# கணிதம்

## பகுதி - 2

## வகுப்பு
# VIII

**Mathematics**
**Part - 2**
**Std VIII**
**Tamil Medium**

கேரளஅரசு
பொதுக்கல்வித்துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2025

## தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

## உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர்.எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நலத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

**கணிதம்**

**8**

**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
*Printed at* : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

**அன்பு மாணவர்களே,**

பலவகை அளவுகளைக் குறிப்பிட எண்ணல் எண்களையும் பின்ன எண்களையும் பயன்படுத்துவது எவ்வாறு என முன் வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். அளவுகளின் செயல்களை மட்டளவுகளின் செயல்களாக மாற்றுவதும், அவற்றைக் குறித்துள்ள பொதுக்கருத்துகளை இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதுவதும் கற்றிருக்கிறோம். செவ்வகம், முக்கோணம், வட்டம் போன்ற வடிவியல் வடிவங்களின் பல சிறப்பியல்புகளை பகுத்தறியவும் செய்தோம்.

இத்தகைய கல்வியின் தொடர்ச்சியே இந்தப் புத்தகம். அளவுகளும் அவற்றைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களும் தொடர்பான சில பிரச்சனைகளுக்கு இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி தீர்வு காணும் முறை இங்கு ஆரம்பமாகிறது. இயற்பியல் பிரச்சனைகளை கணிதப் பிரச்சனைகளாக மாற்றி, இயற்கணிதம் வழியாக விடையைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை பெரும்பாலும் எல்லா அறிவியல்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே கணிதக் கற்றலின் எல்லா நிலைகளிலும் இதற்கு முக்கியத்துவம் உண்டு.

ஏழாம் வகுப்பில் பல்வேறு அளவுகளில் முக்கோணம் வரைந்த அனுபவம், இங்கு சம முக்கோணங்கள் என்ற கருத்தாக வளர்கிறது. தொடர்ச்சியான கற்றலில் இது முக்கோணவியல் என்ற கணிதப் பிரிவாக வளர்கிறது. நேரிடையாக அளக்க இயலாத தூரங்களையும் உயரங்களையும் கணக்கிட உதவுகிறது.

கணிதப் பயன்பாடுகளின் முக்கியத்துவத்தையும், கணித உத்தியின் அழகையும் அதிகமாகப் புரிந்து கொள்ள இந்தப் புத்தகம் உதவும் என்பதே எதிர்பார்ப்பு,

வாழ்த்துக்களுடன்,

**முனைவர் ஜெயப்பிரகாஷ் ஆர்.கெ.**
இயக்குநர்
எஸ்.சி.இ.ஆர்.டி கேரளம்

# TEXTBOOK DEVELOPMENT TEAM

## Advisor

**Dr. E. Krishnan**
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University College, Thiruvananthapuram

## Chairperson

**Dr. Shikhi M.**
Professor,
College of Engineering Trivandrum,
Thiruvananthapuram.

## Experts

**Dr. P. Ramesh Kumar**
Head (Retd.), Department of Mathematics,
University of Kerala
Karyavattom, Thiruvananthapuram

**Dr. Sukesh A.**
Associate Professor,
Government College of Engineering,
Kannur

## Participants

**R. Ramanujam**
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary School, Pulapatta, Palakkad

**Vijayakumaran T.K.**
HSST (Retd.),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Pravanadukkam, Kasaragod

**C.T. Firoz Babu**
HST Mathematics,
GGVHSS Wandoor, Malappuram

**Unnikrishnan M.V.**
HST Mathematics,
GHSS, Kadannappally P.O,
Kadannappally, Kannur

**Nandakumar C.**
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School,
Champad, Kannur

**Sreejith Muriyampath**
HST Mathematics, GHSS Madappally,
Vadakara, Kozhikode

**Padmaprasad K.**
HST Mathematics, Pandallur HSS,
Kadambode Post, Malappuram

**Ubaidulla K.C.**
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

**Firoza Moidu**
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS,
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

**Priya Raj**
HST Mathematics,
MGD High School, Puthussery,
Puthusserry South P.O,
Pathanamthitta

**Ayishakutty K.K.**
HST Mathematics,
GHS, Beenachi,
Sulthanbethery, Wayanad

**Rajesh M.**
HST Mathematics,
Kalladi HSS Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

**Ullas U.G., (Artist)**
HST Physical Science, CBHSS Vallikunnu, Malappuram

## Tamil Version

### Language Expert

**Dr. Hepsy Rose Mary A**
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala,
Thiruvananthapuram.

### Subject Expert

**Venugopal C**
Assistant Professor (Retd)
Govt. IASE, Thrissur.

## Members

**S.C Edwin Daniel,** HM (Retd.), GHS Pambanar, Idukki.
**Little Linda T.R,** HST Maths (Retd.), GHSS Anakkara, Idukki.
**Domanatha Sarath Kame,** HST Maths (Retd.), CPM GHSS Peermade, Idukki.
**Amirthaselvi S.A,** HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.
**K. Palaniselvam,** HST Maths, GHS Chinnakanal, Idukki.
**Balson Nesa Raj N.L,** HST Maths, GHS Chemmannu, Idukki.

## Academic Coordinator

**Dr. Anilkumar A.K.**
Research Officer, SCERT


மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

# உள்ளடக்கம்


| | | |
|---|---|---|
| 8 | விகிதம் | 127 |
| 9 | வட்டங்கள் | 149 |
| 10 | தசமவடிவங்கள் | 163 |
| 11 | இணைகரங்கள் | 173 |
| 12 | சரிவகங்கள் | 191 |
| 13 | புள்ளியியல் | 201 |


**இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காகச் சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.**

கணக்குச் செய்து பார்க்கலாம் ஆராய்ச்சி

ICT வாய்ப்பு

# இந்திய அரசமைப்பு

## முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

# 8

# விகிதம்

## மடங்கும் பாகமும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

திருகாணிகளின் நீளத்தைப் பல வழிகளில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்.

அதிகமாகவும் குறைவாகவும் கூறலாம்:

- சிறிய திருகாணியின் நீளம், பெரிய திருகாணியின் நீளத்தைவிட 8 மில்லி மீட்டர் குறைவாகும்.
- பெரிய திருகாணியின் நீளம், சிறிய திருகாணியின் நீளத்தைவிட 8 மில்லிமீட்டர் அதிகமாகும்.

மடங்கும் பாகமுமாகக் கூறலாம்

- சிறிய திருகாணியின் நீளம், பெரிய திருகாணியின் நீளத்தின் பாதியாகும்.
- பெரிய திருகாணியின் நீளம், சிறிய திருகாணியின் நீளத்தின் இரண்டு மடங்காகும்.

பாகமும் மடங்குமாக வேறுவிதத்தில் கூறலாம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோம்.

- சிறிய திருகாணி மற்றும் பெரிய திருகாணியின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 1 ற்கு 2.
- பெரிய திருகாணி மற்றும் சிறிய திருகாணியின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 2 ற்கு 1

(ஏழாம் வகுப்பில் **விகிதம்** என்ற பாடத்தில் **வேறு அளவுகள்** என்ற பகுதி).

ஒன்றிற்கு இரண்டு என்ற விகிதத்தை எழுதுவது 1 : 2 எனவும், இரண்டிற்கு ஒன்று என்ற விகிதத்தை எழுதுவது 2 : 1 எனவும் அந்தப் பாடத்திலேயே பார்த்தோம்.

இனி இந்தத் திருகாணிகளைப் பார்க்கவும்:

இவற்றின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை, விகிதமாக எவ்வாறு கூறலாம் ?

அதற்குச் சிறியதின் நீளம் பெரியதின் நீளத்தின் எத்தனை பாகம் எனக் கணக்கிட வேண்டும்.

அதாவது, 12 இன் எத்தனை பாகம் 8 ?

இதைப் போன்ற கணக்குகளை ஏழாம் வகுப்பில் செய்தது நினைவிருக்கிறதா ? (**தலைகீழ் பின்னங்கள்** என்ற பாடத்தில் **பாகமும் மடங்கும்** என்ற பகுதி).

12 இன் $\frac{1}{12}$ பாகம் 1; அதன் 8 மடங்கு 8.

அதாவது, 12 இன் $\frac{8}{12}$ பாகம் 8 ஆகும்

பொதுக் காரணிகளை நீக்கி, $\frac{8}{12}$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம் அல்லவா:

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2}{3}$$

(ஆறாம் வகுப்பில் **ஒரு பின்னம் பல வடிவம்** என்ற பாடத்தில் **தொகுதியும் பகுதியும்** என்ற பகுதி). அப்போது சிறிய திருகாணியின் நீளம், பெரிய திருகாணியின் நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகமாகும்.

அதாவது, சிறியதின் நீளத்திற்கும் பெரியதின் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3.

நீளங்கள் மட்டுமல்ல, மற்ற இரண்டு அளவுகளையும் பாகமாகவும் மடங்காகவும் கூற விகிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக, 15 லிட்டர் வாளியும், 20 லிட்டர் வாளியும் எடுத்தால் சிறிய வாளியின் கொள்ளளவு பெரிய வாளியின் கொள்ளளவின் $\frac{15}{20}$ பாகமாகும். இந்தப் பின்ன எண்ணை எளிய வடிவில் எழுதினால் ?

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

அப்போது சிறிய வாளி, பெரிய வாளியின் கொள்ளளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 4

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி அளவிலும் சிறியதிற்கும் பெரியதிற்கும் இடையே உள்ள விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

(i) 4 மீட்டர், 12 மீட்டர் (ii) 8 லிட்டர், 20 லிட்டர் (iii) 20 கிலோகிராம், 25 கிலோகிராம்

(2) ஒரு பாத்திரத்தில் 4 லிட்டரும், வேறொரு பாத்திரத்தில் 14 லிட்டரும் தண்ணீர் உள்ளது.

(i) முதல் பாத்திரத்திலும் இரண்டாவது பாத்திரத்திலும் உள்ள தண்ணீரின் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

(ii) ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலும் மேலும் 1 லிட்டர் தண்ணீர் ஊற்றினால் இந்த விகிதம் என்னவாகும் ?

## இயற்கணிதம்

இனி இந்தச் செவ்வகத்தைப் பார்க்கவும்:

இதன் உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

இவ்வாறு கணக்கிடலாம்:

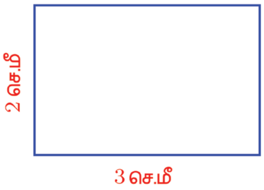
(i) உயரம் நீளத்தின் $\frac{4}{6}$ பாகமாகும்.

(ii) $\frac{4}{6}$ இன் எளிய வடிவம் $\frac{2}{3}$

(iii) உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$

(இயன்றவரை சிறிய எண்ணல் எண்களைப் பயன்படுத்தியே விகிதத்தைக் கூறுவது வழக்கம் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா).

உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆன வேறொரு செவ்வகம் வரைய இயலுமா? இவ்வாறு வரைந்தால் போதுமல்லவா ?




வேறொரு செவ்வகம் ?

2 சென்டிமீட்டர் மற்றும் 3 சென்டிமீட்டர் இவற்றின் 2 மடங்கே, முதலில் வரைந்த செவ்வகத்தின் உயரமும் நீளமும்; 3 மடங்கு எடுத்தால் ?

இதிலும் உயரத்திற்கும், நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆக இருக்குமா ?

முதல் கணக்கில் செய்ததைப் போல் சிந்திப்போம்:

(i) 9 இன் $\frac{6}{9}$ பாகமாகும் 6

(ii) $\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$

(iii) உயரம், நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகமாகும்

(iv) உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$

உயரத்தையும் நீளத்தையும் $\frac{3}{4}$ பாகமாக்கினால் ?

$$2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

உயரம் $1\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டரும், நீளம் $2\frac{1}{4}$ சென்டிமீட்டரும் ஆகும். அப்போதும் விகிதம் $2 : 3$ ஆகுமா? அதாவது, $2\frac{1}{4}$ இன் $\frac{2}{3}$ பாகமாகுமா, $1\frac{1}{2}$ ?

மேலே செய்த பெருக்கற்பலன்களைப் பயன்படுத்தி இதை இவ்வாறு பரிசோதிக்கலாம்:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} &= \left(3 \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(3 \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \\ &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

அப்போது, இந்த செவ்வகத்திலும் உயரம் மற்றும் நீளம் $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும்.

$\frac{3}{4}$ க்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் பாகத்தைப் பயன்படுத்தினாலும் விகிதம் மாறாது என்பதை இதிலிருந்து புரிந்துகொள்ளலாம்.

2 சென்டிமீட்டரையும் 3 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே மடங்கு அல்லது பாகமாக மாற்றுவது, ஒரே எண்ணால் பெருக்கி அல்லவா. அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

> ஒரு செவ்வகத்தின் உயரமும் நீளமும் 2 சென்டிமீட்டரையும், 3 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியது எனில், அதன் உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆகும்.

மாறாக, உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆன எந்த செவ்வகத்தை எடுத்தாலும் அதன் உயரமும் நீளமும் 2 சென்டிமீட்டரையும், 3 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாகவே இருக்குமா ?

இதைப் பரிசோதிக்க, உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆன ஒரு செவ்வகத்தின் உயரம் $h$ சென்டிமீட்டர் எனவும், நீளம் $w$ சென்டிமீட்டர் எனவும் எடுக்கலாம்.

உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆனதால், உயரம் நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகமாகும். அதாவது

$$h = \frac{2}{3}w$$

$\frac{2}{3}$ பாகம் என்பது, $\frac{1}{3}$ பாகத்தின் 2 மடங்கு அல்லவா (ஏழாம் வகுப்பில் **பின்ன எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **மடங்கும் பெருக்கலும்** என்ற பகுதி).

அப்போது இதிலுள்ள $\frac{2}{3}w$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{2}{3}w = \frac{1}{3}w \times 2$$

இனி $\frac{1}{3}w$ என்ற எண்ணை $k$ என்ற எழுத்தால் குறிப்பிட்டால்

$$h = 2k$$

என எழுதலாம் அல்லவா; $w = 3k$ எனவும் கிடைக்குமா ?

$$3k = 3 \times \frac{1}{3}w = w$$

அதாவது, செவ்வகத்தின் உயரமும் நீளமும் 2 சென்டிமீட்டரையும் 3 சென்டிமீட்டரையும் $k$ என்ற எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3 ஆன எந்தச் செவ்வகத்திலும், உயரமும் நீளமும் 2 சென்டிமீட்டரையும், 3 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

2 க்கும் 3 க்கும் பதிலாக எந்த எண்ணல் எண்களை எடுத்தாலும் இப்போது பார்த்த இரண்டு கருத்துகளும் சரியாகும் என்பதைக் காண்பது கடினமல்ல.

மட்டுமல்ல, செவ்வகத்தின் உயரமும் நீளமும் என்பதற்குப் பதிலாக எந்த இரண்டு நீளங்களை எடுத்தாலும், நீளங்களுக்குப் பதிலாக எந்த வேறு ஏதேனும் அளவுகளை எடுத்தாலும் இது சரியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 4 லிட்டர் கொள்ளளவு உள்ள ஒரு பாத்திரத்தையும், 10 லிட்டர் கொள்ளளவு உள்ள ஒரு பாத்திரத்தையும் எடுத்தால், சிறிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு பெரிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவின் எத்தனை பாகம்?

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

அப்போது சிறிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவிற்கும், பெரிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 5 ஆகும்.

இனிக் கொள்ளளவுகள் 2 லிட்டரையும், 5 லிட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைக்கின்ற எந்த இரண்டு பாத்திரங்களிலும், சிறிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவிற்கும் பெரிய பாத்திரத்தின் கொள்ளளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 5 ஆகும். மாறாக கொள்ளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 5 ஆன எந்த இரண்டு பாத்திரங்களின் கொள்ளளவுகளும் 2 லிட்டரையும் 5 லிட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைப்பதாகும்.

அப்போது பொதுவாக இவ்வாறு கூறலாம்:

இரண்டு அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $m : n$ எனில் $m$ ஐயும் $n$ ஐயும் பூஜ்யம் அல்லாத எந்த எண்ணாலும் பெருக்கிக் கிடைக்கும் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதமும் $m : n$ ஆகும், மாறாக, $m : n$ என்ற விகிதத்திலுள்ள எந்த இரண்டு அளவுகளும் $m$ என்ற எண்ணையும் $n$ என்ற எண்ணையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைப்பது ஆகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி, ஏழாம் வகுப்பிலுள்ள ஒரு கணக்கை வேறொரு முறையில் செய்து பார்க்கலாம். (**விகிதம்** என்ற பாடத்தில் **பாகக் கணக்கு** என்ற பகுதி):

> பள்ளிக்கூடத்தில் காய்கறித் தோட்டம் உருவாக்க செவ்வக வடிவிலுள்ள ஒரு இடத்தைக் கயிறு கட்டிப் பிரிக்க வேண்டும். கயிற்றின் நீளம் 32 மீட்டர். அகலமும், நீளமும் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் இருக்க வேண்டும் எனத் தீர்மானிக்கப்பட்டது. அகலமும் நீளமும் எத்தனை மீட்டராக இருக்க வேண்டும் ?

செவ்வகத்தின் அகலத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 5 ஆனதால், இப்போது கூறியதுபோல், அகலமும் நீளமும் 3 மீட்டரையும் 5 மீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைப்பதாகும். அகலத்தையும் நீளத்தையும் கணக்கிட இந்த எண்ணைக் கண்டுபிடித்தால் போதும், அதற்காக இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

இந்த எண் $x$ என எடுத்தால்,

$$\text{அகலம்} = 3x \text{ மீட்டர்}$$

$$\text{நீளம்} = 5x \text{ மீட்டர்}$$

இனி $x$ ஐக் கணக்கிட, கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள வேறொரு கருத்தைப் பயன்டுத்தலாம். செவ்வகம் உருவாக்குவதற்கு 32 மீட்டர் கயிறு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்பதிலிருந்து என்ன கணக்கிடலாம் ?

(i) செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 32 மீட்டர்

(ii) அகலமும் நீளமும் கூட்டினால் 32 இன் பாதி 16 மீட்டர்.

