிகை எண்களாலும் எதிர் திசையிலுள்ள தூரங்களை குறை எண்களாலும் குறிப்பிடுவதுண்டு.



படத்தில், சிவப்பு புள்ளியிலிருந்து வலது பக்கமாக உள்ள தூரங்கள் மிகை எண்களாகவும் இடது பக்கமாக உள்ள தூரங்களை குறை எண்களாகவும் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்தப் புள்ளியிலிருந்து முதலில் 3 மீட்டர் வலது பக்கமாகப் பயணித்த பின், 5 மீட்டர் இடது பக்கமாகப் பயணித்த பின் அடையும் இடம் புள்ளியின் இடது பக்கமா? வலது பக்கமா? எவ்வளவு தூரத்தில்? இதனை

$$3 - 5 = -2$$

என எழுதலாம்.

முதலில் 5 மீட்டர் இடது பக்கமாகப் பயணித்த பின், 3 மீட்டர் வலது பக்கமாகப் பயணித்தால்?

$$-5 + 3 = -2$$

முதலில் 5 மீட்டர் இடதுபக்கமாக பயணித்த பின் மீண்டும் 3 மீட்டர் இடதுபக்கமாக பயணித்தால்?

மொத்த மதிப்பெண் $-6+4$ என எழுதலாம்.

சரியான விடைகளுக்குக் கிடைத்த 4 மதிப்பெண்களில் இருந்து தவறான விடைகளுக்கு இழக்கும் 6 மதிப்பெண்களைக் கழித்தால் $4-6=-2$. அப்போது

$$-6+4=4-6=-2$$

10 வினாக்களில் சரியான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் கொடுத்து தவறான விடைகளுக்கு $\frac{1}{2}$ மதிப்பெண் கழிக்கவும் செய்யும் தேர்வில், கடைசி 3 விடைகள் மட்டுமே சரியானது எனில் மொத்த மதிப்பெண் எவ்வளவு?

மொத்த மதிப்பெண் $3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ என முன்பே பார்த்திருக்கிறோம். விடைகளுக்கு ஏற்ப மதிப்பெண் கணக்கிட்டால்,

மொத்த மதிப்பெண் $-3\frac{1}{2}+3$ என்றும் கூறலாம், அதாவது

$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

இந்தக் கணக்குகளையெல்லாம் சேர்த்துப் பார்க்கலாம்.

$$-2+2=2-2=0$$
$$-5+5=5-5=0$$
$$-4+6=6-4=2$$
$$-6+4=4-6=-2$$
$$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

இதிலிருந்து என்ன புரிந்து கொள்ளலாம்?

ஒரு மிகை எண்ணின் குறையுடன் ஒரு மிகை எண் கூட்டுக என்பதன் பொருள், இரண்டாவது எண்ணிலிருந்து முதல் எண்ணை கழிக்கவும் என்பதாகும்.

இயற்கணித மொழியில் கூறினால்

x, y என்ற எந்த மிகை எண்களெடுத்தாலும்

$$-x+y=y-x$$

கீழே கூறப்பட்டுள்ளவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $-4+9$ (ii) $-9+4$ (iii) $-15+8$

(iv) $-8+15$ (v) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ (vi) $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

வேகத்தின் கணிதம்

பூமியிலிருந்து மேல்நோக்கி எறியும் ஒரு பொருள் உயர்ந்து உயர்ந்து போகும் போது ஒவ்வொரு நிலையிலும் வேகம் குறையும்; குறைந்து குறைந்து வேகம் பூஜ்யமாகும் போது கீழ்நோக்கி விழத் தொடங்கும். இந்த திரும்பும் பயணத்தில் வேகம் கூடிக்கூடி வரும். இறுதியில் நிலத்தில் விழும்.

நேராக மேல் நோக்கிதான் எறிகிறோமெனில், ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர் வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் குறையும். எடுத்துக்காட்டாக, 49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் நேராக மேல்நோக்கி எறியும் பொருளின் வேகம் t வினாடி கழியும் போது 1 மீட்டர் /வினாடி ஆகும். 2 வினாடிகள் கழியும் போது $49-9.8=39.2$ மீட்டர்/வினாடி ஆகும். 5 வினாடிகள் கழியும் போது வேகம் $49-(2\times 9.8)=29.4$ மீட்டர்/வினாடி ஆகும்.

5 வினாடி கழியும்போது வேகம்

$$49-(5\times 9.8)=0$$

ஆகும். தொடர்ந்து ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர்/ வினாடி என்ற வீதத்தில் கூடுகின்ற வேகத்தில் கீழ்நோக்கி விழத் தொடங்கும். எறிந்த பின் 7 வினாடிகள் ஆகும் போது?

விழத் தொடங்கி $7-5=2$ வினாடி ஆனது. அப்போது வேகம் பூஜ்யத்திலிருந்து 2×9.8 மீட்டர்/வினாடி அதிகரித்தது. அதாவது 19.6 மீட்டர்/ வினாடி.

இதை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி சுருக்கி எழுதலாம், எரிந்த பின் 1 வினாடி ஆகும் போது உள்ள வேகம் எவ்வளவு?

$t<5$ எனில், வேகம்

$49-9.8\,t$ மீட்டர்/வினாடி

$t>5$ ஆனால்? கீழ்நோக்கியுள்ள பயணம் தொடங்கி

$t-5$ வினாடி ஆனது. அப்போது வேகம்

$(t-5)\times 9.8=9.8t-49$ மீட்டர் /வினாடி.

மீண்டும் கழிக்கலாம்

தவறான விடைகளுக்கு 1 மதிப்பெண் கழிக்கும் தேர்வில் முதல் 2 விடைகளும் தவறானால், மொத்த மதிப்பெண் எவ்வளவு ஆகும்?

அடுத்த விடையும் தவறு ஆனால்?

3 விடைகள் தவறு ஆனதால் மதிப்பெண் -3 அல்லவா? இதை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். முதல் இரண்டு விடைகள் தவறான போது மதிப்பெண் -2. அடுத்ததும் தவறானதால் மேலும் 1 மதிப்பெண் கழிக்க வேண்டும், அதாவது $-2 - 1$. அப்போது

$$-2 - 1 = -3$$

அடுத்த இரண்டு விடைகளும் தவறானால்?

5 விடைகள் தவறானது; மதிப்பெண் -5. வேறொரு முறையில் பார்த்தால்,

-3 இல் இருந்து மீண்டும் 2 குறைந்தது. அதாவது $-3 - 2$

இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$-3 - 2 = -5$$

அப்போது $-5 - 3$ எவ்வளவு?

-5 என்றால் 0 ஐ விட 5 குறைவு; மீண்டும் 3 குறைந்தால்? மொத்தம் எவ்வளவு குறையும்? அதாவது

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

இதுபோல $-5 - 7$ கணக்கிடலாமல்லவா?

$$-5 - 7 = -(5 + 7) = -12$$

பொதுவாகக் கூறினால்

ஒரு மிகை எண்ணின் குறையிலிருந்து வேறொரு மிகை எண் கழித்தால், இந்த மிகை எண்களின் தொகையின் குறை கிடைக்கும்.

இதை இயற்கணிதத்தில் ஆக்கினால்?

> **x, y என்ற எந்த மிகை எண்களெடுத்தாலும்**
>
> $$-x - y = -(x + y)$$

குறை வேகம்

49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் மேல் நோக்கி எறியப்பட்ட ஒரு பொருளின் வேகத்தை எழுதியது இரண்டு இயற்கணித வாக்கியங்கள் பயன்படுத்தியல்லவா.

$t < 5$ எனில் $v = 49 - 9.8t$

$t > 5$ எனில் $v = 9.8t - 49$

மேல் நோக்கியுள்ள வேகத்தை மிகை எண்ணாலும் கீழ் நோக்கியுள்ள வேகத்தை குறை எண்ணாலும் குறிப்பிட்டால் எந்த நேரத்திலுள்ள வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க

$$v = 49 - 9.8t$$

என்ற ஒரு இயற்கணித வாக்கியம் போதும். எடுத்துக்காட்டாக, எறிந்து 8 வினாடிகள் கழியும் போது வேகம்

$49 - (9.8 \times 8) = -29.4$ மீட்டர்/வினாடி.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

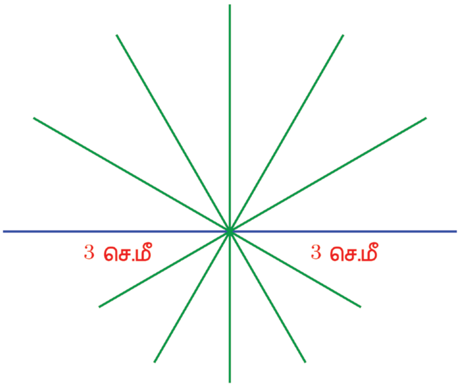
(i) $-3 - 1$	(iv) $-7 - 8$	(vii) $8 - 12$	(x) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
(ii) $-19 + 4$	(v) $-1 - 1$	(viii) $1\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$	(xi) $-2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$
(iii) $-10 - 4$	(vi) $-10 + 20$	(ix) $-25 - 3\frac{1}{2}$	(xii) $-3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$

7

இருசமவெட்டிகள்

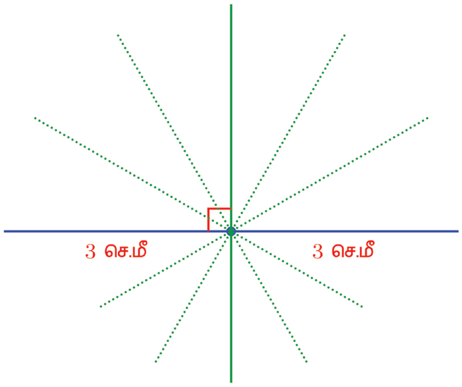
கோட்டின் இருசமவெட்டிகள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு கோட்டை இரண்டு சம பாகங்களாக வெட்டுகின்ற கோடுகளையெல்லாம் அந்தக் கோட்டின் **இருசமவெட்டிகள் (Bisectors)** எனக் கூறலாம்.

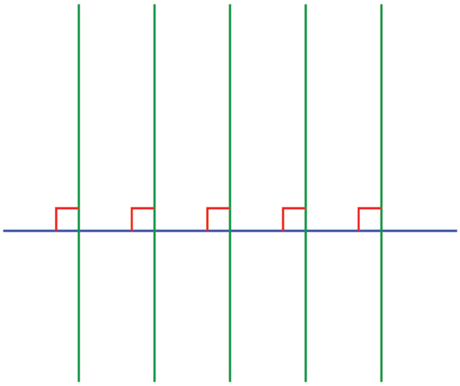
அவற்றில் ஒன்று மட்டுமே, கோட்டிற்கு செங்குத்தாகிறது.



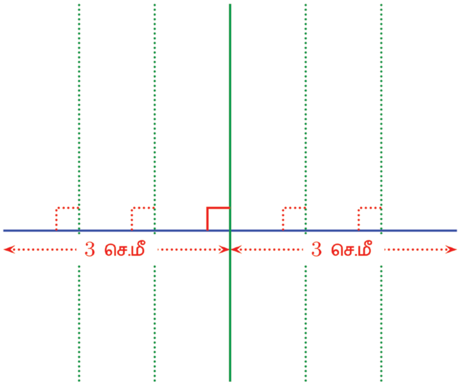
இந்த இருசமவெட்டியைக் கோட்டின் **செங்குத்து இருசமவெட்டி (Perpendicular bisector)** எனக் கூறலாம்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்.

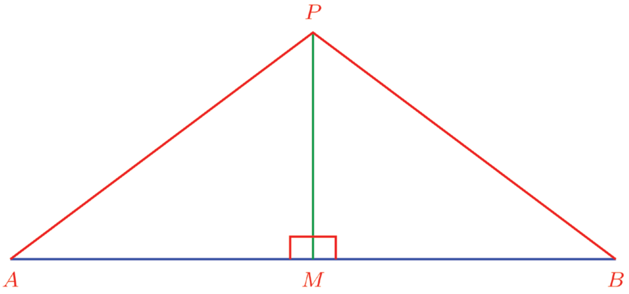
ஒரு கோட்டின் எந்தப் புள்ளி வழியாகவும் கோட்டிற்கு செங்குத்துக் கோடு வரையலாமல்லவா.



இவற்றில் ஒரு செங்குத்துக்கோடு மட்டுமே, கோட்டின் மையப்புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்கிறது; அதுவே கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி.



இனி இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும் AB என்ற கோட்டின் முனைகள், AB இன் இருசம வெட்டியிலுள்ள P என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



AP, BP என்ற கோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் எனத் தெரிகிறதல்லவா?

ஊகம் சரியா என பரிசோதிக்கலாம்.

AMP, BMP என்ற செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணங்களல்லவா AP யும் BP யும்.

அப்போது பைதாகரஸ் கருத்தின்படி,

$$AP^2 = AM^2 + MP^2$$

$$BP^2 = BM^2 + MP^2$$

(ஏழாம் வகுப்பில் **சதுரங்களும் செங்கோண முக்கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **செவ்வகமும் சதுரமும்** என்ற பகுதி).

இவற்றில் AM, BM என்ற நீளங்களைக் குறித்து என்ன கூறலாம்? AB யின் இருசமவெட்டியல்லவா PM. எனவே, $AM = BM$. அப்போது AP, BP என்ற நீளங்கள்?

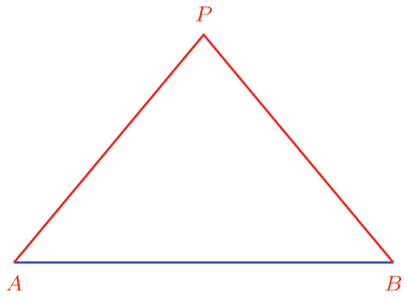
$$AP = BP$$

இப்போது மேலே கூறப்பட்டுள்ளவற்றை ஒரு பொதுக்கருத்தாக எழுதலாம்.