அகலமும் நீளமும் $3x$ மீட்டரும் $5x$ மீட்டரும் அல்லவா; அவற்றைக் கூட்டினால் $3x + 5x = 8x$ மீட்டர். நீளமும் அகலமும் கூட்டினால் 16 மீட்டர் எனப் பார்த்தோம். அப்போது

$$8x = 16$$

இதிலிருந்து $x$ கணக்கிடலாமல்லவா.

$$x = 2$$

(**சமன்பாட்டுத் தீர்வு** என்ற பாடத்தை நினைவு கூரவும்).

அப்போது,

$$\text{அகலம்} = 3x = 3 \times 2 = 6 \text{ மீட்டர்}$$

$$\text{நீளம்} = 5x = 5 \times 2 = 10 \text{ மீட்டர்}$$

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஒரு செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் 4 : 5 என்ற விகிதத்திலாகும்; அதன் பரப்பளவு 320 சதுரமீட்டர். அகலமும் நீளமும் எத்தனை மீட்டராகும்?

முதல் கணக்கில் செய்தது போல், அகலம் $4x$ மீட்டர், நீளம் $5x$ மீட்டர் என எடுக்கலாம் அல்லவா. அப்போது பரப்பளவு

$$4x \times 5x = 20x^2 \text{ சதுரமீட்டர்}$$

பரப்பளவு 320 சதுரமீட்டர் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது அல்லவா. அப்போது

$$20x^2 = 320$$

இதிலிருந்து

$$x^2 = 320 \div 20 = 16$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

அதாவது $x$ என்ற எண்ணின் வர்க்கம் 16. அப்போது $x$ எவ்வளவு ?

$$x = 4$$

இனி அகலத்தையும் நீளத்தையும் கணக்கிடலாமல்லவா:

$$\text{அகலம்} = 4x = 4 \times 4 = 16 \text{ மீட்டர்}$$

$$\text{நீளம்} = 5x = 5 \times 4 = 20 \text{ மீட்டர்}$$

(1) ஓர் ஒழுங்கு பலகோணத்தின் உட்கோணத்திற்கும் வெளிக்கோணத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 7 : 2 ஆகும்.

(i) ஒவ்வொரு கோணமும் எத்தனை டிகிரி ?

(ii) பலகோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன ?

(2) நான்கு செங்கோண முக்கோணங்கள்; அனைத்திலும் செங்குத்துப் பக்கங்களின் விகிதம் 3 : 4 ஆகும். ஒவ்வொரு முக்கோணத்தைக் குறித்தும் வேறொரு தகவலும் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

(i) செங்குத்துப் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் 24 மீட்டர்

(ii) சுற்றளவு 24 மீட்டர்

(iii) பரப்பளவு 24 சதுரமீட்டர்

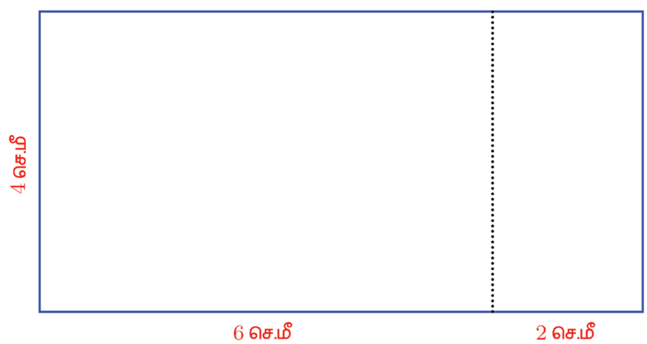
(iv) கர்ணம் 24 மீட்டர் (நீளங்களை மீட்டரும் சென்டிமீட்டருமாக எழுதவும்)

(3) இரண்டு சதுரங்களின் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 4 ஆகும். அவைகளின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

## மாறுகின்ற விகிதம்

இந்தச் செவ்வகத்தின் உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

உயரம் $2 \times 2$ சென்டிமீட்டரும், நீளம் $3 \times 2$ சென்டிமீட்டரும் ஆனதால், விகிதம் $2 : 3$.
நீளத்தை மட்டும் 2 சென்டிமீட்டர் கூட்டி செவ்வகத்தைப் பெரியதாக்கினால் ?




இதில் உயரத்திற்கும் மற்றும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $1 : 2$ ஆக மாறிவிட்டதல்லவா?

அப்போது வேறு ஒரு வினா:

> ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $3 : 2$; நீளத்தை 2 மீட்டர் கூட்டி செவ்வகத்தைப் பெரியதாக்கிய போது, இந்த விகிதம் $5 : 3$ ஆக மாறியது எனில், முதல் செவ்வகத்தின் நீளமும் உயரமும் எவ்வளவாக இருந்தது ?

முதல் செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $3 : 2$ ஆனதால் சரியான நீளத்தையும் உயரத்தையும் $3x$ சென்டிமீட்டர், $2x$ சென்டிமீட்டர் என எடுக்கலாம்.

நீளம் கூட்டிய செவ்வகத்தில் ?

2 சென்டிமீட்டர் கூட்டியபோது நீளம் $3x + 2$ சென்டிமீட்டரானது.

உயரத்தில் எந்த மாற்றமும் செய்யவில்லை; அது $2x$ ஆகும்.

பெரியதாக்கிய செவ்வகத்தில், நீளத்திற்கும், உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $5 : 3$ எனக் கூறப்பட்டுள்ளது.

அதாவது நீளம், உயரத்தின் $\frac{5}{3}$ மடங்காகும்.

$$3x + 2 = 2x \times \frac{5}{3}$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலது பகுதியை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாமல்லவா.

$$2x \times \frac{5}{3} = 10x \times \frac{1}{3}$$

அப்போது சமன்பாடு இவ்வாறாகும்

$$3x + 2 = 10x \times \frac{1}{3}$$

அதாவது, $10x$ என்ற எண்ணின் $\frac{1}{3}$ பாகமே $3x + 2$ என்ற எண்.

இதைத் திருப்பிக் கூறினால், $3x + 2$ என்ற எண்ணின் 3 மடங்கே $10x$ என்ற எண்.

அதாவது

$$10x = 3(3x + 2)$$

இனி $3(3x + 2)$ ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$3(3x + 2) = (3 \times 3x) + (3 \times 2) = 9x + 6$$

அப்போது முன்பு எழுதிய சமன்பாடு இவ்வாறாகும்:

$$10x = 9x + 6$$

இதிலிருந்து $x$ ஐக் கணக்கிடலாமல்லவா:

$$x = 6$$

அப்போது முதல் செவ்வகத்தில்

நீளம் $= 3x = 3 \times 6 = 18$ செ.மீ

உயரம் $= 2x = 2 \times 6 = 12$ செ.மீ

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> அமிலமும் தண்ணீரும் $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் கலந்து 60 லிட்டர் கரைசல் உருவாக்கப்பட்டது. இந்த விகிதத்தை $3 : 4$ ஆக மாற்ற, அமிலமா அல்லது தண்ணீரா அதிகம் சேர்க்க வேண்டும்? எத்தனை லிட்டர் ?

### விகிதமும் வேதியியலும்

வேதியியலில் வேதிப்பொருட்களை தனிமங்கள் எனவும் சேர்மங்கள் எனவும் வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன அல்லவா.

எந்த சேர்மங்களிலும் அதில் அடங்கியிருக்கும் தனிமங்களின் நிறை (mass) ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருக்கும் என 18 ஆம் நூற்றாண்டில் ஜோசப் ப்ரூஸ்ட் என்ற விஞ்ஞானி கண்டுபிடித்தார்.

எடுத்துக்காட்டாக, காப்பர் கார்பனேட்டில் எப்போதும் கார்பனின் நிறையின் 5.3 மடங்கு காப்பரும், 4 மடங்கு ஆக்சிஜனுமாக இருக்கும் எனப் பரிசோதனைகள் வாயிலாக அவர் கண்டுபிடித்தார்.

தனிமங்களின் மிகச்சிறிய துகள்களை கற்பனை செய்தால், இத்தகைய ஒப்பீடு எண்ணல் எண்களின் வாயிலாக இருக்கலாம் என்ற சிந்தனை,அணு என்ற கருத்துக்கு வழிவகுத்தது. பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் ஜான் டால்டன் என்ற விஞ்ஞானி இத்தகைய கோட்பாட்டை முன்வைத்தார்.

டால்டனின் கோட்பாட்டின்படி தனிமங்களின் மிகச்சிறிய துகள்களான அணுக்கள் (atoms) சேர்ந்தே சேர்மங்கள் உருவாகின்றன.

எந்தவொரு சேர்மத்திலும் அதிலுள்ள வெவ்வேறு தனிமங்களின் அணுக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் இருக்கும்.

அமிலத்திற்கும் தண்ணீருக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ எனக் கூறினால், தண்ணீரின் அளவின் $\frac{2}{3}$ பாக அமிலத்தின் அளவு.

இந்த விகிதம் $3 : 4$ ஆக வேண்டும் எனக் கூறினால் ?

அமிலத்தின் அளவு தண்ணீரின் அளவின் $\frac{3}{4}$ பாகமாக வேண்டும்.

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ இவற்றில் எது பெரியது? (ஆறாம் வகுப்பில் **பாகக் கணக்குகள்** என்ற பாடத்தில் **பெரியதும் சிறியதும்** என்ற பகுதியை நினைவு கூரவும்).

அதைத் தெரிந்து கொள்ள, இரண்டு பின்னங்களையும் ஒரே பகுதியுள்ள வடிவத்திற்கு மாற்ற வேண்டும்:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ ஆனதால் $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

அப்போது அமிலத்தின் அளவை அதிகரிக்க வேண்டும்.

எவ்வளவு லிட்டர் அமிலம் சேர்க்க வேண்டும் எனக் கணக்கிட, முதலில் அமிலமும் தண்ணீரும் எவ்வளவு லிட்டர் உள்ளது எனக் கணக்கிடலாம். இவற்றிற்கு இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ ஆனதால், அளவுகளை இவ்வாறு எடுக்கலாம்: அப்போது

அமிலம் $= 2x$ லிட்டர்

தண்ணீர் $= 3x$ லிட்டர்

மொத்தம் 60 லிட்டர் ஆனதால்

$$5x = 60$$

இதிலிருந்து $x = 12$ எனப் பார்க்கலாம் அல்லவா.

அப்போது அமிலம் $= 24$ லிட்டர்

தண்ணீர் $= 36$ லிட்டர்

இனி, விகிதம் $3 : 4$ ஆக மாற்றுவதற்குச் சேர்க்க வேண்டிய அமிலம் $y$ லிட்டர் என எடுத்தால், அளவுகள் என்னவாகும் ?

அமிலம் $= (24 + y)$ லிட்டர்

தண்ணீர் $= 36$ லிட்டர்

இதில் அமிலத்தின் அளவு, தண்ணீரின் அளவின் $\frac{3}{4}$ ஆக இருக்க வேண்டும் அல்லவா, அப்போது

$$24 + y = 36 \times \frac{3}{4} = 27$$

இதிலிருந்து $y = 3$

எனக் கணக்கிடலாம், அதாவது மேலும் 3 லிட்டர் அமிலம் சேர்க்க வேண்டும்.

**கணக்கும் சாத்தியமும்**

அமிலக் கணக்கில், அமிலத்தையே சேர்க்க வேண்டும் எனப் புரிந்துகொள்ளாமல், எவ்வளவு லிட்டர் தண்ணீர் சேர்க்க வேண்டும் என்று கணக்கிட்டால்?

$x$ லிட்டர் தண்ணீர் சேர்க்க வேண்டும் என எடுத்தால், அமிலம் 24 லிட்டர், தண்ணீர் $36 + x$ லிட்டர் என ஆகும். தண்ணீரின் அளவு, அமிலத்தின் அளவின் $\frac{4}{3}$ ஆக வேண்டும். அதாவது

$$36 + x = \frac{4}{3} \times 24 = 32$$

இதிலிருந்து $x = -4$ எனக் கிடைக்குமல்லவா. இதன் பொருள் 4 லிட்டர் தண்ணீர் குறைக்க வேண்டும் என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

அப்போது 24 லிட்டர் அமிலம், 32 லிட்டர் தண்ணீர். $3 : 4$ ஆனதல்லவா ?

ஒரு பிரச்சினையே உள்ளது, அமிலமும், தண்ணீரும் கலந்த கரைசலிலிருந்து தண்ணீரை மட்டும் எப்படி நீக்குவது? அப்போது கணக்கு சரியாக இருக்கும், ஆனால் நடைமுறையில் சாத்தியமில்லை.

(1) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கும் அகலத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 2. மேலும் நீளத்தின் பாதியைக் கூட்டி, செவ்வகம் பெரியதாக்கப்பட்டது. பெரிய செவ்வகத்தின் நீளத்திற்கும் அகலத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

(2) இரண்டு கோணங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் 1 : 2 ஆகும். சிறிய கோணத்தை 6° கூட்டி, பெரிய கோணத்தை 6° குறைத்த போது அதன் விகிதம் 2 : 3 ஆக மாறியது. முதலில் உள்ள ஒவ்வொரு கோணமும் எத்தனை டிகிரி ஆகும் ?

(3) ஒரு திரவத்தில் அமிலமும், தண்ணீரும் 3 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. மேலும் 15 லிட்டர் அமிலம் சேர்த்தபோது இது 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் ஆனது. இப்போது கரைசலில் எவ்வளவு லிட்டர் அமிலமும் தண்ணீரும் உள்ளது ?

(4) 54 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவுள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் உயரமும் நீளமும் 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது.

(i) உயரத்தையோ நீளத்தையோ அதிகரித்து, இந்த விகிதத்தை 2 : 3 ஆக மாற்ற வேண்டும். எதை அதிகரிக்க வேண்டும்? எவ்வளவு அதிகரிக்க வேண்டும்?

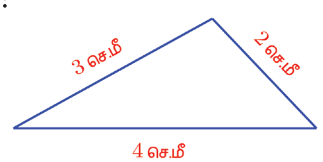
(ii) உயரத்தையோ, நீளத்தையோ குறைத்து, இந்த விகித்தை 2 : 3ஆக மாற்ற வேண்டும்? எதைக் குறைக்க வேண்டும்? எவ்வளவு குறைக்க வேண்டும்?

**அங்குமிங்கும்**

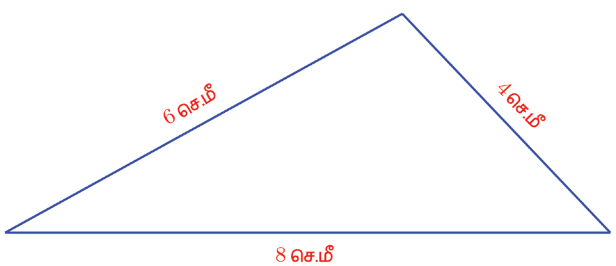
ஒரு செவ்வகத்தின் நீளமும், அகலமும் 33 சென்டிமீட்டர், 1 சென்டிமீட்டர், வேறொரு செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் 11 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டர். இந்த செவ்வகங்களின் சுற்றளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன? பரப்பளவுகளுக்கு இடையிலோ? இத்தகைய தொடர்புள்ள வேறு ஜோடி செவ்வகங்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

## மூன்று அளவுகள்

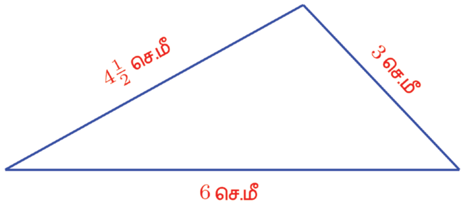
இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



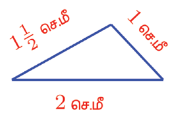

இதன் எல்லா பக்கங்களையும் இரண்டு மடங்காக்கி வேறொரு முக்கோணம் வரையலாம்:



முதல் முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு ஆக்கினால் இவ்வாறான ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும்.




எல்லா பக்கங்களையும் பாதி ஆக்கினால் ?




### இனிக்கும் விகிதம்

சர்க்கரையில் என்னென்ன தனிமங்கள் உள்ளன என அறிவீர்களா?

கார்பன், ஹைட்ரஜன், ஆக்சிஜன் என இவை ஒவ்வொன்றும் பல அளவுகளில் உள்ளன. 12 கார்பன் அணுவும், 22 ஹைட்ரஜன் அணுவும் 11 ஆக்சிஜன் அணுவும் அடங்கியதே சர்க்கரையின் ஒரு மூலக்கூறு. அதாவது சர்க்கரையில் கார்பன் ஹைட்ரஜன், ஆக்சிஜன் என்பவற்றின் விகிதம் 12 : 22 : 11. சர்க்கரை மூலக்கூறின் கூறியீடு $C_{12}H_{22}O_{11}$. சர்க்கரையைச் சூடாக்கினால் என்ன நடக்கும்? காரணம் என்ன?

இந்த முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், பக்கங்களின் நீளங்களான 4 சென்டிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர், 2 சென்டிமீட்டர் இவற்றை ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதல்லவா.

இதை விகிதமாகக் கூறலாம்:

இந்த நான்கு முக்கோணங்களிலும் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 4 : 3 : 2 ஆகும்.

வேறு வகையான மூன்று அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பையும் இவ்வாறு விகிதமாகக் கூறலாம். எடுத்துக்காட்டாக 15 லிட்டர், 30 லிட்டர், 10 லிட்டர் கொள்ளளவு உள்ள பாத்திரங்களின் கொள்ளளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 6 : 2.

பொதுவாகக் கூறினால்

$l, m, n$ ஆகிய மூன்று எண்களை ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைக்கும் எந்த மூன்று அளவுகளுக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $l : m : n$ ஆகும்.

ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 5 : 7 ஆகும்; அதன் சுற்றளவு 45 சென்டிமீட்டர். பக்கங்களின் நீளம் என்ன ?

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர் 7 சென்டிமீட்டர் இவற்றை ஒரே எண்ணால் பெருக்கிக் கிடைப்பவை அல்லவா. இந்த எண்ணை $x$ என எடுத்தால், சுற்றளவு

$$3x + 5x + 7x = 15x \text{ செ.மீ}$$

இது 45 சென்டிமீட்டர் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. அப்போது

$$15x = 45$$

இதிலிருந்து $x = 3$ எனவும், பக்கங்களின் நீளம் 9 சென்டிமீட்டர், 15 சென்டிமீட்டர், 21 சென்டிமீட்டர் எனவும் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

> $ABC$ என்ற முக்கோணத்தில், $AB$, $BC$ இவைகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $3 : 4$ உம் $BC$, $CA$ இவைகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $4 : 5$ உம் ஆகும். மூன்று பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

$AB$, $BC$ இவைகளின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டரையும், 4 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியது அல்லவா. இந்த எண்ணை $x$ என எடுத்தால்

$$AB = 3x \text{ செ.மீ} \quad BC = 4x \text{ செ.மீ}$$

இனி $BC$, $CA$ இவைகளின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டரையும் 5 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாகும்.