ஒரு கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் எந்த புள்ளியும் கோட்டின் முனைகளிலிருந்து ஒரே தூரத்திலாகும்.

அப்போது ஒரு வினா: இதனை திருப்பிக் கூறினாலும் சரியாகுமா?

அதாவது ஒரு கோட்டின் முனைகளிலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ள எந்த புள்ளியும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலுள்ள புள்ளி ஆகுமா?



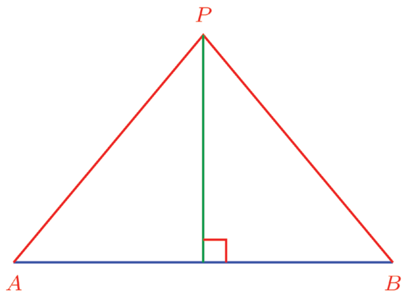
AB என்ற ஒரு கோடு வரைந்து Perpendicular Bisector டூல் பயன்படுத்தி கிளிக் செய்தால் செங்குத்து இருசமவெட்டி கிடைக்கும். இந்த செங்குத்து இருசமவெட்டியில் C என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி AC, BC என்ற கோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளம் அடையாளப்படுத்தவும். C ன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

படத்தில் AB என்ற கோட்டின் முனைகளான A, B என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ள புள்ளி P ஆகும்.

AB இன் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலுள்ள புள்ளி P ஆகுமா என அறிய வேண்டும்

இந்த வினா வேறொரு முறையிலுமாகலாம்: P இலிருந்து AB க்கு உள்ள செங்குத்துக் கோடு AB இன் இருசமவெட்டியா?

இந்தச் செங்குத்துக்கோட்டை வரைந்து பார்க்கவும்:



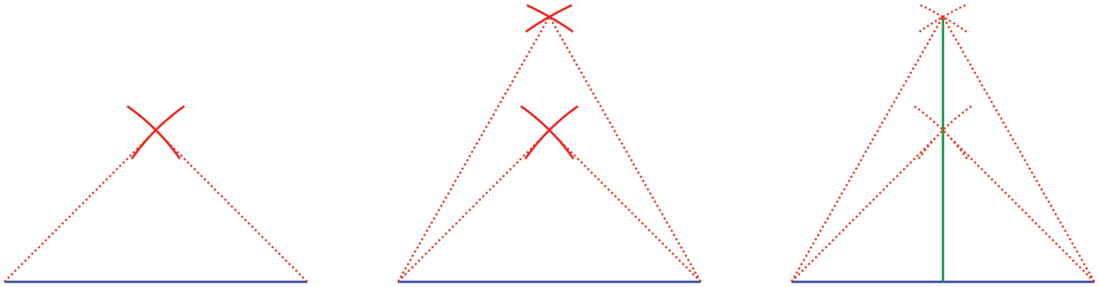
P என்ற புள்ளி A யிலிருந்தும் B யிலிருந்தும் ஒரே தூரத்திலல்லவா. அதாவது $AP = BP$, எனவே APB என்பது இருசமபக்க முக்கோணமாகும் இந்த முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்கள் இணைகின்ற உச்சியான P யிலிருந்துள்ள செங்குத்து, எதிர்பக்கமான AB யை சமபாகம் செய்யுமல்லவா. (**சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இருசமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி). அதாவது P என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள செங்குத்துக்கோடு AB இன் செங்குத்து இருசமவெட்டியாகும்.

மேலே கூறப்பட்ட கருத்தை திருப்பிக் கூறினாலும் சரியாகும்.

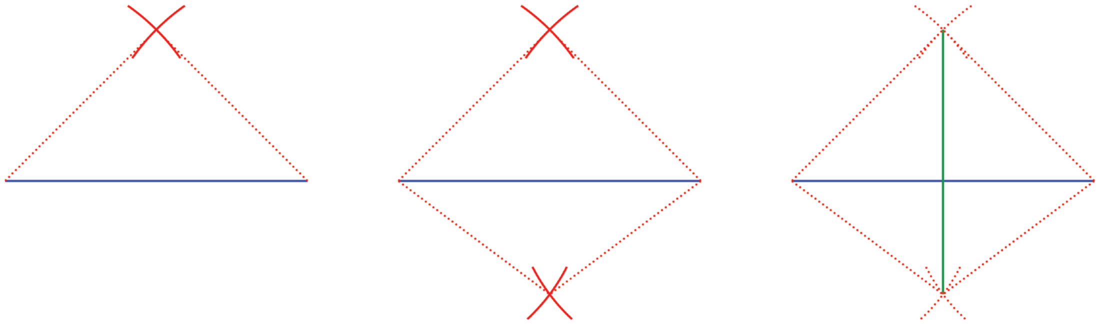
ஒரு கோட்டின் முனைகளிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் வெட்டுகின்ற எந்த புள்ளியும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலாகும்.

min = 0, max = 10, increment = 0.01 ஆகும் விதம் ஒரு Slider a உருவாக்கவும் AB என்ற ஒரு கோடு வரைந்து A, B என்ற புள்ளிகளை மையமாக எடுத்து a ஐ ஆரமாக எடுத்து ஒவ்வொரு வட்டம் வரையவும். வட்டங்கள் வெட்டுகின்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி அவற்றின் Trace கொடுக்கவும். சிலைடருக்கு Animation கொடுத்துப் பார்க்கவும்.

இதன்படி ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ள இவ்வாறான இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தால் அவை இரண்டும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலாகும். அப்போது இந்த இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோடுதான் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி. (ஒரு கோடு வரைய அதிலுள்ள ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் போதுமல்லவா).



ஒரே தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துவது, கோட்டின் இரு பக்கங்களிலுமாகலாம்.



செங்கோணமானியையோ, கோணமானியையோ பயன்படுத்தாமல் ஒரு கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி வழியாக செங்குத்துக்கோடு வரையவும் இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

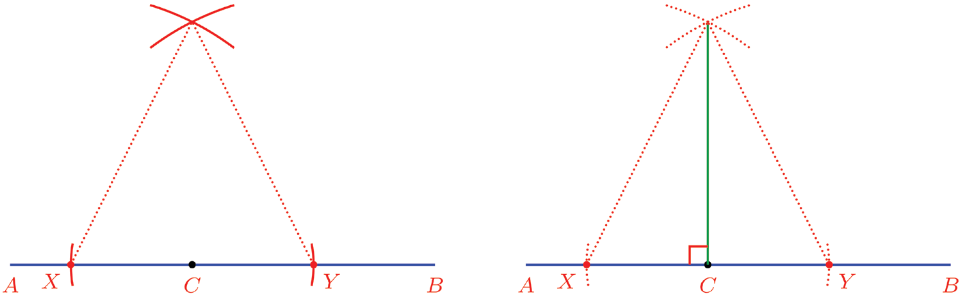
எடுத்துக்காட்டாக, படத்தில் AB என்ற கோட்டில் C என்ற புள்ளி வழியாக AB க்கு செங்குத்துக் கோடு வரையலாம்:

C மையப்புள்ளியான ஒரு சிறிய பகுதி AB இல் அடையாளப்படுத்தி, அந்த பகுதியின் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைந்தால், C இன் வழியாக AB க்கு செங்குத்தான கோடாகுமல்லவா.

அதற்கு முதலில் AB இல் C இன் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே தூரத்தில் X, Y என்ற இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தலாம்.

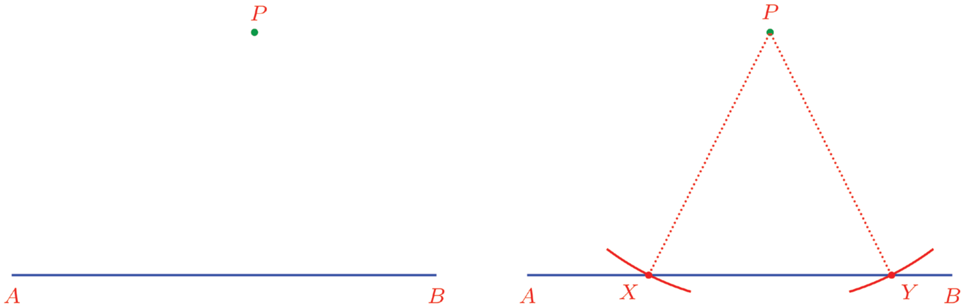
அப்போது C என்ற புள்ளி XY ன் மையப் புள்ளியாகும்; எனவே XY இன் செங்குத்து இருசமவெட்டி C இன் வழியாகச் செல்லும்.

இந்த சமவெட்டியில் வேறொரு புள்ளி கிடைக்க, X இலிருந்தும் Y இலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தினால் போதுமல்லவா. இனி C வழியாக AB க்கு செங்குத்தான கோடு வரையலாமல்லவா?



கோட்டில் இல்லாத ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோடு வரையவும் இதைப் போன்று ஒரு வழி இருக்கிறது.

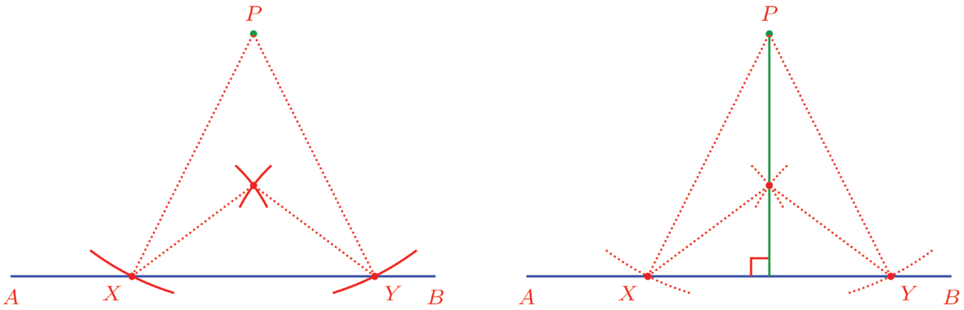
முதலில் புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் கோட்டில் அடையாளப்படுத்தவும்:



படத்தில் P இலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் X, Y ஆகும்.

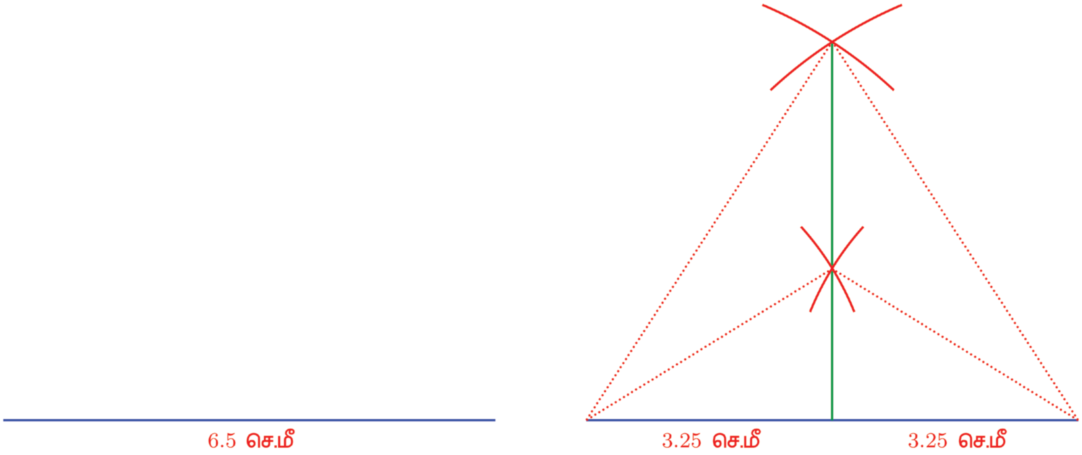
அப்போது XY இன் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலுள்ள ஒரு புள்ளி P ஆகும்.

X இலிருந்தும் Y இலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் வேறொரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தினால் அதனை P யுடன் இணைத்து, XY இன் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரையலாம். இந்த இருசமவெட்டி AB க்கு செங்குத்தும் அல்லவா.

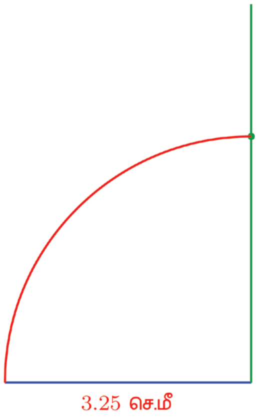


இனி இவற்றையெல்லாம் பயன்படுத்தி பக்கங்களின் நீளம் 3.25 சென்டிமீட்டர் ஆன சதுரம் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

6.5 சென்டி மீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைந்தால், 3.25 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு கிடைக்கும்.

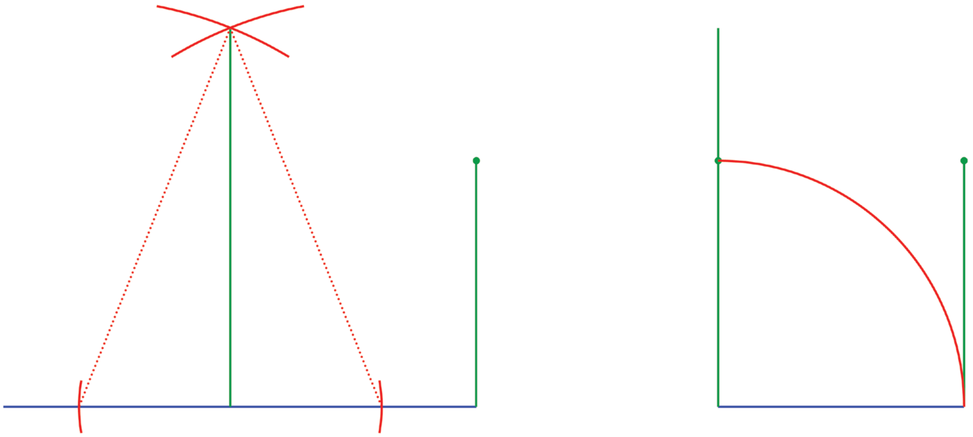


இனி இந்த செங்குத்து இருசமவெட்டியில் கீழே உள்ள கோட்டின் பாதி நீளம் அடையாளப்படுத்தினால், சதுரத்தின் இரண்டு பக்கங்களாகும்.