அதில் 4 சென்டிமீட்டரை $x$ ஆல் பெருக்கியது $BC$ இன் நீளம்; அப்போது $CA$ இன் நீளம் 5 சென்டிமீட்டரை இதே எண் $x$ ஆல் பெருக்கியது ஆக வேண்டுமல்லவா, அப்போது

$$CA = 5x \text{ செ.மீ}$$

$AB$, $BC$, $CA$ இவையின் நீளங்கள் $3x$ சென்டிமீட்டர், $4x$ சென்டிமீட்டர், $5x$ சென்டிமீட்டர் என்றிவ்வாறு ஆனதால், அவற்றின் விகிதம் $3 : 4 : 5$

முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளத்திற்குப் பதிலாக வேறு மூன்றளவுகள் ஆனாலும், விகிதங்களை இவ்வாறு சேர்த்துக் கூறலாமல்லவா. பொதுவாகக் கூறினால்

> ஏதேனும் மூன்றளவுகளில், முதல் மற்றும் இரண்டாவது அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $l : m$ ஆகவும் இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $m : n$ ஆகவும் இருந்தால், மூன்று அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $l : m : n$ ஆகும்.

இனி விகிதங்கள் இவ்வாறு ஆனால் ?

> $ABC$ என்ற முக்கோணத்தில், $AB$, $BC$ இவைகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3$ உம் $BC$, $CA$ இவைகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் $4 : 5$ உம் ஆகும். மூன்று பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

$AB$, $BC$ இவற்றின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரையும், 3 சென்டிமீட்டரையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதல்லவா. இந்த எண்ணை $x$ என எடுத்தால்

$$AB = 2x \text{ செ.மீ} \quad BC = 3x \text{ செ.மீ}$$

இதேபோல் $BC$, $CA$ இவற்றின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டரையும், 5 சென்டிமீட்டரையும் வேறொரு எண்ணால் பெருக்கியதாகும். இந்த எண்ணை $y$ என எடுத்தால்

$$BC = 4y \text{ செ.மீ} \quad CA = 5y \text{ செ.மீ}$$

முதல் சமன்பாட்டில் $BC$ இன் நீளம் $3x$ சென்டிமீட்டரும், இரண்டாவது சமன்பாட்டில் $BC$ இன் நீளம் $4y$ சென்டிமீட்டரும் ஆகுமல்லவா. அப்போது

$$4y = 3x$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது

$$y = \frac{3}{4}x$$

அப்போது

$$CA = 5y = 5 \times \frac{3}{4}x = \frac{15}{4}x$$

இனி $AB$, $BC$, $CA$ என்ற மூன்று நீளங்களையும் $x$ பயன்படுத்தி எழுதலாம்.

$$AB = 2x \text{ செ.மீ}$$

$$BC = 3x \text{ செ.மீ}$$

$$CA = \frac{15}{4}x \text{ செ.மீ}$$

விகிதத்தை எழுதுவது எண்ணல் எண்களைப் பயன்படுத்தி அல்லவா. எனவே இவற்றை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$AB = 8 \times \frac{x}{4} \text{ செ.மீ}$$

$$BC = 12 \times \frac{x}{4} \text{ செ.மீ}$$

$$CA = 15 \times \frac{x}{4} \text{ செ.மீ}$$

அதாவது நீளங்கள் 8 சென்டிமீட்டரையும், 12 சென்டிமீட்டரையும், 15 சென்டிமீட்டரையும் $\frac{x}{4}$ என்ற எண்ணால் பெருக்கியதாகும். அப்போது இவற்றின் விகிதம் $8 : 12 : 15$.

### செங்கோண முக்கோணங்கள்

3 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர் பக்கங்கள் உள்ள முக்கோணத்தின் சிறப்புத்தன்மை என்ன?

$3^2 + 4^2 = 5^2$ ஆனதால் இது ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

பக்கங்களின் நீளங்கள் அனைத்தையும் இருமடங்கு ஆக்கினால்? அப்போது கிடைக்கும் முக்கோணமும் செங்கோண முக்கோணமாகுமா?

$6^2 + 8^2 = 10^2$ என்பது சரியாகும்.

அதாவது, பக்கங்களை இரு மடங்காக்கினால் கிடைக்கும் முக்கோணமும் செங்கோண முக்கோணமே ஆகும்.

பக்கங்களின் நீளங்களை $x$ மடங்கு ஆக்கினால்?

$(3x)^2 + (4x)^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2 = (5x)^2$ அதாவது, $3x$, $4x$, $5x$ பக்கங்கள் உள்ள முக்கோணமும் செங்கோண முக்கோணமாகும்.

சுருங்கக் கூறினால் பக்கங்களின் நீளம் $3 : 4 : 5$ ஆன எல்லா முக்கோணங்களும் செங்கோண முக்கோணங்களாகும்.

பக்கங்களின் நீளம் $5 : 12 : 13$ ஆன முக்கோணங்கள் செங்கோண முக்கோணமாகுமா?

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $1 : 3 : 5$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொரு கோணத்தின் அளவு என்ன ?

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் $2 : 3 : 4$ ஆகும். மிகப்பெரிய பக்கம், மிகச்சிறிய பக்கத்தைவிட 20 சென்டிமீட்டர் கூடுதலாகும். எல்லாப் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடவும்.

(3) ஒரு செவ்வகப் பெட்டியின் நீளத்திற்கும் அகலத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $2 : 3 : 5$ ஆகும். அதன் கனஅளவு 3750 கன சென்டிமீட்டரும்; நீளம், அகலம், உயரம் இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(4) ஒரு பெட்டியில் மூன்று நிறங்களில் முத்துகள் உள்ளன. கருப்பு முத்துகளின் எண்ணிக்கைக்கும் வெள்ளை முத்துக்களின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 3:5; வெள்ளை முத்துகளின் எண்ணிக்கைக்கும் சிவப்பு முத்துக்களின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3. மூன்று நிறத்திலும் உள்ள முத்துக்களின் எண்ணிக்கைக்கு இடையே உள்ள விகிதம் எவ்வளவு ?

## கோட்டின் பாகங்கள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

*AB* என்ற கோட்டை *P* என்ற புள்ளி, *AP, PB* என இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது.

*AP, PB* இவைகளின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன? *AP* இன் இரண்டு மடங்கல்லவா *PB*. அப்போது *AP*, *PB* இவைகளின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 1 : 2.

இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$AP : PB = 1 : 2$$

இதைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

*P* என்ற புள்ளி, *AB* என்ற கோட்டை 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

அப்போது *AB* என்ற கோட்டில் எந்த புள்ளியை எடுத்தாலும் அது கோட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

*Q* என்ற புள்ளி, *AB* ஐ பிரிக்கும் விகிதம் என்ன ?

1.5 இன் 3 மடங்கல்லவா 4.5; அப்போது

$$AQ : QB = 1:3$$

இவ்வாறு *AB* என்ற கோட்டில் எந்தப் புள்ளியும் *AB* ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

மாறாக, எந்த விகிதத்திலும் $AB$ ஐ பிரிக்கும் புள்ளி உள்ளதா ?

எடுத்துக்காட்டாக, $AB$ ஐ $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி எது ?

$A$ யிலிருந்து அந்தப் புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிட்டால் போதுமல்லவா.

அதாவது அந்தப் புள்ளி $R$ என எடுத்தால், $AR$ என்ற பாகத்தின் நீளம் எவ்வளவு எனக் கணக்கிட வேண்டும். $AR : RB = 2 : 3$ ஆக வேண்டுமெனில், $AR$, $RB$ இவை 2 மற்றும் 3 ஐ ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதாக இருக்க வேண்டும். பெருக்கும் எண் $x$ என எடுத்தால்

$$AR = 2x \text{ செ.மீ} \qquad RB = 3x \text{ செ.மீ}$$

இங்கு

$$AR + RB = AB = 6 \text{ செ.மீ}$$

அல்லவா. அப்போது

$$5x = 6$$

இதிலிருந்து

$$x = \frac{6}{5}$$

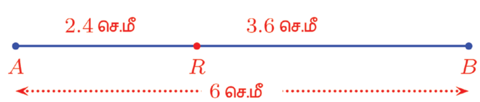
எனவும் கிடைக்கும். தொடர்ந்து

$$AR = \frac{12}{5} \text{ செ.மீ} \quad RB = \frac{18}{5} \text{ செ.மீ}$$

எனவும் கணக்கிடலாம்.

இங்கு இவைகளைத் தசமவடிவில் எழுதுவதே இங்கு வசதியானது

$$AR = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ செ.மீ}, \quad RB = \frac{36}{10} = 3.6 \text{ செ.மீ}$$

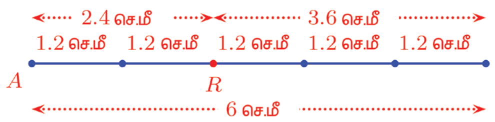



இந்தக் கணக்கீடுகளை வடிவியல் முறையில் பார்க்கலாம். இங்கு $x$ கணக்கிட்டது எவ்வாறு?

$$x = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1.2$$

அதாவது, 6 சென்டிமீட்டரை 5 சமபாகங்களாக்கினால், ஒவ்வொரு பாகத்தின் நீளம் $x = 1.2$ சென்டிமீட்டர்:

இதில் முதல் 2 பாகங்கள் சேர்ந்தது $AR$, மீதமுள்ள 3 பாகங்கள் சேர்ந்தது $RB$




அப்போது $AB$ ஐ $2 : 5$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் இடம் எங்கு அமையும்?

$AB$ ஐ $2 + 5 = 7$ சமபாகங்களாகப் பிரித்து, அவற்றில் முதல் 2 பாகம் சேர்த்து $AS$ என்றும் மீதமுள்ள 5 பாகம் சேர்த்து $SB$ என்றும் எடுக்க வேண்டும்:

$\frac{6}{7}$ சென்டிமீட்டரை, அளவுகோல் பயன்படுத்தி அளக்க முடியாதல்லவா. ஆனால் இப்போது கூறிய முறையில் ஒரு கோட்டை எந்த விகிதத்திலும் பிரிக்கும் ஒரு முறையை ஒன்பதாம் வகுப்பில் பார்ப்போம் (**இணைகோடுகள்** என்ற பாடத்தில் **சமமற்ற பாகங்கள்** என்ற பகுதி).

அப்போது ஒரு கோட்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் இடத்தைக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

ஒரு கோட்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி, கோட்டை $m + n$ சமபாகங்களாகப் பிரித்ததில் முதலில் உள்ள $m$ பாகங்களும் மீதியுள்ள $n$ பாகங்களுமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கோட்டின் நீளம் எதுவாக இருந்தாலும், அதை $2 : 5$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் இடத்தை இவ்வாறு காண்பிக்கலாம்:

இதிலிருந்து வேறொரு கருத்தையும் பார்க்கலாம்.

- $AB$ ஐ 7 சமபாகங்களாகப் பிரித்ததில் 2 பாகங்கள் சேர்ந்தது $AP$
- $AB$ ஐ 7 சமபாகங்களாகப் பிரித்ததில் 5 பாகங்கள் சேர்ந்தது $PB$

அதாவது

- $AB$ இன் $\frac{2}{7}$ பாகம் $AP$
- $AB$ இன் $\frac{5}{7}$ பாகம் $PB$

பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

ஒரு கோட்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், இந்தப் பாகங்கள் மொத்தக் கோட்டின் $\frac{m}{m+n}$ பாகமும் $\frac{n}{m+n}$ பாகமும் ஆகும்.

(1) கீழேயுள்ள ஒவ்வொரு கணக்கிலும், ஒரு கோட்டின் நீளமும் அதிலுள்ள ஒரு புள்ளி கோட்டைப் பிரிக்கும் விகிதமும் கூறப்பட்டுள்ளது. கோடு வரைந்து புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.

(i) $AB = 14$ செ.மீ $AP : PB = 3 : 4$

(ii) $AB = 12$ செ.மீ $AP : PB = 3 : 5$

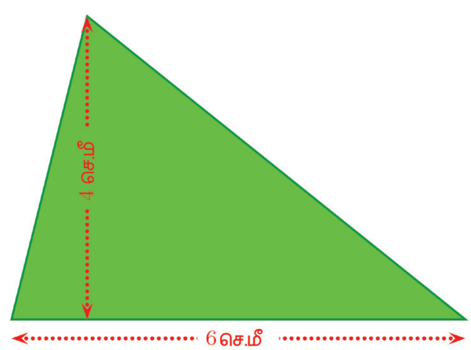
(iii) $AB = 7$ செ.மீ $AP : PB = 2 : 3$

(2) 9 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கோட்டை ஒரு புள்ளி $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பாகத்தின் நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு கோட்டை $3 : 5$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்ததில், பெரிய பாகத்தின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர் ஆகும். மொத்தக் கோட்டின் நீளம் என்ன ?

## முக்கோண பாகங்கள்

இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:

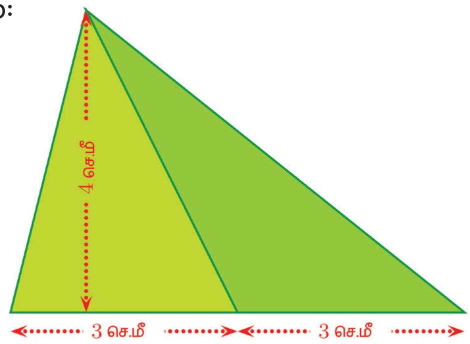



இதன் பரப்பளவு என்ன ?

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டரும், அதிலிருந்து எதிர் உச்சிக்குள்ள உயரம் 4 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

இனி இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:




முதலில் பார்த்த முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியையும், கீழ் பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்து கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

இந்தக் கோடு முக்கோணத்தை இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது. இந்தச் சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் எத்தனை ?

இரண்டின் அடிப்பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் அல்லவா ?

மேல் உச்சிக்குள்ள உயரம் ?

அப்போது ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடையவும் பரப்பளவு

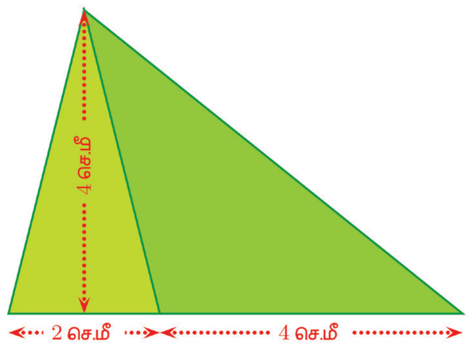
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

அளவுகளை மாற்றி வேறு முக்கோணங்கள் வரைந்தாலும் இவ்வாறு பிரித்துக் கிடைக்கும் சிறிய முக்கோணங்களுக்கு ஒரே பரப்பளவாகும் அல்லவா ?

பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

> எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு உச்சியையும் எதிர்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, முக்கோணத்தை ஒரே பரப்பளவுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

இனி மேல் உச்சி, கீழ்பக்கத்தின் மையப்புள்ளிக்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால்? எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:




இப்போது சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் என்ன ?

இடது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ சதுரசென்டிமீட்டர்

வலது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ சதுரசென்டிமீட்டர்

அதாவது, இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில், சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் இரண்டு மடங்கு பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவு.

கீழ்பக்கத்தைப் பிரித்திருப்பதும் இதே அளவில் அல்லவா? சிறிய துண்டின் நீளத்தின் இரண்டு மடங்கு பெரிய துண்டின் நீளம்.

இதை விகிதமாகக் கூறினால் ?

கீழ்பக்கம் பிரிக்கப்பட்டிருப்பது 1 : 2 என்ற விகிதத்திலாகும், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பிரிக்கப்பட்டிருப்பதும் இதே விகிதத்திலாகும்.

விகிதத்தை மாற்றினாலும் இது சரியாக இருக்குமா ?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்:

(i) முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியிலிருந்துள்ள ஒரு கோடு எதிர்பக்கத்தை இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. முக்கோணம் இரண்டு முக்கோணங்களாகின்றன.

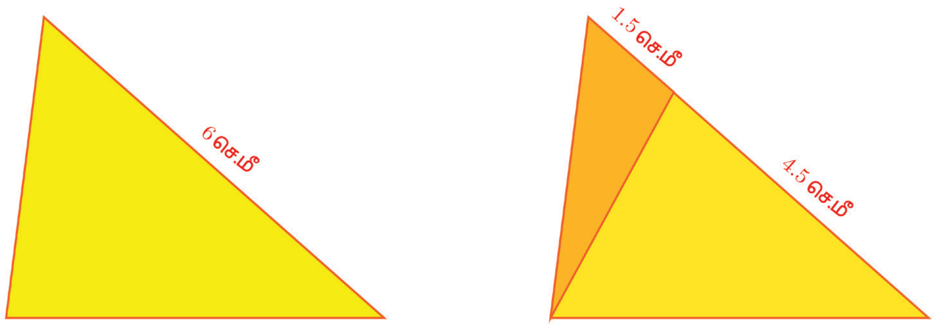
(ii) பக்கத்தின் இரண்டு பாகங்களையும், முக்கோணத்தின் உயரத்தின் பாதியால் பெருக்கி கிடைப்பதே முக்கோணப் பாகங்களின் பரப்பளவுகள்.

(iii) அப்போது பக்கத்தின் பாகங்களின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதமே, முக்கோணப் பாகங்களின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையேயும்.

இதைச் சுருக்கமாக இவ்வாறு கூறலாம்:

**ஒரு முக்கோணத்தில் எந்த உச்சியிலிருந்தும் எதிர் பக்கத்திற்கு வரையும் ஒரு கோடு, அந்த பக்கத்தின் நீளத்தையும், முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.**

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:

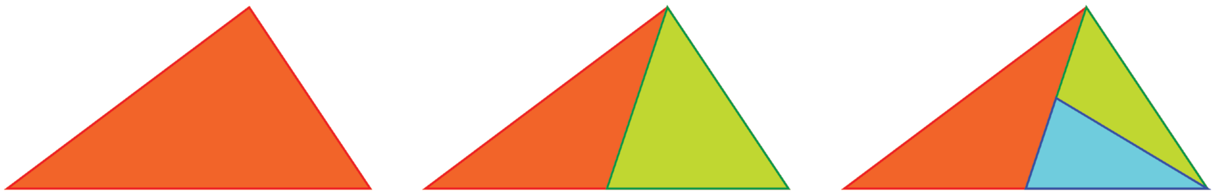



முக்கோணத்தின் இடது உச்சியிலிருந்து வரையப்பட்ட கோடு, வலதுபக்கத்தை எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது ?

1.5 இன் 3 மடங்கே 4.5; அப்போது பக்கத்தின் சிறிய பாகத்திற்கும் பெரிய பாகத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் 1 : 3

வலது பக்கப் படத்தில் உள்ள இரண்டு சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் இதுவே. அதாவது, இவற்றில் உள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் மூன்று மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவு.

இனி இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும் :



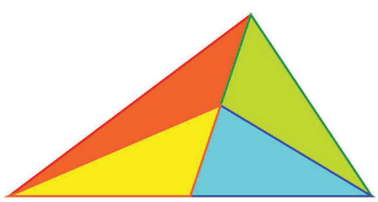
முதல் படத்திலுள்ள முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியையும், கீழ்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்து இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதே இரண்டாவது படம்.

இரண்டாவது படத்தில் உள்ள இரண்டு சிறிய முக்கோணங்களில் பச்சைநிற முக்கோணத்தின் வலது உச்சியையும் இடது பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்ததே மூன்றாவது படம்.

இந்தப் படத்திலுள்ள சிவப்புநிற, பச்சைநிற, நீலநிற முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றின் பரப்பளவு, அவை அனைத்தும் சேர்ந்த பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை பாகமாகும் ?

பச்சைநிற, நீலநிற முக்கோணங்கள் பெரிய முக்கோணத்தின் கால்பாகம் வீதம் என்பதைப் பார்க்க முடிகிறதா ?

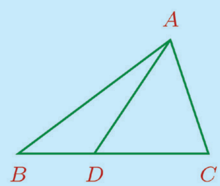
இனி சிவப்புநிற முக்கோணத்தின் இடது உச்சியையும் வலது பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்தால் ?



நான்கு சிறிய முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் பெரிய முக்கோணத்தின் எத்தனை பாகம் ஆகும்?

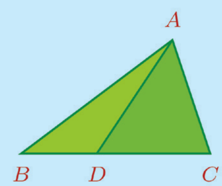
### பரப்பளவுகளின் தொடர்பு

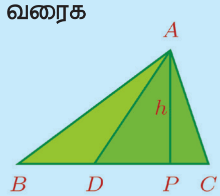
படத்தைப் பார்க்கவும்.




இதில் $ABD$, $ACD$ என்ற முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் என்ன ?

$A$ யிலிருந்து $BC$ க்கு செங்குத்துக்கோடு வரைக




இந்த செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $h$ என எடுத்தால்

$\Delta ABD$ இன் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} h \times BD$$

$\Delta ACD$ இன் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} h \times CD$$

அப்போது

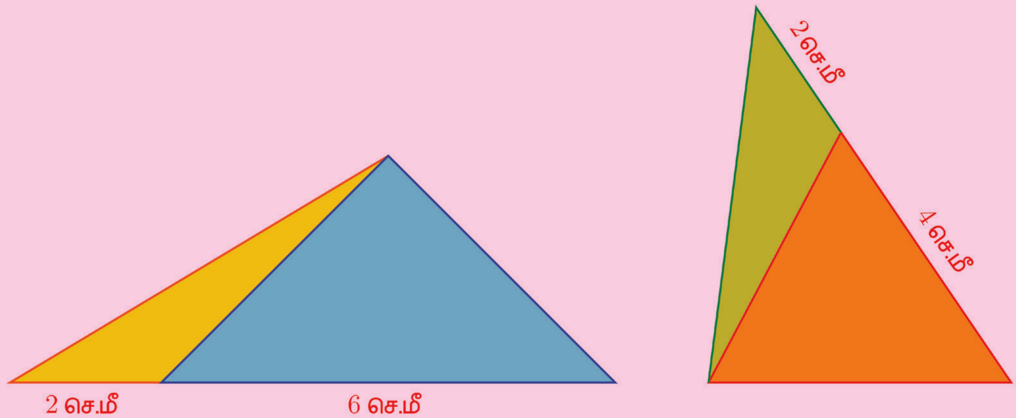
$$\frac{\Delta ABD \text{ இன் பரப்பளவு}}{\Delta ACD \text{ இன் பரப்பளவு}} = \frac{BD}{CD}$$

அதாவது, இந்தப் பரப்பளவுகளின் விகிதம் $BD$, $CD$ என்ற நீளங்களின் விகிதம் ஆகும்.

அப்போது ஒரு முக்கோணத்தை ஒரே பரப்பளவுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிப்பது எவ்வாறு?

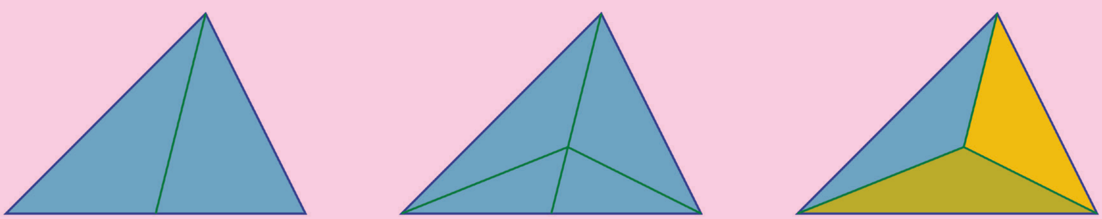
ஒரு பாகத்தின் பரப்பளவு, இரண்டாவது பாகத்தின் பரப்பளவின் இருமடங்கு ஆக வேண்டுமெனில்?

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் ஒரு முக்கோணம் சிறிய முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு படத்திலும் சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் மொத்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவில் எவ்வளவு பாகம் எனக் கணக்கிடுக:




(2) கீழேயுள்ள படங்களில் ஒரு முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியையும் கீழ்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைத்தபின் இந்தக் கோட்டை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியுடன் மற்ற இரண்டு உச்சிகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன

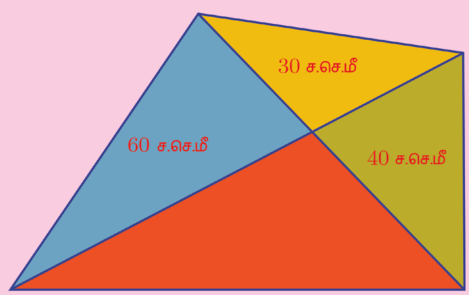
.



மூன்றாவது படத்தில் உள்ள மூன்று முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் எவ்வளவு பாகமாகும் ?

(3) படத்தில் ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அதை நான்கு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன. மூன்று பாகங்களின் பரப்பளவுகள் படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

நாற்கரத்தின் மொத்தப் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.



# 9

# வட்டங்கள்

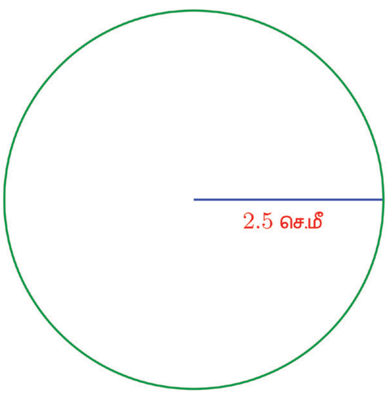
## விட்டம்

பல அளவுகளை ஆரங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் வரைந்து பழக்கம் உள்ளதல்லவா. ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டரான வட்டம் வரைவது எவ்வாறு ?

முதலில் 2.5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரையவும்

2.5 செ.மீ

இனி கோட்டின் ஒரு முனையில் கவராய முனையை நிலைநிறுத்தி, பென்சில் முனையை மறுமுனை வரை நீட்டி வட்டம் வரையலாம் அல்லவா




இதைப் போன்று ஆரம் 2.25 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டம் வரைய இயலுமா ?

**இருசமவெட்டிகள்** என்ற பாடத்தில், பக்கங்களின் நீளம் 3.25 சென்டிமீட்டரான சமபக்கமுக்கோணம் வரைந்ததை நினைவில் கொள்ளவும். 6.5 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டைப் பாதியாகப் பிரித்தல்லவா அதை வரைந்தோம்?

அதைப் போன்று 4.5 சென்டிமீட்டர் கோட்டைப் பாதியாக்கினால், 2.25 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு கிடைக்குமல்லவா.

### மையமும் ஆரமும்

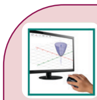
வட்டத்தைப் பற்றி ஐந்தாம் வகுப்பில் கோடும் வட்டமும் என்ற பாடத்தில் வட்டக்கணக்கு என்ற பகுதியில் கூறியது நினைவில் உள்ளதா?

வட்டம் வரைவதற்குக் கவராயத்தின் முனையை ஒரு இடத்தில் நிலைநிறுத்திப் பென்சிலின் முனையை அதனைச் சுற்றிலும் சுழற்றுவோம் அல்லவா. இந்த இயக்கத்தில் எப்போதும், பென்சிலின் முனை கவராய முனையிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் ஆகும்:

இதை கணித மொழியில் இவ்வாறு கூறலாம்:

> ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் இருந்து ஒரே தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை தான் வட்டம்

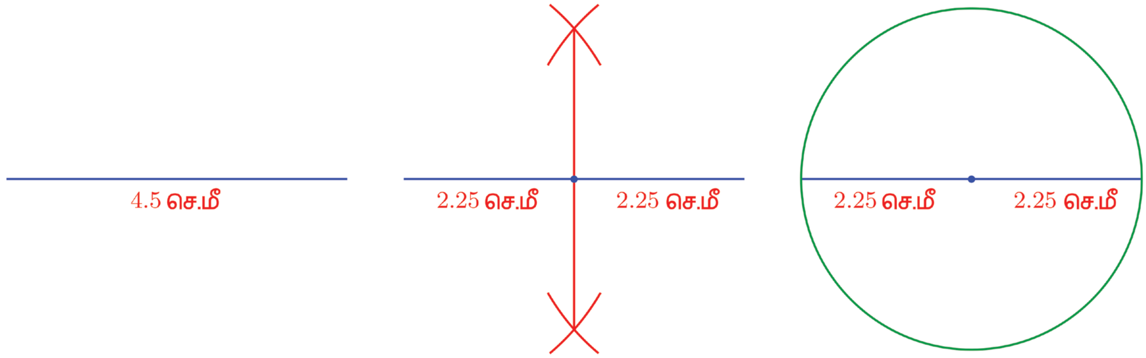
- நகராமல் மையத்தில் நிற்கும் புள்ளி வட்டமையம்.
- நகராத புள்ளிக்கும் சுழல்கின்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள நிலையான தூரம் வட்டத்தின் ஆரம் ஆகும்



### பயணப் பாதை

ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Segment with Given Length பயன்படுத்தி A யில் கிளிக் செய்யும் போது வரும் சாளரத்தில் 2.5 என அளித்தால் நீளம் 2.5 ஆன AB என்ற ஒரு கோடு கிடைக்கும். B என்ற புள்ளிக்கு Trace on அளிக்கவும் (Right click → Trace on). இந்தப் புள்ளிக்கு Animation அளிக்கவும் (Right click → Animation On). B பயணிக்கும் பாதை எது?

எந்தக் கோட்டையும் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரைந்து பாதியாக்கலாம்.

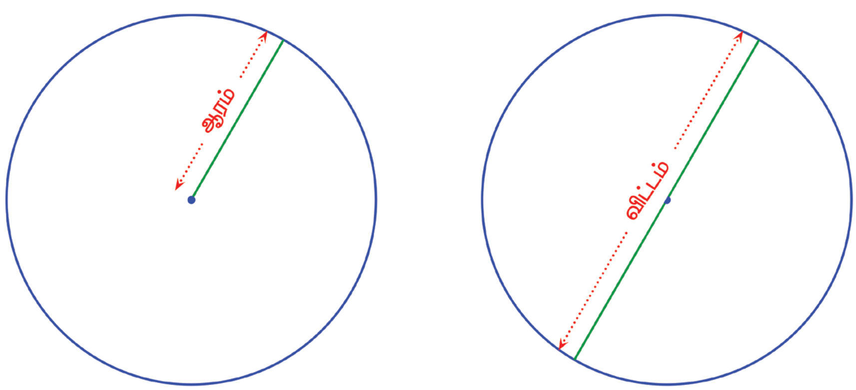



இங்கு ஆரத்தின் இரண்டு மடங்கு நீளமுள்ள கோட்டைப் பயன்படுத்தியல்லவா வட்டம் வரைந்தோம்.

ஆரத்தின் இரண்டு மடங்கை, **வட்டத்தின் விட்டம் (diameter)** எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இப்போது வரைந்த வட்டத்தின் ஆரம் 2.25 சென்டிமீட்டரும், விட்டம் 4.5 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்.

வட்டமையத்தையும் வட்டத்தில் ஏதாவது புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டையும் ஆரம் என்றேதான் கூறுகிறோம். அதைப் போன்று ஆரத்தை வட்ட மையத்தின் மறுபாகத்திற்கு நீட்டி, வட்டத்துடன் மீண்டும் இணைத்தால் கிடைக்கின்ற கோட்டையும் விட்டம் என்று தான் கூறுகிறோம்.




அப்போது விட்டம் என்பதனை இவ்வாறும் கூறலாம். வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளை இணைத்து, வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு கோடுதான் விட்டம்.

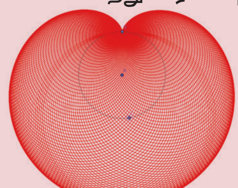
ஒரு வட்டத்தில் ஏதாவது இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளையெல்லாம் பொதுவாக **நாண்(chord)** எனக் கூறுகிறோம்.

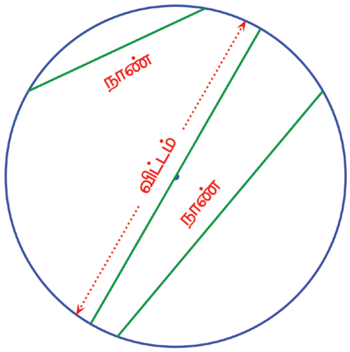
அப்போது வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் நாண்கள் தான் விட்டங்கள்.

குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியை மையமாக்கி ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரமுள்ள வட்டத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரைவதற்கு Circle : Centre & Radius பயன்படுத்தி புள்ளியில் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் ஆரம் அளித்தால் போதுமானது குறிப்பிட்ட புள்ளியை மையமாக்கி வேறொரு புள்ளியின் வழியே கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைவதற்கு Circle with Centre through Point பயன்படுத்தி புள்ளிகளில் வரிசையாக கிளிக் செய்தால் போதும்.

**வட்டப் படங்கள்**

A என்ற புள்ளியை மையமாகவும் ஆரம் 3 ஆகவும் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டத்தில் B, C என்றிவ்வாறு இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும் C மையமான B இன் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரையவும். இந்த வட்டத்திற்குப் பொருத்தமான ஒரு நிறத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம் (Right click → Object Properties Color). வட்டத்திற்கு Trace On அளிக்கவும். C என்ற புள்ளிக்கு Animation அளித்து பார்க்கவும்.






A என்ற புள்ளியை மையமாகவும் ஆரம் 3 ஆகவும் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டத்தில் B, C என இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். Segment பயன்படுத்தி B, C இவற்றை இணைத்து நாண் வரையவும். Distance or Length பயன்படுத்தி இந்தக் கோட்டில் கிளிக் செய்து நாணின் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். C இன் இடத்தை வட்டத்தின் வழியாக மாற்றிப் பார்க்கவும். நாணின் மிகக் கூடிய நீளம் எவ்வளவு? எப்போது நாணிற்கு மிகவும் கூடிய நீளம் கிடைக்கிறது ?

படத்திலிருந்து மேலும் ஒரு கருத்து தெளிவாகிறது.; வட்டத்தில் மிகவும் நீளம் கூடிய நாண், விட்டமாகும்.

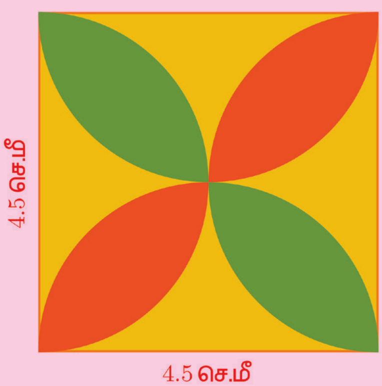
அப்போது வட்டத்தின் விட்டத்தை எவ்வாறெல்லாம் கூறலாம் ?

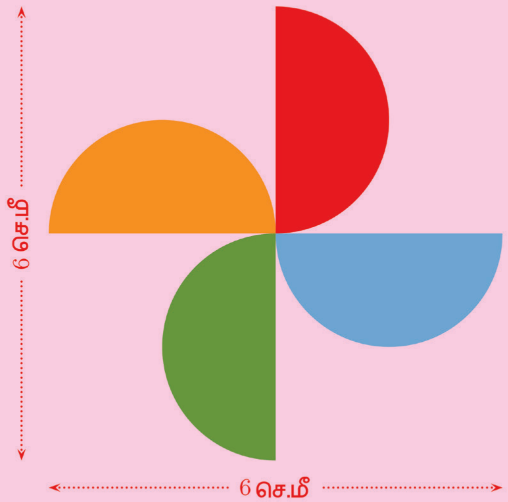
**ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்**

- **ஆரத்தின் இரண்டு மடங்காகும்**
- **வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் நாண் ஆகும்**
- **வட்டத்தில் மிகவும் நீளம் கூடிய நாண் ஆகும்.**

(1) ஆரம் 2. 75 சென்டிமீட்டரான வட்டம் வரையவும்.

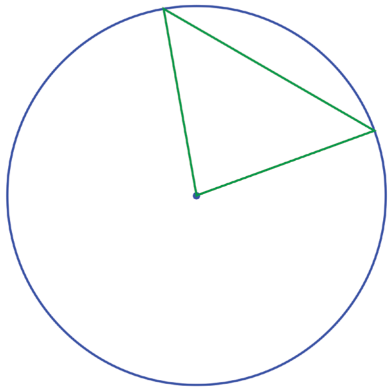
(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களை வரையவும்.