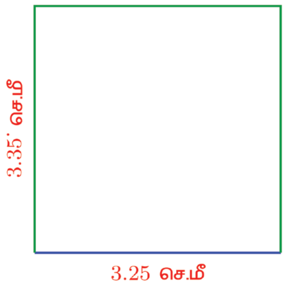


(இவ்வளவும் ஆனால் கோணமானியோ செங்கோணமானியோ பயன்படுத்தி செங்குத்துக்கோடு வரைந்து சதுரம் வரைய முன் வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோமல்லவா. இவையொன்றும் பயன்படுத்தாமல் தான் இங்கே வரையப்படுகிறது).

மூன்றாவது பக்கம் கிடைக்க, அடிப்பக்கத்தின் இடதுமுனையிலிருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைந்து, அதன் கீழே உள்ள பக்கத்தின் நீளம் அடையாளப்படுத்தலாம். (செங்குத்துக்கோடு வரைய அடிப்பக்கத்தை சற்று இடது பக்கமாக நீட்ட வேண்டும்):



இனி செங்குத்துக் கோடுகளின் மேல் முனைகளை இணைத்தால் நமக்குத் தேவையான சதுரம் கிடைக்கும். (ஏன்?)



இந்தச் சதுரம் வரைய அளவுகோலும் கவராயமும் மட்டுமே பயன்படுத்தப்பட்டது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

அளவுகோலும் கவராயமும் மட்டும் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை வரையவும்:

(1) பக்கங்களின் நீளம் $4\frac{1}{4}$ சென்டிமீட்டர் ஆன சதுரம்.

(2) பக்கங்களின் நீளம் $5\frac{1}{4}$ சென்டிமீட்டரும், $3\frac{1}{4}$ சென்டிமீட்டரும் ஆன செவ்வகம்.

(3) பக்கங்களெல்லாம் 2.75 சென்டிமீட்டர் ஆன சமபக்க முக்கோணம்.

(4) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 4.5 சென்டிமீட்டரும், பரப்பளவு 9 சதுரசென்டிமீட்டரும் ஆன ஒரு முக்கோணம்.

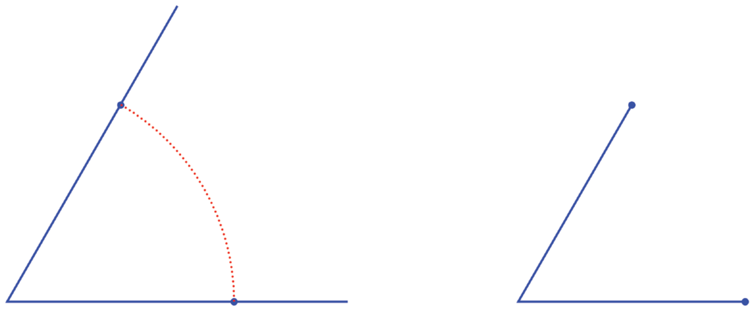
கயிறும் கணிதமும்

பழங்கால வடிவியலின் அடிப்படை நூலான எலமென்ஸ் குறித்து கேட்டிருக்கிறீர்கள் அல்லவா. இதில் கோடுகளையும், வட்டங்களையும் பயன்படுத்தி வரையக் கூடிய வடிவங்களை மட்டுமே யூக்ளிட் முன்னுரிமை அளித்துள்ளார். வேறொரு முறையில் கூறினால் நீங்கள் அடையாளப்படுத்தாத, நேரான ஒரு கம்பும் (Straight edge) கவராயமும் பயன்படுத்தி வரையக் கூடிய வடிவங்கள் மட்டும். ஏன் இவ்வாறு? பழங்காலங்களில் நீளம் அளப்பதற்கும், வரைவதற்கும் நூல் அல்லது கயிறு பயன்படுத்தப்பட்டது. கயிற்றைப் பயன்படுத்தி வரைய இயலுவது கோடும் வட்டமும் ஆகும். இரு கம்புகளின் இடையே கயிற்றை இழுத்துக் கட்டினால் கோடு உண்டாகிறது. ஒரு கம்பை மாற்றிவிட்டு கயிற்றைச் சுழற்றினால் வட்டம் ஆகிறது.

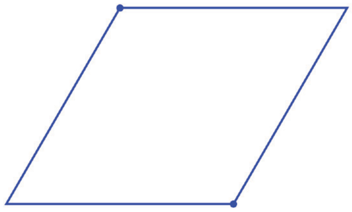
பல்வேறு வடிவங்கள் வரைவதற்கு உரிய கருவிகளை உருவாக்க இயலுகின்ற இன்று, இத்தகைய உருவாக்கங்களுக்கு வரலாறு சார்ந்ததும் சித்தாந்தம் சார்ந்த துமான முக்கியத்துவம் உண்டு.

சாய்வுசதுரங்கள்

ஒரு கோணம் வரைந்து, அதன் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே நீளம் அடையாளப்படுத்தவும்:



இனி மேலே அடையாளப்படுத்தப்பட்ட புள்ளியின் வழியாக கிடைமட்டக் கோட்டிற்கும், கீழேயுள்ள புள்ளியின் வழியாக சாய்வான கோட்டிற்கும் இணையான கோடுகள் வரைந்து ஒரு நாற்கரம் வரையவும்:

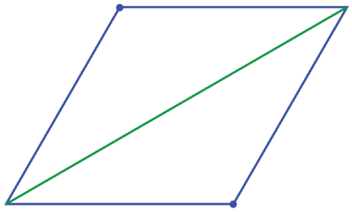


இது ஒரு இணைகரமல்லவா; அதனால் எதிர் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும். (**சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

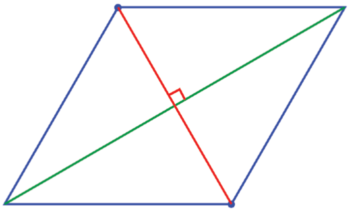
முதலில் வரைந்த இரண்டு பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமல்லவா? அப்போது இந்த இணைகரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும்.

இவ்வாறு பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமான இணைகரத்திற்கு **சாய்வுசதுரம் (Rhombus)** எனப் பெயர்.

இதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தைப் பார்த்தால், அது கடந்து செல்கின்ற உச்சிகளிலிருந்து ஒரே தூரத்திலல்லவா மற்ற இரண்டு உச்சிகளும்?