## நாண்கள்

ஒரு நாணின் இரண்டு முனைகளையும் வட்டமையத்துடன் இணைத்தால் ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா:

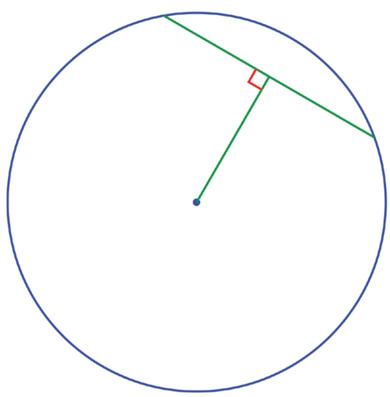


இந்த முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நாண் ஆகும்; மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் வட்டத்தின் ஆரங்களாகும். அதனால் சமம் ஆகும்.

அதாவது, இது ஒரு இருசமபக்கமுக்கோணமாகும். எந்த இருசமபக்கமுக்கோணத்திலும், சமபக்கங்கள் இணையும் உச்சியில் இருந்து எதிர்பக்கத்திற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு இந்தப் பக்கத்தை சமபாகம் செய்யும் என **சமமுக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்தோம் அல்லவா (**இருசமபக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

இங்கு சமபக்கங்கள் இணையும் உச்சி வட்டமையமாகும். எதிர்பக்கம், நாணும் ஆகும். அப்போது மேற்கூறிய முக்கோணத்தின் கருத்தை ஒரு வட்டத்தின் கருத்தாக இவ்வாறு கூறலாம்:

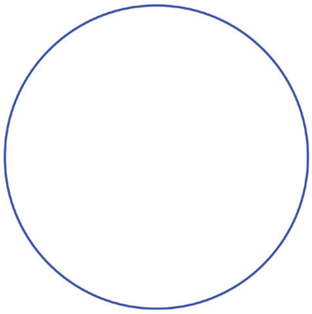
**வட்டமையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்குத்கோடு நாணை சமபாகம் செய்யும்**



**சமமுக்கோணம்** என்ற பாடத்தில் **இருசமபக்க முக்கோணம்** என்ற பகுதியில் கூறியதைப் போன்று இந்தக் கருத்தை வேறு இரண்டு முறைகளிலும் கூறலாம்:

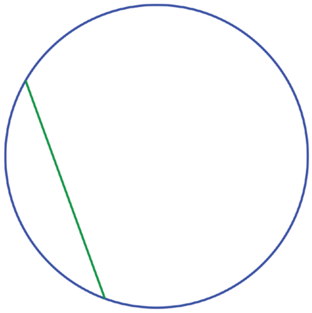
- **நாணின் மையப்புள்ளியையும் வட்ட மையத்தையும் இணைக்கும்கோடு தான் நாணின் செங்குத்து இருசமவெட்டியாகும்.**
- **நாணின் செங்குத்து இருசமவெட்டி, வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.**

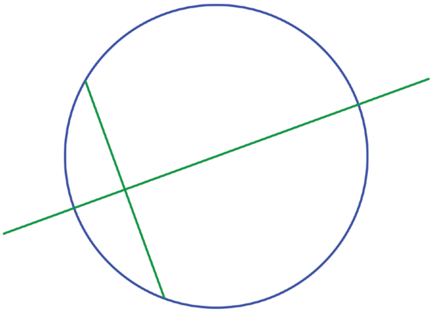
இதைப் பயன்படுத்தி, ஒரு வட்டத்தின் மையத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஒரு வளையலையோ, சிறிய ஒரு வட்டப் பாத்திரத்தையோ பயன்படுத்தி ஒரு வட்டம் வரையவும்:



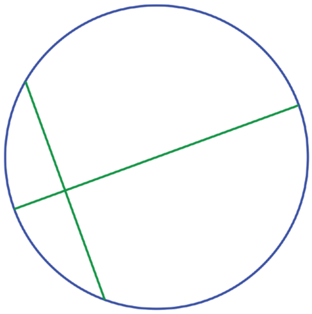
A ஐ மையமாக்கி ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதற்கு BC என்ற நாண் வரையவும். Perpendicular Bisector ஐப் பயன்படுத்தி நாணின் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரையவும். இது வட்டமையத்தின் வழியாக கடந்து செல்கிறதா? B, C என்ற புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

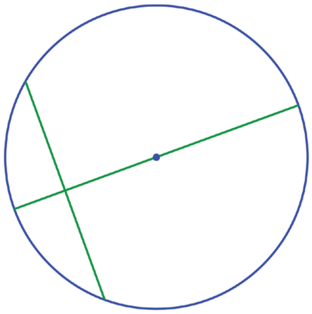
இதன் மையம் எந்த நாணினுடையவும் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் அல்லவா. அப்போது முதலில் இதன் ஒரு நாணையும் அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டியையும் வரையலாம்.





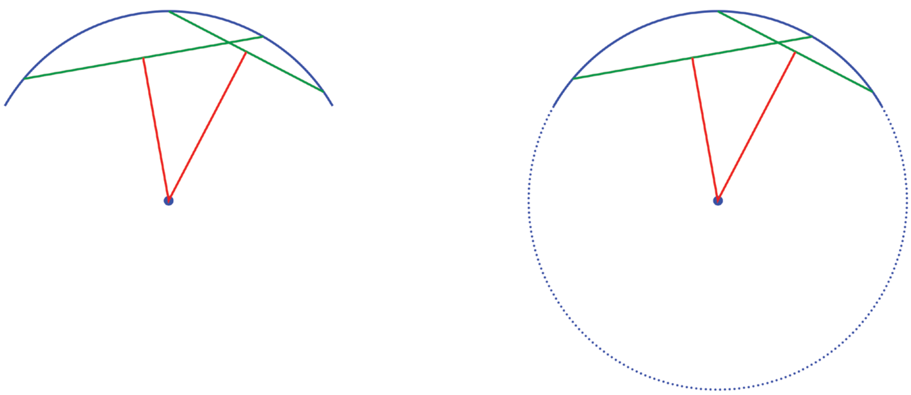
இந்தச் செங்குத்து இருசமவெட்டி வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் அல்லவா. அப்போது வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள அதன் பாகங்களை அழித்துவிட்டால், வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் நாண் ஆனது. அதாவது விட்டம். இனி இந்த விட்டத்தின் மையப்புள்ளியாக வட்டமையத்தை அடையாளப்படுத்தலாம் அல்லவா:



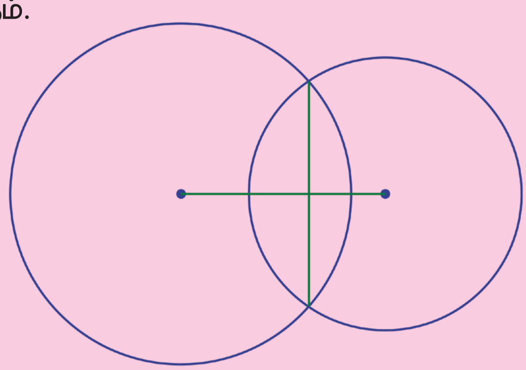


இனி வட்டத்தின் ஒரு பாகம் மட்டும் (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வளையல் துண்டு) கிடைத்தாலும் இதைப் போன்று வட்டமையத்தையும் அதன் மூலம் முழு வட்டத்தையும் கண்டுபிடிக்கலாம். முதலில் இந்த வளையல் துண்டில் இரண்டு நாண்களை வரையவும்:

வட்டமையம் இந்த இரண்டு நாண்களினுடையவும் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் இருக்கும். அதாவது அவைகள் சந்திக்கும் புள்ளியே வட்டமையம் ஆகும்:



(1) படத்தில் கிடைமட்டமாககோடு, வட்டமையங்களை இணைத்து வரைந்ததும், செங்குத்தாக உள்ள கோடு வட்டங்கள் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளை இணைத்து வரைந்ததும் ஆகும்.



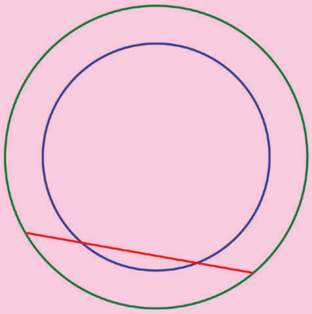
கீழே கூறப்படும் கருத்துக்களின் காரணம் எழுதவும்:

(i) செங்குத்துக்கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டி, இரண்டு வட்டங்களினுடையவும் மையங்கள் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.

(ii) கிடைமட்டக்கோடு, செங்குத்துக் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியாகும்.

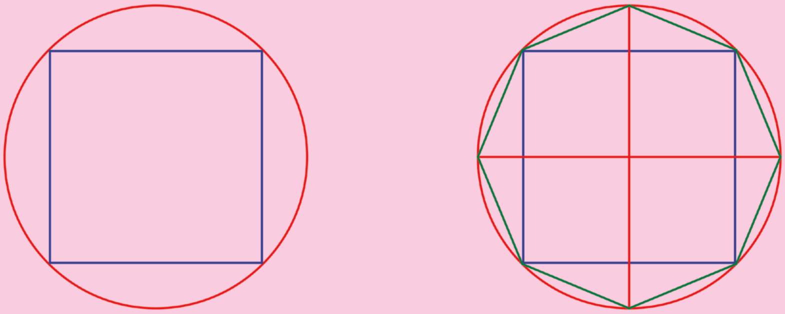
இதிலிருந்து கிடைக்கும் பொதுக்கருத்து என்ன ?

(2) ஒரே மையத்தைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்களும், ஒரு கோடும் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது:



கோட்டின் இருபக்கங்களிலும் உள்ள, வட்டங்களுக்கு இடையே உள்ள பகுதிகளுக்கு ஒரே நீளம் என நிறுவுக.

(3) ஒரு சதுரமும், அதன் நான்கு உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டமும் வரையவும். சதுரத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையான விட்டங்கள் வட்டத்தைத் தொடுகின்ற புள்ளிகளையும், சதுரத்தின் உச்சிகளையும் இணைத்து வேறொரு பலகோணம் வரையவும்.

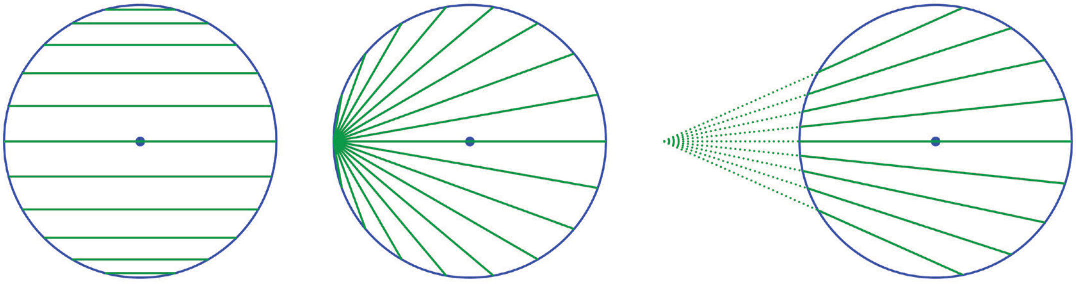


இது ஒரு ஒழுங்கு எண்கோணம் என நிறுவுக.

## சம நாண்கள்

வட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற நாண்கள் விட்டங்கள் ஆகும்; ஒரு வட்டத்தில் மிகவும் நீளம் கூடிய நாண்களும் விட்டங்களே ஆகும்.

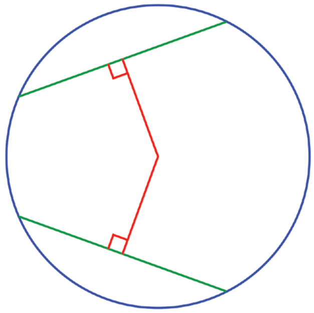
மையத்திலிருந்து அகன்று செல்லச் செல்ல நாணின் நீளம் குறைந்து கொண்டே வரும்:



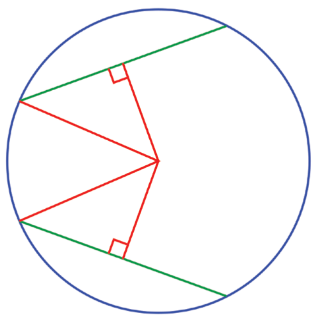
நகர்ந்தாலும், சுழன்றாலும் வட்டமையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள நாண்களுக்கு ஒரே நீளம் எனத் தோன்றுகிறதல்லவா ?

இதை எவ்வாறு உறுதிசெய்யலாம் ?

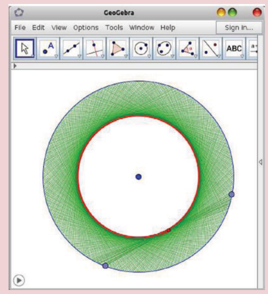
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



வட்டமையத்திலிருந்து ஒரே செங்குத்துத் தூரத்தில் உள்ள இரண்டு நாண்களுக்கும் ஒரே நீளம் என காண்பிக்க, ஒவ்வொன்றினுடையவும் ஒரு முனையை வட்டமையத்துடன் இணைக்கவும்:



ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு நாண் வரையவும். இந்த நாணின் மையப்புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். நாணின் முனைப்புள்ளிகளுக்கு Animation கொடுக்கவும். நாணின் மையப்புள்ளிக்கு Trace On கொடுக்கவும். இதன் இயங்குபாதை எது? எதனால் இது இவ்வாறு? நாணிற்கு Trace On அளித்துப் பார்க்கவும். நாணிற்கு நிறம் அளித்துப் படத்தை அழகுபடுத்தவும் செய்யலாம்.




இப்போது கிடைத்த இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணங்கள், வட்டத்தின் ஆரங்கள் ஆனதால் சமம் ஆகும். ஒரு ஜோடி செங்குத்துப் பக்கங்கள் நாண்களுக்குள்ள சமமான செங்குத்துக் கோடுகளாகும். அப்போது பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி, மூன்றாவது பக்கங்களும் சமமாகும்.

வட்டமையத்திலிருந்துள்ள செங்குத்துக்கோடு வெட்டிய துண்டுகள் ஆனதால், இந்த மூன்றாவது பக்கங்கள் நாண்களின் பாதியாகும். அவ்வாறு நாண்களின் பாதிகள் சமம் எனக் காணலாம். நாண்களும் அவ்வாறாகும்.

**வட்டமையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள நாண்களுக்கு ஒரே நீளம் ஆகும்.**

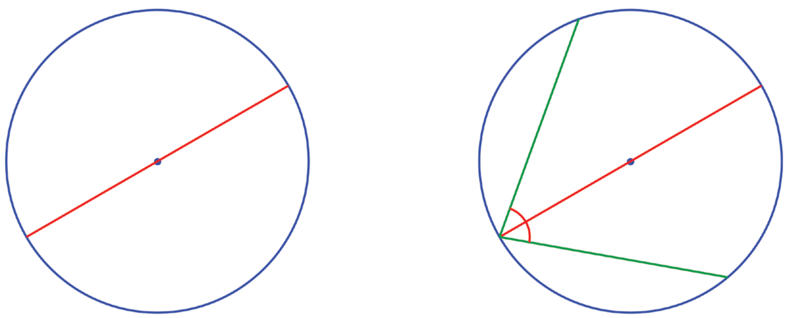
இதை திருப்பி கூறினால் சரியாகுமா ?

அதாவது, ஒரு வட்டத்தில் சமமான இரண்டு நாண்கள், வட்ட மையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்திலா ?

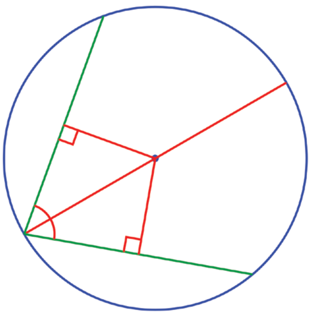
இனி முதலில் பார்த்த மூன்று படங்களில் இரண்டாவது படத்தைப் பார்க்கவும். ஒரு புள்ளியின் வழியாக வரையும் நாண்களில், அந்தப் புள்ளியின் வழியாக உள்ள விட்டத்துடன் உருவாக்கும் கோணம் மாறுவதற்கு ஏற்ப நீளமும் மாறுகிறது அல்லவா ?

விட்டத்தின் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே கோணம் உருவாக்குகின்ற நாண்களுக்கு ஒரே நீளம் ஆகுமா ?

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும், வட்டத்தில் ஒரு விட்டம் வரைந்து, அதன் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே கோணம் உருவாக்கும் நாண்கள் வரையப்பட்டுள்ளது.



இந்த நாண்களுக்கு ஒரே நீளமா எனப் பார்ப்பதற்கு, வட்ட மையத்திலிருந்து இவை இரண்டிற்கும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையலாம்:



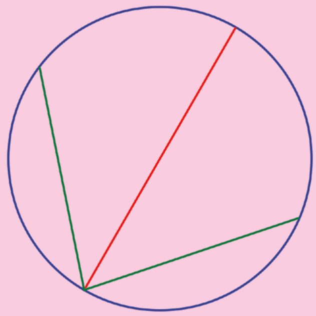
இவ்வாறு கிடைக்கும் செங்கோண முக்கோணங்களில் இரண்டு கோணங்கள் சமமானதால், மூன்றாவது கோணங்களும் சமமாகும். இவற்றிற்கு ஒரே கர்ணம் அல்லவா. ஒரு பக்கமும் அதிலுள்ள இரண்டு கோணங்களும் சமமானதால், முக்கோணங்களின் மற்ற பக்கங்களும் சமம் ஆகும். (**சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு கோணங்கள்** என்ற பகுதி).

முக்கோணங்களின் பச்சை நிறப் பக்கங்கள் நாண்களின் பாதி அல்லவா. இவை சமமானதால், நாண்களும் சமம் ஆகும்.

மாறாக, ஒரு விட்டத்தின் முனையிலிருந்து ஒரே நீளமுடைய இரண்டு நாண்கள் வரைந்தால். அவை விட்டத்துடன் உருவாக்கும் கோணங்களும் சமம் ஆகுமா ?