அப்போது இந்த இரண்டு உச்சிகளும் மூலைவிட்டத்தின் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலாகும்; அதாவது அவற்றை இணைத்து வரைகின்ற இரண்டாவது மூலைவிட்டமே முதல் மூலைவிட்டத்தின செங்குத்து இருசமவெட்டி:



இதைப்போல, முதலில் சிறிய மூலைவிட்டம் வரைந்து தொடங்கினால், அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டியே பெரிய மூலைவிட்டம் எனவும் காணலாம்.

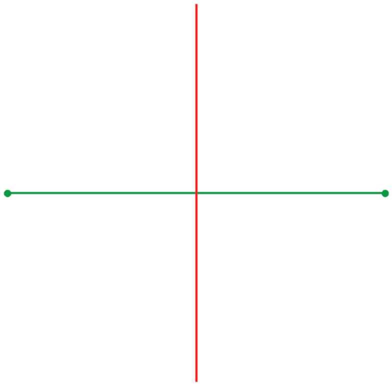
இதனை ஒரு பொதுக்கருத்தாகக் கூறலாம்:

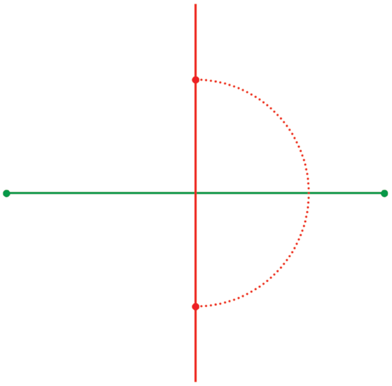
எந்த சாய்வுசதுரத்திலும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இரு சமவெட்டிகளாகும்.

இங்கு கேட்க இயலும் ஒரு வினா உள்ளது:

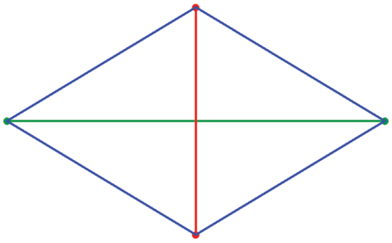
மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகளான ஒரு நாற்கரம் வரைந்தால், அது ஒரு சாய்வுசதுரமாகுமா? முதலில் இவ்வாறான ஒரு நாற்கரம் வரைந்து பார்க்கலாம். அதற்கு ஒரு கோடும், அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டியும் வரையவும்;

மையப்புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலுமாக இருசமவெட்டியில் ஒரே நீளம் அடையாளப்படுத்தவும்:





இந்தப் புள்ளிகள் முதல் கோட்டின் முனைகளுடன் இணைத்தால், மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கின்ற நாற்கரமானது அல்லவா?



இது ஒரு சாய்வுசதுரமா என்பதே வினா

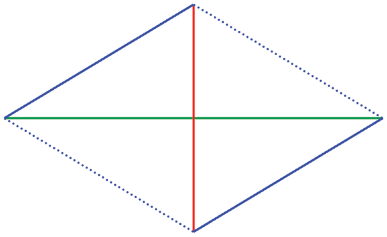
மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆனதால், அவை நாற்கரத்தை நான்கு செங்கோண முக்கோணங்களாக பிரிக்கிறதல்லவா.

சிவப்பு நிறக் கோடு, பச்சைநிறக்கோட்டை சமபாகம் செய்வதால், முக்கோணங்களில் பச்சைநிற பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும்; மாறாக பச்சை நிறக் கோடு சிவப்பு நிறக் கோட்டை சமபாகம் செய்வதால் முக்கோணங்களில் சிவப்பு நிற பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும்.

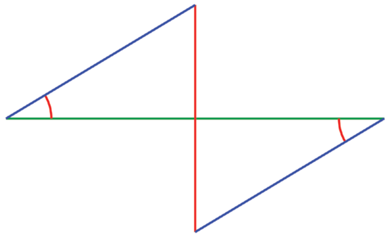
அப்போது பைதாகரஸ் கருத்திற்கு ஏற்ப இந்த நான்கு முக்கோணங்களிலும் கர்ணங்களான நான்கு நீல நிறக் கோடுகளுக்கும் ஒரே நீளமல்லவா.

அதாவது, இந்த நாற்கரத்தின் பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமாகும்.

இனி, இந்த நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்களின் ஜோடிகள் இணையானதா எனப் பார்க்க வேண்டும். இடதுப்பக்கத்தில் மேலேயும், வலது பக்கத்தில் கீழேயுமுள்ள பக்கங்களைப் பார்க்கலாம்:



இவை இணையானதாகுமா எனப் பார்க்க, கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் கோணங்கள் சமமாகுமா எனப் பார்த்தால் போதுமல்லவா.

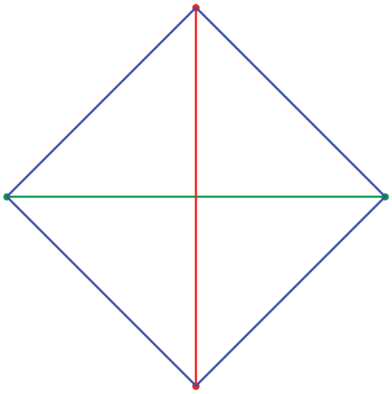


படத்திலுள்ள முக்கோணங்களுக்கு ஒரே பக்கங்களானதால், இந்தக் கோணங்கள் சமமாகும்; எனவே நீலநிறக் கோடுகள் இணையானதாகும்.

அப்போது இந்த நாற்கரத்தில் ஒரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் சமமானதும் இணையானதுமாகும்; எனவே, அது ஒரு இணைகரமாகும். (சம **முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு பக்கங்கள்** என்ற பகுதி). இங்கே பார்த்தது என்ன?

ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் எனில், அந்த நாற்கரம் ஒரு சாய்வுசதுரமாகும்.

மூலைவிட்டங்களும் சமம் ஆனால்?



நான்கு செங்கோண முக்கோணங்களும் இரு சமபக்க முக்கோணங்களாகும் . அப்போது ஒவ்வொரு உச்சியிலுள்ள கோணமும் 90° ஆகும். சாய்வுசதுரம் சதுரமாகும்.

அப்போது சதுரம் வரைய புதிய ஒருமுறையும் கிடைத்தது. மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர் உள்ள சதுரம் வரைந்து பார்க்கவும்.

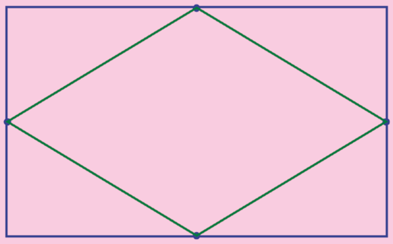
(1) மூலைவிட்டங்களின் நீளம் கீழே கூறப்பட்டுள்ள முறையில் சாய்வுசதுரம் வரையவும்.

(i) 6 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர்

(ii) 6.5 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர்

(iii) 6 சென்டிமீட்டர், 4.5 சென்டிமீட்டர்

(2) படத்தில் ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



(i) இந்த நாற்கரங்களின் மூலைவிட்டங்கள் செவ்வகத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையானதாகுமா? ஏன்?

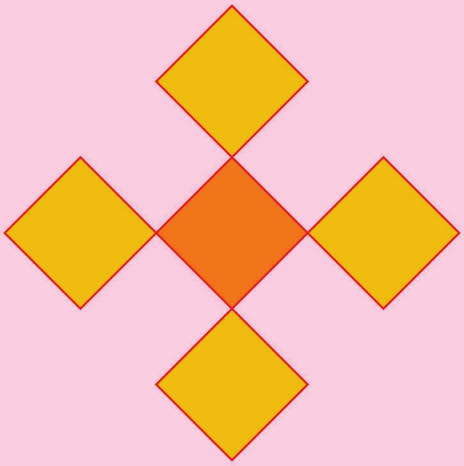
(ii) இந்த நாற்கரம் சாய்வுசதுரமா? ஏன்?

(3) மூலைவிட்டங்களின் நீளம் 6.5 சென்டிமீட்டரும், 4.5 சென்டிமீட்டரும் ஆன சாய்வுசதுரம் வரையவும்

(4) எந்த சாய்வுசதுரத்தினுடையவும் மூலைவிட்டங்கள், அவை இணைகின்ற உச்சிகளிலுள்ள கோணங்களை சமபாகம் செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

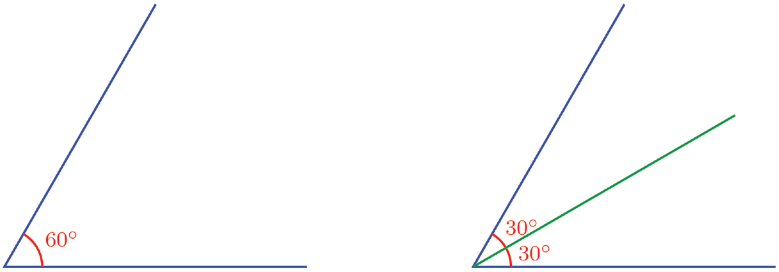
(5) மூலைவிட்டத்தின் நீளம் 7 சென்டிமீட்டர் ஆன சதுரம் வரைக.

(6) இந்தப் படம் வரைக.



கோணத்தின் இருசமவெட்டி

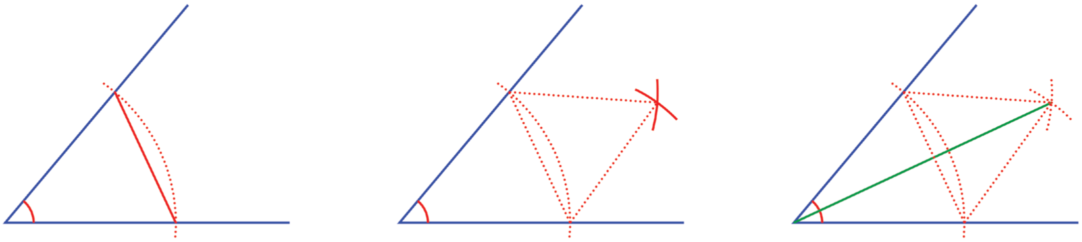
ஒரு கோணத்தை இரண்டு சமபாகங்களாக்குகின்ற கோட்டை, **கோணத்தின் இருசமவெட்டி (angle bisector)** என்று கூறலாம்.



ஒரு கோணத்தின் இருசமவெட்டி வரைவது எவ்வாறு?

ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்கள் இணைகின்ற உச்சியிலிருந்து எதிர்பக்கத்திற்கு வரைகின்ற செங்குத்துக்கோடு, உச்சியிலுள்ள கோணத்தை சமபாகம் செய்யும் எனப் பார்த்தோமல்லவா.

கோணத்தின் இரு பக்கமும், உச்சியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தினால் இருசமபக்க முக்கோணம் கிடைக்கும்; கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து இந்த இருசமபக்க முக்கோணத்தின் எதிர்பக்கத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் கோணத்தின் இருசமவெட்டியும் ஆகும்:

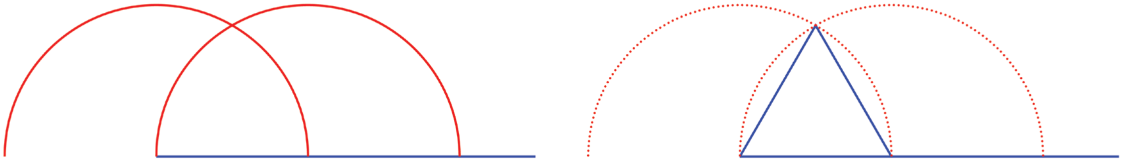


இந்த முறையில் அளவுகோலும் கவராயமும் மட்டும் பயன்படுத்தி $30°$ கோணம் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

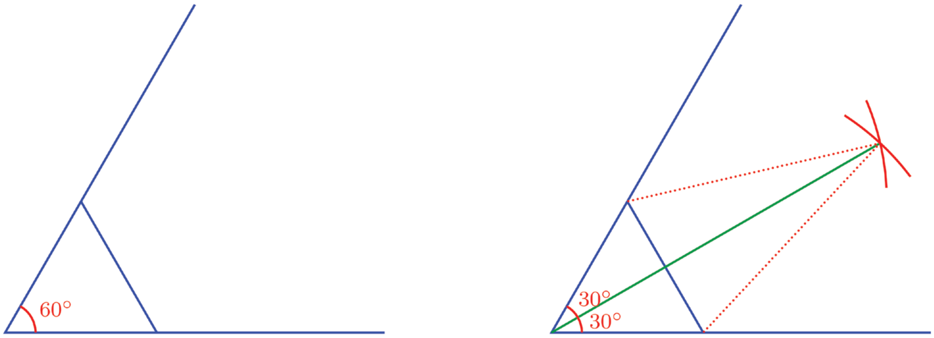
முதலில் $60°$ கோணம் வரையலாம்.

அதற்கு ஒரு கோடு வரைந்து அதன் ஒரு முனை உச்சியான சமபக்க முக்கோணம் வரைந்தால் போதுமல்லவா.

(ஏழாம் வகுப்பில் **முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **நட்சத்திரப் படம்** என்ற பகுதி).



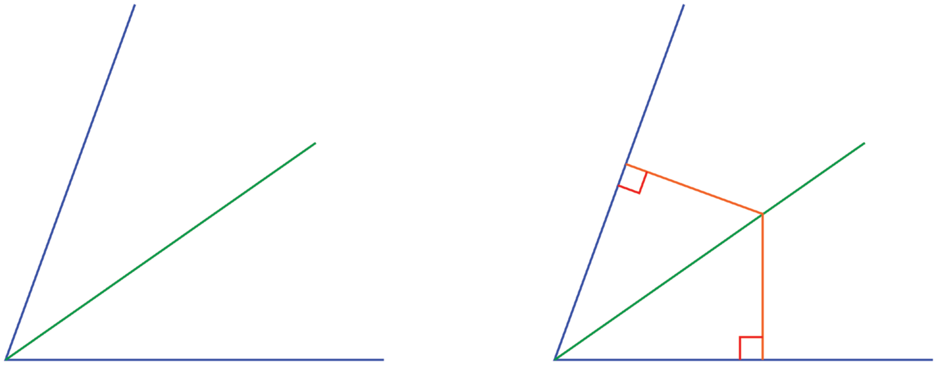
சமபக்க முக்கோணத்தின் கோணங்களெல்லாம் $60°$ ஆனதால், முதலில் வரைந்த கோட்டின் ஒரு முனையில் $60°$ கோணமாகும்; அதன் இருசமவெட்டி வரைந்தால் $30°$ கோணமுமாகும்.