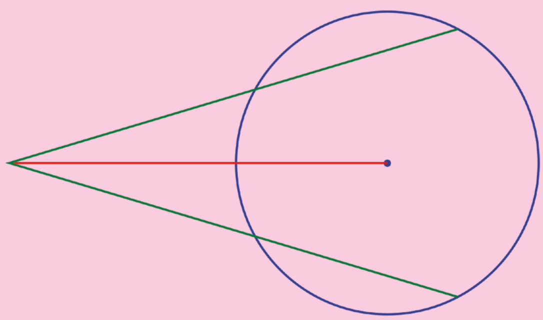
(1) ஒரு வட்டத்தில் ஒரே நீளமுள்ள நாண்கள் எல்லாம் வட்டமையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

(2) படத்தில் வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் முனையிலிருந்து ஒரே நீளமுள்ள இரண்டு நாண்கள் வரையப்பட்டுள்ளது.



நாண்கள் விட்டத்துடன் உருவாக்கும் கோணங்கள் சமமாகும் என நிறுவுக.

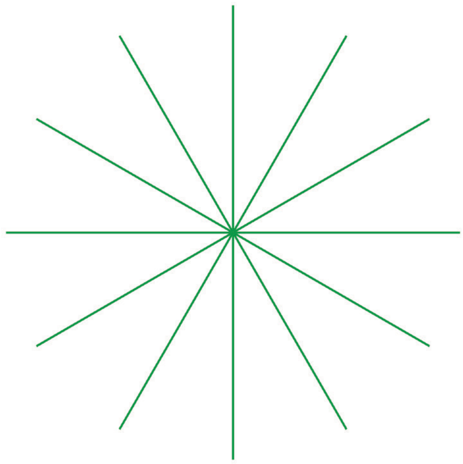
(3) படத்தில் வட்டத்திலுள்ள ஒரே நீளமுள்ள இரண்டு நாண்களை நீட்டி வரையும் போது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கிறது:



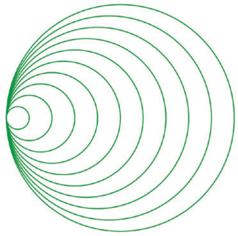
சந்திக்கும் புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைக்கின்ற கோட்டுடன் ஒரே கோணங்களையே இந்தக் கோடுகள் உருவாக்கும் என நிறுவுக.

## கோடுகளும் வட்டங்களும்

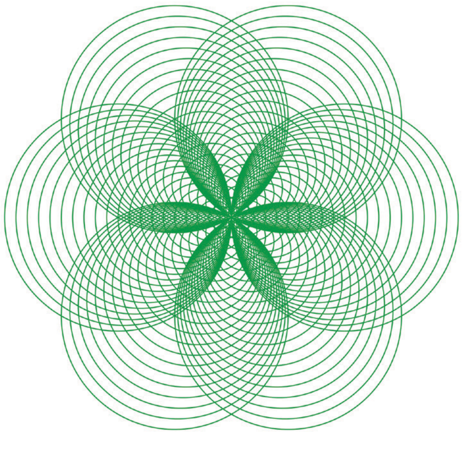
ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஏராளமான கோடுகளை வரையலாம்:



ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஏராளமான வட்டங்களையும் வரையலாம். ஏதாவது ஒரு புள்ளியை மையமாகவும், இந்தக் குறிப்பிட்ட புள்ளிக்குள்ள தூரத்தை ஆரமாகவும் வரைந்தால் போதும் அல்லவா.



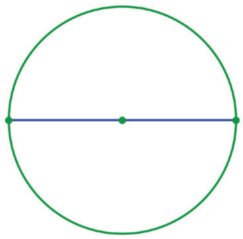
மேலும் பல வட்டங்கள் வரைந்து, அழகான படங்களையும் வரையலாம்:



இனி இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தால்? அவற்றை இணைத்து ஒரு கோடு வரையலாம். இந்தப் புள்ளிகளின் வழியாக ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா ?

நோட்டுப் புத்தகத்தில் இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். அவற்றின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரையலாமா ?

மிகவும் எளிதாகச் செய்யக் கூடியது, இவற்றை இணைக்கின்ற கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு வட்டம் வரைவதே.

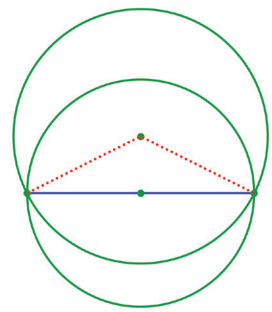


வேறொரு வட்டம் வரையலாமா ?

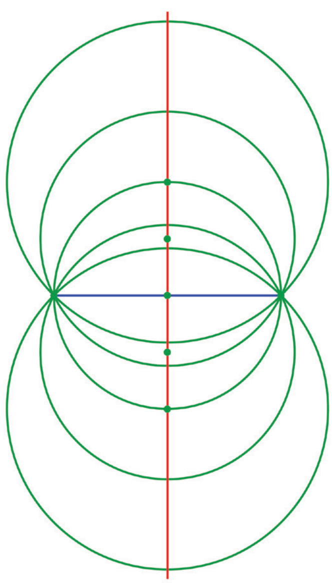
அதன் மையம் எந்த இடத்திலும் ஆகலாமா ?

இந்தப் புள்ளிகள் வட்டத்தில் ஆக வேண்டும் எனில், அவை வட்ட மையத்திலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்க வேண்டும் அல்லவா ?

திருப்பி கூறினால், இந்தப் புள்ளியில் இருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியை எடுத்தால், அதை மையமாகவும் இந்தத் தூரத்தை ஆரமாகவும் வரைகின்ற வட்டம் இந்தப் புள்ளிகளின் வழியே கடந்து செல்லும்:



இரண்டு புள்ளிகளில் இருந்தும் ஒரே தூரத்தில் ஆனதால், வட்ட மையம் இந்தப் புள்ளிகளை இணைத்து வரையும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியில் இருக்க வேண்டும். மாறாக இந்த செங்குத்து இருசமவெட்டியின் எந்தப் புள்ளியையும் மையமாகக் கொண்டு இந்தப் புள்ளிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையலாம் அல்லவா.

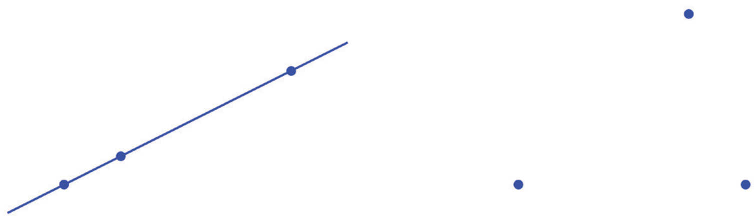


AB என்ற ஒரு கோடு வரைந்து அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டி வரையவும். இதில் C மையமான A இன் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையவும். வட்டத்திற்கு Trace On அளிக்கவும். C என்ற புள்ளிக்கு Animation அளித்துப் பார்க்கவும்.

அதாவது, இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளின் வழியாக ஒரே ஒரு கோடு மட்டுமே வரைய இயலும், ஆனால் ஏராளமான வட்டங்களை வரையலாம். .

இனி மூன்று புள்ளிகளை எடுத்தால் ?

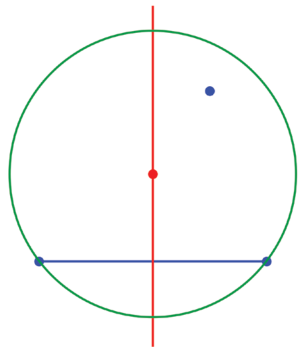
ஏதாவது இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிலேயே மூன்றாவது புள்ளி எனில், அந்தக் கோடு இந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும்; இல்லையெனில் மூன்று புள்ளிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் கோடு வரைவதற்கு இயலாது:



ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைய இயலுமா ?

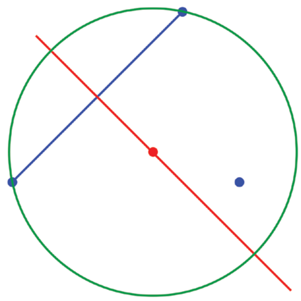
புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் இயலாது, இல்லையெனில் ?

வரைவதற்கு முயற்சி செய்வதற்கு முன்பு சிறிது சிந்திக்கலாம். (சிந்தனைக்குப் பின்பு மட்டுமே செயல் என்பது கணித முறையாகும்):



இதில் ஏதாவது இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் எந்தப் புள்ளியை மையமாக எடுத்தாலும், இந்த இரண்டு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையலாம்:

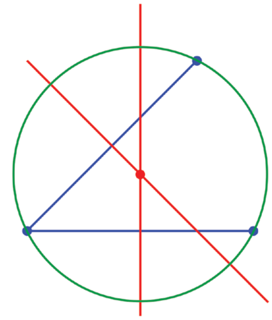
இதைப் போன்று வேறொரு ஜோடிப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியின் எந்தப் புள்ளியை எடுத்தாலும் அவற்றின் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் வரையலாம்:



மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி Circle through 3 Points பயன்படுத்தி அவற்றின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையவும். புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் ஆகும் போது என்ன நிகழ்கிறது?

முதலில் எடுத்த ஒரு ஜோடி புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் கிடைப்பதற்கு, மையம் முதல் செங்குத்து இருசம வெட்டியில் இருக்க வேண்டும். இரண்டாவது ஜோடி புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் கிடைப்பதற்கு மையம் இரண்டாவது செங்குத்து இருசமவெட்டியில் இருக்க வேண்டும்.

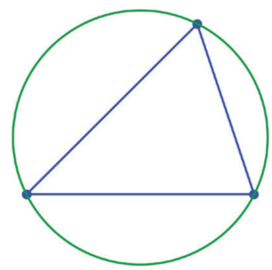
இரண்டு செங்குத்து இருசம வெட்டிகளிலுள்ள புள்ளியை எடுத்தால் அதாவது, அவை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளி ?



மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையலாம் அல்லவா.

ஒரே கோட்டில் அமையாத எந்த மூன்று புள்ளிகளின் வழியாகவும் கடந்து செல்கின்ற ஒரே ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

மீதமுள்ள ஒரு ஜோடி புள்ளிகளையும் இணைத்தால் ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும்; வட்டம் அதன் மூன்று உச்சிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும்:

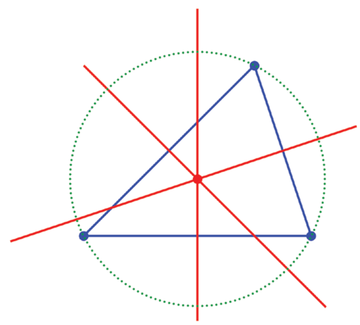


அப்போது மேற்கூறிய கருத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்:

எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் மூன்று உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரே ஒரு வட்டம் வரையலாம்

இந்த வட்டத்தை முக்கோணத்தின் **சுற்றுவட்டம் (circumcircle)** எனக் கூறுவர்.

இங்கு வேறொரு கருத்தையும் காணலாம். முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம், இடது பக்கம் ஆகியவற்றின் செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் வரைந்து **சுற்றுவட்டமையம் (circumcentre)** கண்டுபிடித்தோம். வலது பக்கமும் சுற்றுவட்டத்தின் நாண் ஆனதால், அதன் செங்குத்து இருசமவெட்டியும் சுற்றுவட்டமையத்தின் வழியாகக் கடந்து செல்லும்.



**எந்த முக்கோணத்திலும் மூன்று பக்கங்களினுடையவும் செங்குத்து இரு சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகக் கடந்து செல்கின்றன.**

கீழே கூறப்பட்டுள்ள அளவுகளுள்ள முக்கோணங்கள் வரைந்து அவை ஒவ்வொன்றினுடையவும் சுற்றுவட்டம் வரையவும்.

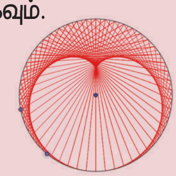
(i) இரண்டு பக்கங்கள் 4, 5 சென்டிமீட்டர்; அவை இணையும் கோணம் 60°.

(ii) இரண்டு பக்கங்கள் 4, 5 சென்டிமீட்டர்; அவை இணையும் கோணம் 120°.

(iii) இரண்டு பக்கங்கள் 4,5 சென்டிமீட்டர்; அவை இணையும் கோணம் 90°.

(சுற்றுவட்டமையத்தின் இடம் மாறுவதைக் கவனிக்கவும்).

ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் BC என்ற நாண் வரையவும். B என்ற புள்ளியில் Right Click செய்து Object Properties இல் Algebra என்பதில் Speed 3 என அளிக்கவும். இதைப் போன்று C என்ற புள்ளியில் Speed 6 எனவும் அளிக்கவும். நாணிற்கு Trace On அளித்தற்குப் பின் முனைப்புள்ளிகளுக்கு Animation அளிக்கவும்.



புள்ளிகளுக்கு Speed 2 எனவும் 6 எனவும் அளித்துப் பார்க்கவும். படத்திற்கு என்ன மாற்றம் நிகழ்கிறது? பிற எண்களை அளித்துப் பார்க்கவும்.

# 10

# தசமவடிவங்கள்

## முதல் வடிவங்கள்

சில பின்ன எண்களின் தசம வடிவங்களை ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. (**தசமமுறையில்** என்ற பாடத்தில் **பின்னமும் தசமும்** என்ற பகுதி ) எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{29}{100} = 0.29$$

$$\frac{347}{1000} = 0.347$$

என்றெல்லாம் எழுதலாம்.

மாறாக, தசமவடிவத்தில் எழுதிய சில எண்களை 10 இன் ஏதாவது அடுக்கு பகுதியான பின்ன எண்களைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0.91 = \frac{91}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000}$$

இவற்றை $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ என்றிவ்வாறு 10 இன் அடுக்குகள் பகுதியான பின்ன எண்களாக விரித்தெழுதலாம்:

$$0.91 = \frac{91}{100} = \frac{90}{100} + \frac{1}{100} = \frac{9}{10} + \frac{1}{100}$$

$$0.671 = \frac{671}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000}$$

அப்போது 0.03 என எழுதுவதன் பொருள் என்ன ?

$$0.03 = \frac{0}{10} + \frac{3}{100} = \frac{3}{100}$$

0.0203 ஆனால் ?

$$0.0203 = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{200}{10000} + \frac{3}{10000} = \frac{203}{10000}$$

கீழே தசமவடிவில் எழுதப்பட்டுள்ள எண்களை எல்லாம் பின்ன எண் வடிவத்தில் எழுதுக.

(i) 0.1 (ii) 0.01 (iii) 0.11 (iv) 0.101 (v) 0.0101

## வேறு சில பின்னங்கள்

சில பின்னங்களின் பகுதி 10 இன் அடுக்கு இல்லை எனினும் அவ்வாறான வடிவத்தில் மாற்றி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $10 = 2 \times 5$ ஆகையால்

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

இதிலிருந்து

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 2}{5\times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4\times 2}{5\times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

என்றெல்லாம் எழுதலாம்.

2 உம் 5 உம் 10 இன் காரணிகள் ஆகையால் அல்லவா இது சாத்தியமானது. அப்போது $\frac{1}{4}$ ஐ தசமவடிவத்தில் எழுதுவது எவ்வாறு ?

4 என்ற எண் 10 இன் காரணியல்ல எனினும், 100 இன் காரணி அல்லவா.

$$4 \times 25 = 100$$

இதைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 25}{4\times 25} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times 25}{4\times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

என்றெல்லாம் எழுதலாம்.

மேலும்

$$\frac{1}{25} = \frac{1\times4}{25\times4} = \frac{4}{100} = 0.04$$
$$\frac{2}{25} = \frac{2\times4}{25\times4} = \frac{8}{100} = 0.08$$
$$\frac{13}{25} = \frac{13\times4}{25\times4} = \frac{52}{100} = 0.52$$

எனவும் கணக்கிடலாம்.

இனி $\frac{1}{8}$ ஆனால் ?

8 என்ற எண் 10 னுடையவோ, 100 னுடையவோ காரணியல்ல.

ஆனால் $8 = 2 \times 2 \times 2$ ஆனதால், மூன்று முறை 5 ஆல் பெருக்கினால் மூன்று 10 களின் பெருக்கல் அல்லவா ?

கணித மொழியில்,

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$$

அதாவது

$$8 \times 125 = 1000$$

இதைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{1}{8} = \frac{1\times125}{8\times125} = \frac{125}{1000} = 0.125$$
$$\frac{3}{8} = \frac{3\times125}{8\times125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

என்றும்

$$\frac{1}{125} = \frac{1\times8}{125\times8} = \frac{8}{1000} = 0.008$$
$$\frac{3}{125} = \frac{3\times8}{125\times8} = \frac{24}{1000} = 0.024$$
$$\frac{13}{125} = \frac{13\times8}{125\times8} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

என்றெல்லாம் எழுதலாமல்லவா.

இனி $\frac{3}{160}$ ஆனால் ?

முதலில் பகுதியைக் காரணிகளாக்கலாம்.

$$160 = 32 \times 5 = 2^5 \times 5$$

இதனைப் பெருக்கி, 10 இன் எந்த அடுக்காக்கலாம் ?

அதற்கு எந்த எண்ணால் பெருக்க வேண்டும் ?

$$160 \times 5^4 = (2^5 \times 5) \times 5^4 = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

அப்போது

$$\frac{3}{160} = \frac{3 \times 5^4}{160 \times 5^4} = \frac{3 \times 625}{100000} = \frac{1875}{100000} = 0.01875$$

அப்போது எந்த வகையான பின்ன எண்களை இவ்வாறு தசமவடிவில் எழுத இயலும் ?

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்ன எண்களைத் தசமவடிவில் எழுதுக.

(i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{3}{40}$ (iii) $\frac{13}{40}$ (iv) $\frac{7}{80}$ (v) $\frac{5}{16}$

(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகைகளின் தசமவடிவங்களைக் காணவும்.

(i) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$

(ii) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

(3) ஓர் இரண்டிலக்க எண்ணை வேறொரு இரண்டிலக்க எண்ணால் வகுத்த போது 5.785 கிடைத்தது. எண்கள் எவை ?

## புதிய வடிவங்கள்

பகுதி 10 இன் அடுக்கு அல்லாத சில பின்னங்களை, அத்தகைய வடிவத்தில் மாற்றி தசமவடிவத்தில் எழுதுவதை பார்த்தோம் அல்லவா.