ஒரு கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலுள்ள எந்தப்புள்ளியும் கோட்டின் இருமுனைகளிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் எனவும், மாறாக ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் சந்திக்கும் புள்ளிகளெல்லாம் செங்குத்து இருசமவெட்டியிலாகும் எனவும் பார்த்தோமல்லவா.

இது போன்ற ஒரு பண்பு கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளுக்கும் உள்ளது.

அதைக் கண்டுபிடிக்க, ஒரு கோணமும் அதன் இருசமவெட்டியும் வரைக; இருசமவெட்டியில் உள்ள ஏதேனும் புள்ளியிலிருந்து கோணங்களின் பக்கங்களுக்கு செங்குத்து வரைக:



இரண்டாவது படத்தில் மேலேயும் கீழேயும் இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் இருக்கிறதல்லவா. பச்சை நிறக்கோடு, கோணத்தின் இருசமவெட்டி ஆனதால், இந்த முக்கோணங்களில் ஒரு ஜோடி கோணங்கள் சமம் ஆகும். இரண்டும் செங்கோண முக்கோணம் ஆனதால் மூன்றாவது கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

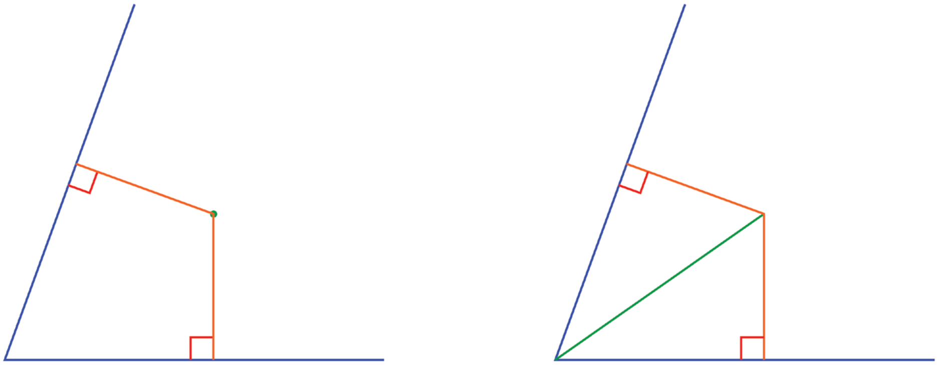
இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கர்ணம் அல்லவா. அதன் இரண்டு முனைகளிலும் உள்ள கோணங்களும் சமமாகும். அப்போது முக்கோணங்களின் சிவப்புநிற பக்கங்களும் சமமாகும்.

அதாவது, இருசமவெட்டியிலுள்ள எந்த புள்ளியிலிருந்தும் பக்கங்களுக்கு ஒரே செங்குத்துத் தூரமாகும்.

ஒரு கோணம் *ABC* வரைக. Angle Bisector டூல் பயன்படுத்தி *A, B, C* இவற்றில் வரிசையாக கிளிக் செய்தால், கோணத்தின் இரு சமவெட்டி கிடைக்கும். இதில் *D* என்ற ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தி, *D* இலிருந்து கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு செங்குத்துகள் வரையவும். இந்த செங்குத்துகள் பக்கங்களுடன் சந்திக்கும் புள்ளிகளை *E, F* என அடையாளப்படுத்தவும். *DE, DF* என்ற கோடுகள் வரைந்து நீளம் அடையாளப்படுத்தவும். *D* இன் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

மாறாக, கோணத்தின் பக்கங்களிலிருந்து ஒரே செங்குத்துத் தூரத்திலுள்ள புள்ளிகள் கோணத்தின் இருசமவெட்டியில் இருக்குமா?

அவ்வாறான ஒரு புள்ளியை கற்பனை செய்து கோணத்தின் உச்சியுடன் இணைத்துப் பார்க்கலாம்.



இப்போதும் ஒரே கர்ணமுள்ள இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைத்தன. இவற்றின் சிவப்பு நிற பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமுமாகும். எனவே பைதாகரஸ் கருத்தின்படி, மூன்றாவது பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் ஆகும். இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்களுக்கெல்லாம் ஒரே நீளமானதால், கோணங்களுக்கும் ஒரே அளவாகும். முக்கோணங்களின் இடது உச்சிகளிலுள்ள கோணங்கள், முதல் கோணத்தை பச்சை நிறக்கோடு பிரித்தது அல்லவா. இவை சமமானதால், இந்தக் கோடு கோணத்தின் இருசமவெட்டியாகும்.

அப்போது ஒரு கோணத்தின் இருசமவெட்டியைக் குறித்து என்ன கூறலாம்?

ஒரு கோணத்தின் இருசமவெட்டியிலுள்ள புள்ளிகளெல்லாம் கோணத்தின் பக்கங்களிலிருந்து ஒரே செங்குத்து தூரத்திலாகும்; மாறாக, ஒரே கோணத்தின் பக்கங்களிலிருந்து ஒரே செங்குத்துத் தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளெல்லாம் கோணத்தின் இருசமவெட்டியிலாகும்.

(1) கீழே கூறப்பட்டுள்ள கோணங்களை வரைக.

(i) $37\frac{1}{2}^\circ$ (ii) $62\frac{1}{2}^\circ$

(2) அளவுகோலும், கவராயமும் மட்டும் பயன்படுத்தி கீழே கூறப்பட்டுள்ளவற்றை வரைக.

(i) கீழே கூறப்பட்டுள்ள கோணங்கள்

(i) 45° (ii) 135° (iii) 75° (iv) 15°

(ii) ஒரு பக்கம் 6 சென்டிமீட்டரும், அதன் முனைப்புள்ளிகளிலுள்ள கோணங்கள் $67\frac{1}{2}^\circ$ உம் $22\frac{1}{2}^\circ$ உம் உள்ள முக்கோணம்.

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

பாகம் 4 அ

இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

51 அ பிரிவுக்கூறு

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதினான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

குழந்தைகளின் உரிமைகள்

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:

கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்

ஸ்ரீ கணேஷ், TC. 14/2036, வான்ரோஸ் ஜங்ஷன்,

கேரளா பல்கலைகழகம் P.O, திருவனந்தபுரம்–34, தொலைபேசி : 0471–2326603

இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்-1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்-1090, நிர்பயா-1800 425 1400

கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் - 0471-324300/44000/45000

*Online **R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***