$\frac{1}{3}$ ஐ இவ்வாறு மாற்ற முடியுமா ?

$\frac{1}{3}$ என்ற பின்ன எண்ணிற்கு பல வடிவங்கள் உள்ளது அல்லவா ?

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

இவற்றில் எல்லாம் பகுதி 3 இன் மடங்காகும்.

அப்போது $\frac{1}{3}$ இன் வடிவங்கள் அனைத்திலும் 10 இன் அடுக்குகளொன்றும் பகுதியாக வராது. காரணம் 10 இன் அடுக்குகளையெல்லாம் 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி ஒன்று ஆகும்.

$$10 = (3 \times 3) + 1$$

$$100 = (3 \times 33) + 1$$

$$1000 = (3 \times 333) + 1$$

அதனால் $\frac{1}{3}$ ஐ இதுவரை பார்த்ததைப் போல உள்ள தசமவடிவமாக எழுத முடியாது.

ஆனால் $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி வருகின்ற சில பின்ன எண்களைத் தசமவடிவத்தில் எழுதலாம்..

அதற்கு முதலில் மேலே, மடங்கும் மீதியுமாக எழுதியவற்றையெல்லாம் பின்ன வடிவத்தில் எழுதலாம்:

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1000}{3} = 333 + \frac{1}{3}$$

இவற்றை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாமல்லவா

$$\frac{1}{3} \times 10 = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 100 = 33 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 1000 = 333 + \frac{1}{3}$$

இதில் முதலில் உள்ளதைப் பார்க்கவும். $\frac{1}{3}$ இன் $10$ மடங்கு $3 + \frac{1}{3}$ என்பதல்லவா இதன் பொருள். அப்போது $\frac{1}{3}$ என்பது, $3 + \frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{10}$ பாகமாகும் (ஏழாம் வகுப்பில் **தலைகீழ் பின்னங்கள்** என்ற பாடத்தில் பாகமும் மடங்கும் என்ற பகுதி) அதாவது

$$\frac{1}{3} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10}$$

தொகையைப் பெருக்க ஒவ்வொன்றையும் பெருக்கிக் கூட்டினால் போதும் என ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. (**கணக்கில் சுருக்கெழுத்து** என்ற பாடத்தில் **கூட்டலும் கழித்தலும் பெருக்கலும்** என்ற பகுதி)அதன்படி $\left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10}$ ஐ எவ்வாறு எழுதலாம் ?

அப்போது

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$$

இதைப் போல மேலே எழுதிய $\frac{100}{3}, \frac{1000}{3}$ இவற்றைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{3}$ எவ்வாறெல்லாம் எழுதலாம்?

$$\frac{1}{3} = \frac{33}{100} + \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{333}{1000} + \frac{1}{3000}$$

இவற்றையெல்லாம், $\frac{1}{3}$ என்ற எண்ணுக்கும், $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}$ என்ற எண்களுக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசமாக எழுதிப் பார்க்கலாம்:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1}{3000}$$

$\frac{1}{30}$ ஐ விட $\frac{1}{300}$ சிறியதல்லவா. அதைவிட சிறியதல்லவா $\frac{1}{3000}$

அப்போது $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}$ என்ற எண்களுக்கும் $\frac{1}{3}$ க்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் படிப்படியாகக் குறைகிறது.

இதை இனியும் தொடரலாமல்லவா:

$$\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000} = \frac{1}{30000}$$

சுருக்கமாகக் கூறினால்

**$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ என்றிவ்வாறு தொடரும் எண்கள் $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.**

$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$ என்பனவற்றின் தசமவடிவத்தைப் பயன்படுத்தி இக்கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

0.3, 0.33, 0.333, ... என்றிவ்வாறு தொடரும் எண்கள் $\frac{1}{3}$ ஐ நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

இந்தக் கருத்தை சுருக்கி எழுதுவது இவ்வாறாகும்:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

இதில் 0.333 ... என்ற தசமவடிவம் முதலில் பார்த்த தசமவடிவங்களிலிருந்து வேறுபட்டது எனக் குறிப்பாக கவனிக்க வேண்டும்.

10 இன் ஏதேனும் அடுக்கு பகுதியான பின்ன எண்களையே இந்தப் பாடத்தின் முதல் பகுதியிலுள்ள தசம வடிவத்தில் எழுதியதாகும். எடுத்துக்காட்டாக 0.3 என்பது $\frac{3}{10}$ என்ற பின்னத்தின் தசவடிவமும், 0.33 என்பது $\frac{33}{100}$ என்ற பின்னத்தின் தசம வடிவமுமாகும்.

ஆனால் 0.333... குறிப்பிடுவது 10 இன் ஏதேனும் அடுக்கு பகுதியான ஒரேயொரு பின்ன எண் அல்ல. 10 இன் அடுக்குகள் பகுதியான பின்ன எண்களின் ஒரு வரிசை படிப்படியாக நெருங்கும். பின்ன எண்ணாகும். இப்போது பார்த்ததைப் போல் இவ்வாறு நெருங்குகின்ற பின்ன எண் $\frac{1}{3}$ ஆனதால், இதை $\frac{1}{3}$ இன் தசமவடிவம் எனக் கூறலாம்.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கலாம். $\frac{1}{6}$ இன் பல வடிவங்கள் அனைத்திலும், ஒன்றிலும் 10 இன் அடுக்குகளொன்றும் பகுதியாக வராது அல்லவா (எதனால் ?).

இதனுடையவும் இந்தப் புதிய முறையிலுள்ள தசமவடிவம் கணக்கிடலாம். அதற்கு முதலில் பார்த்ததைப் போல 10, 100, 1000, ... என்ற எண்களை 6 ஆல் வகுத்து இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1000}{6} = \frac{500}{3} = 166 + \frac{2}{3}$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி, $\frac{1}{6}$ ஐ 10 இன் அடுக்கு பகுதியான ஒரு பின்ன எண்ணினுடையவும் வேறொரு சிறிய பின்ன எண்ணினுடையவும் தொகையாக எழுதலாம்:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{2}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{16}{100} + \frac{2}{300} = \frac{16}{100} + \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{166}{1000} + \frac{2}{3000} = \frac{166}{1000} + \frac{1}{1500}$$

இதிலிருந்து $\frac{1}{6}$ ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற 10 இன் அடுக்குகள் பகுதியான, பின்ன எண்கள் கிடைக்குமல்லவா:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{16}{100} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{166}{1000} = \frac{1}{1500}$$

அதாவது

$\frac{1}{10}, \frac{16}{100}, \frac{166}{1000}, \ldots$ என்றிவ்வாறு தொடர்கின்ற பின்ன எண்கள் (அதாவது, 0.1, 0.16, 0.166, ... என்றிவ்வாறு தசமவடிவமுள்ள பின்ன எண்கள்) $\frac{1}{6}$ ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

இக்கருத்தை சுருக்கித், தசம வடிவமாக எழுதலாம்:

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

இவ்வாறு தசமவடிவம் கணக்கிடும் போது 10, 100, 1000, ...என்ற எண்களை வகுக்க, ஒவ்வொன்றிற்கும் முதலில் இருந்து தொடங்க வேண்டியதில்லை ஒரு வகுத்தலின் தொடர்ச்சியாக அடுத்ததைச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{7}$ இன் தசமவடிவம் கணக்கிட, முதலில் 10 ஐ 7 ஆல் வகுத்து இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

இனி $\frac{100}{7}$ ஐக் கணக்கிட, இதனை 10 ஆல் பெருக்கினால் போதுமல்லவா.

$$\frac{100}{7} = 10 + \frac{30}{7} = 10 + 4 + \frac{2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$$

இதனை இவ்வாறு தொடரலாம்:

$$\frac{1000}{7} = 140 + \frac{20}{7} = 142 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{10000}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1428 + \frac{4}{7}$$

பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கையைத் தவறுகள் இல்லாமல் எழுத, அடுக்குகளைப் பயன்படுத்துவதுதான் வசதி:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

$$\frac{10^2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$$

$$\frac{10^3}{7} = 142 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{10^4}{7} = 1420 + \frac{60}{7} = 1428 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{10^5}{7} = 14280 + \frac{40}{7} = 14285 + \frac{5}{7}$$

$$\frac{10^6}{7} = 142850 + \frac{50}{7} = 142857 + \frac{1}{7}$$

இனி தொடர வேண்டுமா? சிறிது சிந்திக்கலாம். அடுத்த வகுத்தல் இவ்வாறாகும்

$$\frac{10^7}{7} = 1428570 + \frac{10}{7}$$

இதில் $\frac{10}{7}$ முதலில் கணக்கிட்டதல்லவா ? அப்போது

$$\frac{10^7}{7} = 1428571 + \frac{3}{7}$$

இனியும் தொடர்ந்தால் ?

பின்ன எண்களின் செயல்கள் $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$, அதன் பின்னர் $\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$ என்றிவ்வாறு முன்பு செய்த செயல்கள் தான் அதே வரிசையில் தொடரும்; முழு எண்களில் 1428571, 14285714, 142857142 என்றிவ்வாறு முதலில் கணக்கிட்ட இலக்கங்கள்தான் மீண்டும் மீண்டும் வரும்.

அப்போது $\frac{1}{7}$ இன் தசமவடிவம், 142857 என்ற ஆறிலக்க எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதாகும். அதாவது

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857...$$

இதைப்போல $\frac{2}{7}$ இன் தசமவடிவம் கணக்கிடுவதன் கணக்கீடுகளைப் பார்க்கவும்:

$$\frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{200}{7} = 20 + \frac{60}{7} = 28 + \frac{4}{7}$$

$$\frac{2000}{7} = 280 + \frac{40}{7} = 285 + \frac{5}{7}$$

$$\frac{20000}{7} = 2850 + \frac{50}{7} = 2857 + \frac{1}{7}$$

அடுத்த வகுத்தலில் வருவது $\frac{10}{7}$ அல்லவா ?

அது முதலில் கணக்கிட்டதல்லவா.

மட்டுமல்ல, தொடர்ந்துள்ள இரண்டு வகுத்தல்கள் $\frac{1}{7}$ இல் பார்த்ததைப் போல $\frac{30}{7}, \frac{20}{7}$ எனக் கிடைக்கும். அதன் பின்னர் ?

மீண்டும் தொடங்கிய $\frac{60}{7}$ தான் கிடைக்கும்

அப்போது $\frac{2}{7}$ இன் தசமவடிவம், எந்த ஆறு இலக்க வரிசையின் சுழற்சி ?

$$\frac{2}{7} = 0.285714285714...$$

இதைப் போல $\frac{3}{7}$ , $\frac{4}{7}$ இவற்றின் தசமவடிவங்களைக் கணக்கிட்டுப் பாருங்கள்.

(1) கீழே உள்ள பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற 10 இன் அடுக்கு பகுதியான பின்னங்களைக் கண்டுபிடித்து, தசமவடிவத்தில் எழுதுக.

(i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{1}{11}$

(2) (i) $\frac{1}{10}, \frac{11}{100}, \frac{111}{1000}, ...$ என்றிவ்வாறு உள்ள எண்கள் $\frac{1}{9}$ ஐ நெருங்கி நெருங்கி வரும் என நிறுவுக.

(ii) $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ என்பனவற்றின் தசமவடிவங்களைக் காண்க

(iii) $\frac{2}{3}$ இன் தசமவடிவம் என்ன ?

(3) கீழே உள்ளவற்றை கணக்கிட்டு தசமவடிவத்தில் எழுதுக.

(i) 0.111... + 0.222... (ii) 0.333... + 0.777... (iii) 0.333... × 0.666...

(4) கீழே உள்ள ஒவ்வொரு பின்ன எண்ணுடனும் உள்ள வித்தியாசம் $\frac{1}{1000}$ ஐ விடக் குறைவான ஒரு பின்ன எண்ணின் தசம வடிவம் எழுதுக..

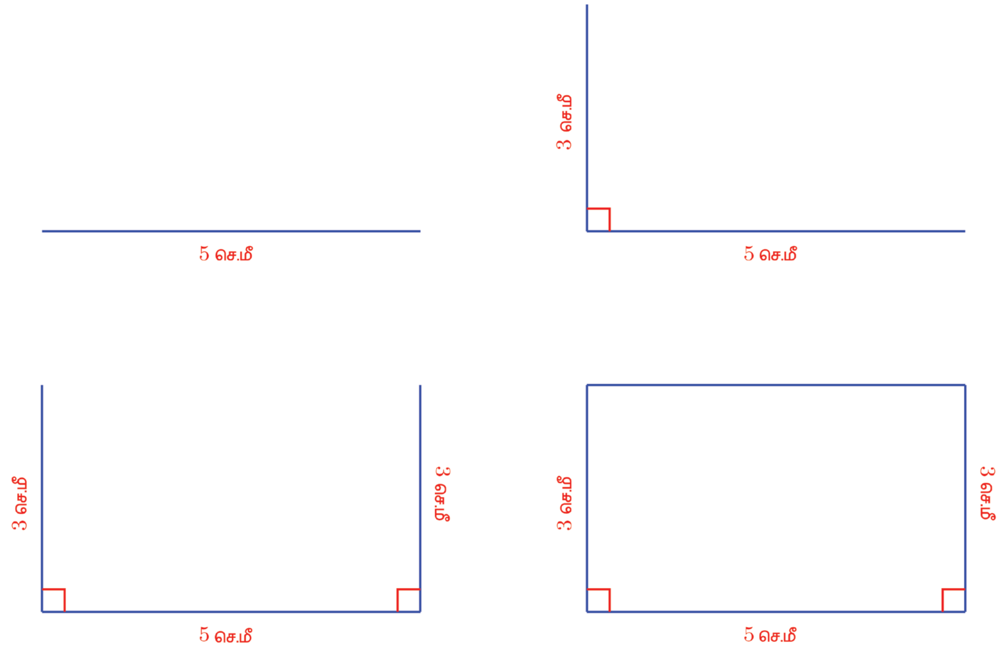
(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{5}{6}$ (v) $\frac{1}{7}$

# 11

# இணைகரங்கள்

## பக்கங்களும் கோணங்களும்

ஒரு செவ்வகம் வரைய இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் தெரிந்தால் போதும். எடுத்துக்காட்டாக பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டருமான செவ்வகம் வரைவது எவ்வாறு ?




இவ்வாறு 5 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டின் இடது, வலது முனைகளில் 3 சென்டிமீட்டர் உயரமுள்ள செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து மேல் முனைகளை சேர்த்து வரைந்தால் செவ்வகம் ஆகுமா ?

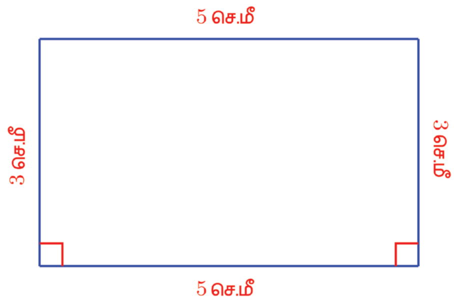
கடைசியாக வரைந்த மேல் பக்கத்தின் நீளமும் 5 சென்டிமீட்டராக இருக்குமா ?

இவ்வாறு சந்தேகத்தைத் தீர்க்கலாம்:

(i) இடது வலது பக்கக் கோடுகள், அடிப்பக்க கோட்டுடன் ஒரே கோணத்தை உருவாக்குவதால் அவை இணையாகும். (ஏழாம் வகுப்பில் **இணைகோடுகள்** என்ற பாடம்).

(ii) இடது, வலது பக்கங்கள் இணையானவையும் அவற்றிற்கு ஒரே நீளமும் ஆனதால் வரைந்த நாற்கரம் இணைகரமாகும். (**சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு பக்கங்கள்** என்ற பகுதி).

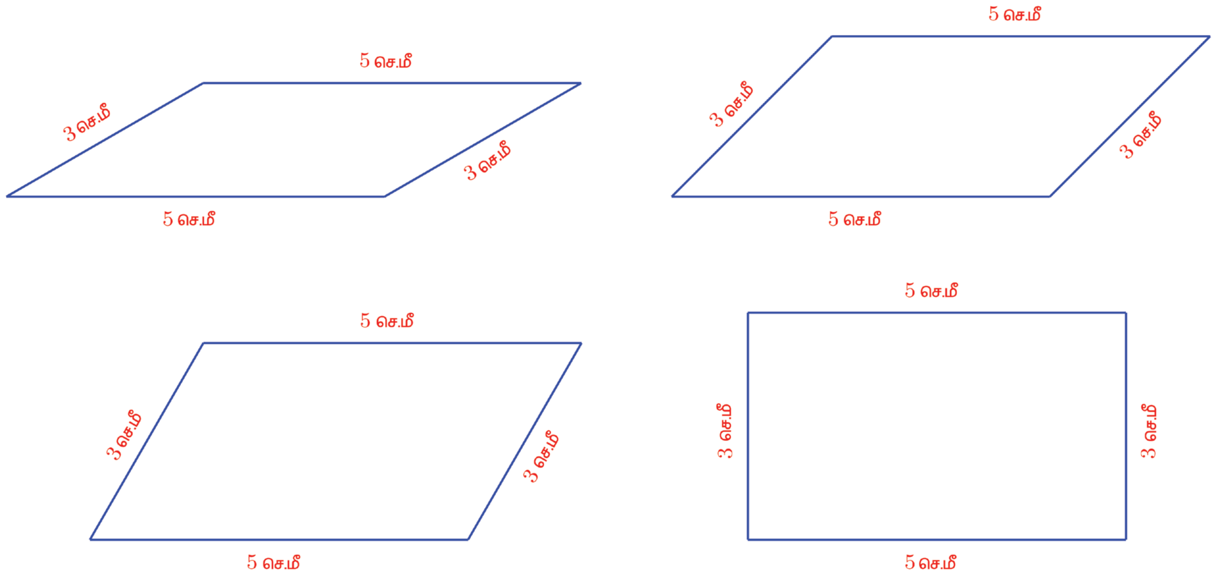
(iii) நாற்கரம் இணைகரமானதால் மேலேயும், கீழேயும் உள்ள பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும். (**சம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் **இரண்டு கோணங்கள்** என்ற பகுதி).




**பக்கங்கள் மாறாமல்**

Segment with given length ஐப் பயன்படுத்தி நீளம் 5 உள்ள AB என்ற ஒரு கோடு வரையவும். அதே டூல் பயன்படுத்தி நீளம் 3 உள்ள BC என்ற ஒரு கோடும் வரையவும். A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையாதவாறு C யின் இடத்தை மாற்றுக. A யை மையமாகக் கொண்டு ஆரம் 3 உள்ள ஒரு வட்டம் வரையவும். A யின் வழியாக BC க்கு இணைகோடு வரைந்து அந்தக் கோடு வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி D யை அடையாளப்படுத்தவும். DC யை இணைத்த பின்பு கோடுகளையும் வட்டங்களையும் மறைத்து வைக்கலாம். Polygon பயன்படுத்தி இணைகரம் ABCD வரையலாம். C யின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 உம் 3 உம் உள்ள வேறுபட்ட இணைகரங்கள் கிடைத்ததல்லவா?

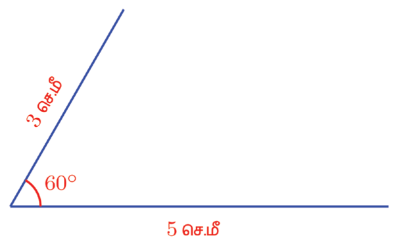
இனி பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள இணைகரம் என்று கூறினால்? பலவகையுண்டு அல்லவா ?




இவற்றிலெல்லாம் என்ன வித்தியாசம் ?

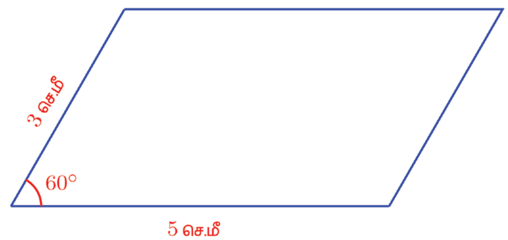
அப்போது பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டரும் என்பது மட்டுமல்லாமல் மேலும் பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 60° என்றும் கூறினால் ?

முதலில் 5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கிடைமட்டமாக ஒரு கோடும் அதன் ஒரு முனையில் 60° சாய்வில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடும் வரையலாம்:



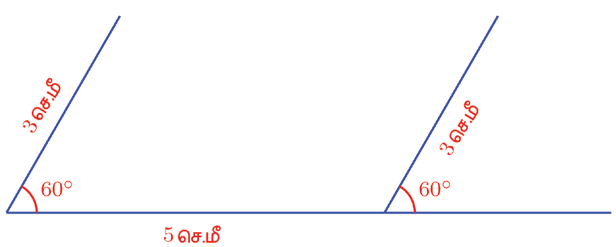

இனி ?

இந்தக் கோட்டின் மேல்முனை வழியாகக் கீழ்க் கோட்டிற்கு இணையாக ஒரு கோடும். கீழ்க்கோட்டின் மற்ற முனைவழியாக இடதுபக்க கோட்டிற்கு இணையாக ஒரு கோடும் வரைந்து சந்திக்கச் செய்யவும். (அளவுகோலும் மட்டமானியும் பயன்படுத்தி இணைகோடு வரைக்கும் முறை, ஆறாம் வகுப்பில் **கோடுகளும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **சந்திக்காத கோடுகள்** என்ற பகுதியில் கற்றிருக்கிறோம்):

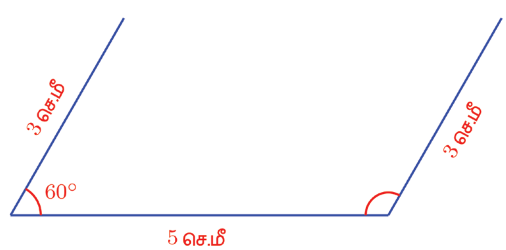



சற்று எளிதாக வரைய ஏதேனும் முறை உள்ளதா ? (ஜியோஜிப்ராவில் வரைய இப்போது கூறியதுதான் எளிய முறை).

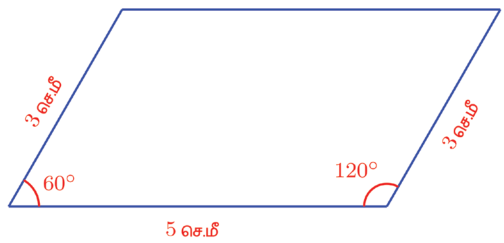
கீழ்ப்பக்க கோட்டைச் சற்று வலது பக்கமாக நீட்டி, வலது முனையில் $60^\circ$ சாய்வில் $3$ சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோடு வரைந்தாலும் போதுமல்லவா.



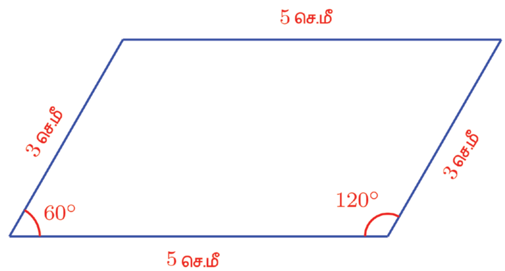

கீழ்க்கோட்டை நீட்டாமல், மறுபக்கத்தில் கோணம் வரைந்தாலும் போதும்:



அதை எத்தனை டிகிரி ஆக வரைய வேண்டும்?

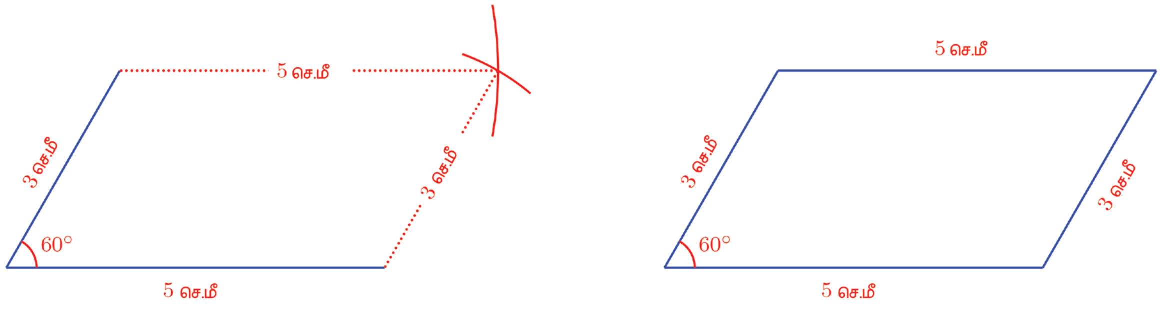



மேல் பக்கத்தின் நீளமும் 5 சென்டிமீட்டராகும் என செவ்வகத்தில் பயன்படுத்திய அதே கூற்றுகளைப் பயன்படுத்தி நிறுவலாமல்லவா.



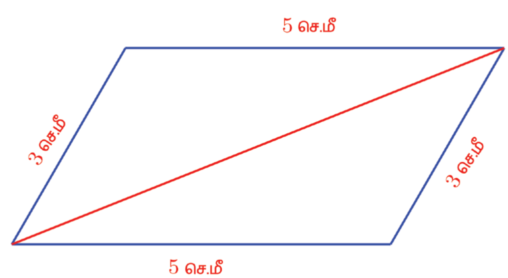

கிடைமட்டமாக 5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடும், அதன் ஒரு முனையில் 60 டிகிரி சாய்வில் 3 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடும் வரைந்த பின்பு வேறொரு முறையில் தொடர்ந்தால் ?

கிடைமட்டமான கோட்டின் மறுமுனையில் இருந்து 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலும் சாய்ந்த கோட்டின் மேல் முனையிலிருந்து 5 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலும் உள்ள புள்ளி அல்லவா இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சி ?

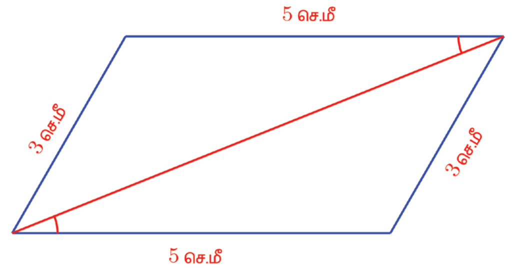



அப்போது ஒரு சந்தேகம் ஏற்படலாம். எதிர் பக்கங்கள் இணையானவையா ?

அதைப் பரிசோதனை செய்ய இவ்வாறு வரைந்த நாற்கரத்தின் ஒரு மூலை விட்டம் வரைந்து அதை இரண்டு முக்கோணங்களாக்கலாம்:



இந்த முக்கோணங்களில் இரண்டு ஜோடி பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும். மூன்றாவது பக்கம் இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோடாகும். அப்போது சமமான பக்கங்களுக்கெதிரேயுள்ள கோணங்களும் சமம் ஆக வேண்டுமல்லவா. அதாவது கீழேயுள்ள படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்கள் சமமாகும்:



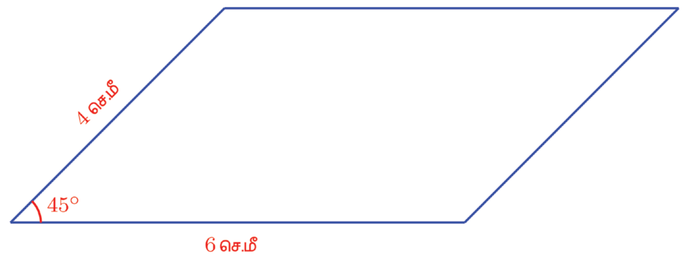

இந்தக் கோணங்கள் மேல்பக்கத்திலும் கீழ்ப்பக்கத்திலும் மூலைவிட்டம் சந்திக்கும்போது உருவாகின்ற இரண்டு சிறிய கோணங்களல்லவா. இவை சமமானதால் இந்தப் பக்கங்கள் இணையாகும். அவற்றிற்கு ஒரே நீளமும் ஆனதால் நாற்கரம் இணைகரமாகும்.

பக்கங்களின் நீளம் வேறு எண்களானாலும் இதே கூற்றுகளைப் பயன்படுத்தி, நாற்கரம் இணைகரமென்று நிறுவலாம் அல்லவா.

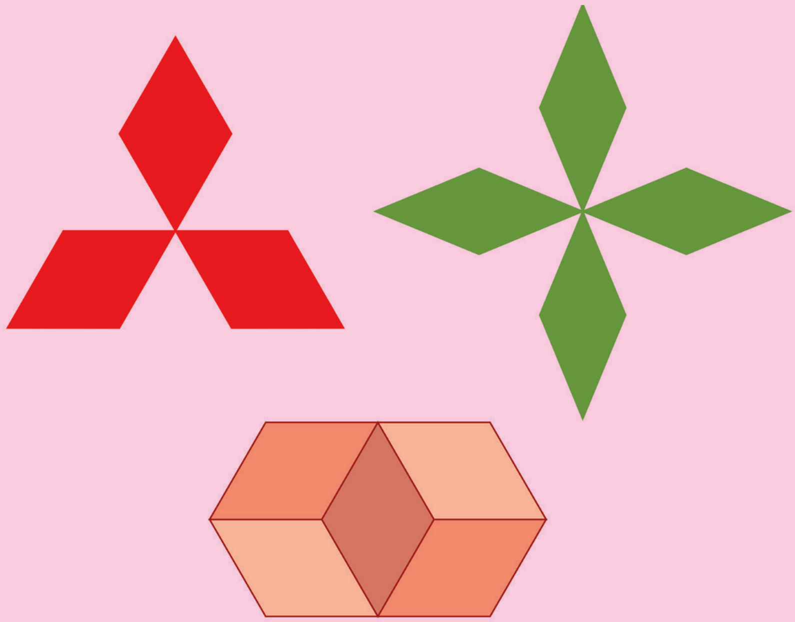
அப்போது எந்த இணைகரத்தினுடையவும் எதிர்பக்கங்கள் சமமென்பதை இவ்வாறு திருப்பியும் கூறலாம்:

**ஒரு நாற்கரத்தின் இரண்டு ஜோடி எதிர் பக்கங்களும் சமமெனில் அது ஒரு இணைகரமாகும்.**

அவ்வாறு ஒரு நாற்கரத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணத்தையும் கூறினால், அந்த இணைகரத்தை பலமுறைகளில் வரையலாம். ஏதேனும் முறையில் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ள இணைகரத்தை வரைந்து பார்க்கவும்:



(1) சமமான சாய்வு சதுரங்கள் மூன்றும், நான்கும், ஐந்தும் சேர்ந்த படங்கள் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் வரைந்து நிறம் கொடுக்கவும்.



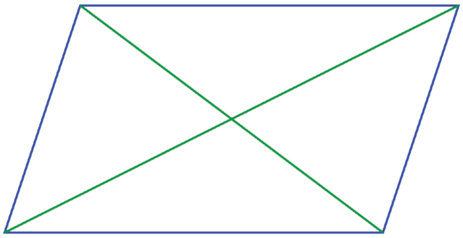
(2) சமமான மூன்று இணைகரங்களும் ஒரு சமபக்க முக்கோணமும் சேர்ந்த இந்தப் படத்தை வரையவும்:

(3) சமமான நான்கு இணைகரங்களும் நான்கு செங்கோண முக்கோணங்களும் சேர்ந்த இந்தப் படத்தை வரையவும்.

இந்தப் படங்களை ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்து நிறம் கொடுக்கவும். எளிதாக வரைய கிரிட் பயன்படுத்தலாம்.

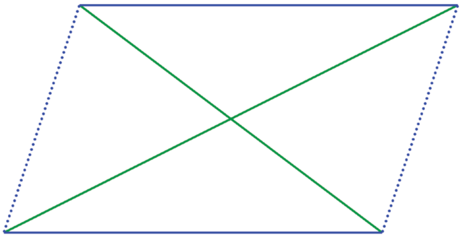
## மூலைவிட்டங்கள்

ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகளென்றும், மாறாக மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகளான ஒரு நாற்கரம் சாய்வு சதுரமென்றும் கண்டோமல்லவா. (**இருசமவெட்டிகள்** என்ற பாடத்தில் **சாய்வு சதுரங்கள்** என்ற பகுதி).

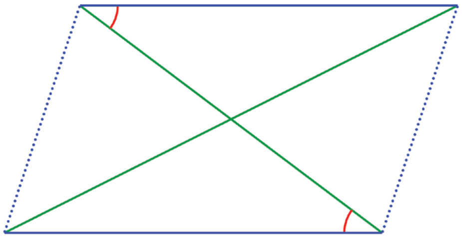


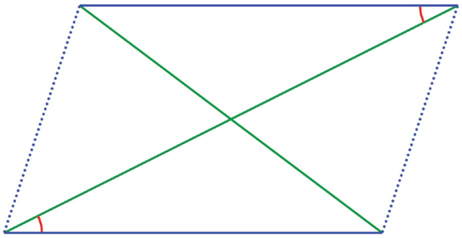
பக்கங்களெல்லாம் ஒரே நீளமல்லாத ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து அல்ல:

ஆனால் அவையும் ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கிறது எனக் காண்பது கடினமல்ல. அதற்கு மூலைவிட்டங்கள் இணைகரத்தை வெட்டி உருவாக்குகின்ற நான்கு முக்கோணங்களில் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள முக்கோணங்களை மட்டும் பார்க்கவும்:



இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் நீல நிறப் பக்கங்கள் இணைகரத்தின் எதிர்பக்கங்களானதால் சமமாகும். இந்தப் பக்கங்கள் இணையானதால், அவற்றின் பச்சைநிறக் கோடுகள் சந்திக்கும் போது உருவாகும் சிறிய கோணங்களும் சமமாகும். அதாவது கீழேயுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்கள் சமம் ஆகும்.



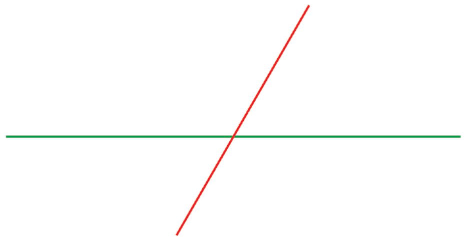


அவ்வாறு இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒரு பக்கமும் அதிலுள்ள இரண்டு கோணங்களும் சமமானதால் அவற்றின் சமமான கோணங்களுக்கெதிரேயுள்ள பக்கங்களும் சமமாகும்.

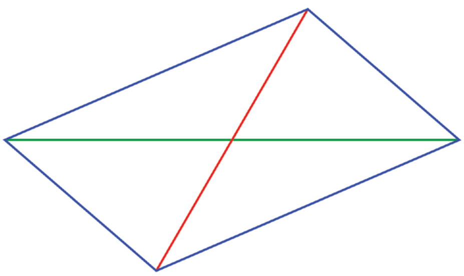
அப்போது மேலேயுள்ள படங்களிலிருந்து இணைகரத்தின் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும் மற்ற மூலை விட்டம் வெட்டும் பாகங்கள் சமமென்று காணலாம். அதாவது அவை ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கிறது.

மாறாக, மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கின்ற ஒரு நாற்கரம் இணைகரம் ஆகுமா ?

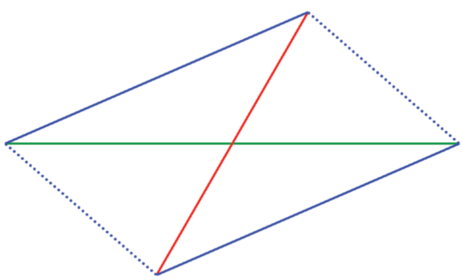
இதைப் பரிசோதனை செய்ய அத்தகைய ஒரு நாற்கரம் வரைந்து பார்க்கலாம். முதலில் ஒரு கோடும் அதன் மையப்புள்ளி வழியாக மற்றொரு கோட்டையும் வரையவும்.



இனி இந்தக் கோட்டின் இருபுறமும் ஒரே நீளம் அடையாளப்படுத்தி ஒரு நாற்கரம் வரையவும்:



இவ்வாறு உருவாகின்ற நான்கு முக்கோணங்களில் இடதுபக்கம் மேலேயும் வலதுபக்கம் கீழேயும் உள்ள முக்கோணங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்;

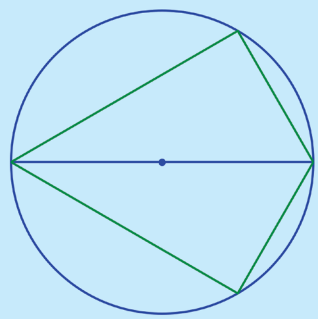


வரைந்ததைப் பொறுத்து முக்கோணங்களின் பச்சை நிறப் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும். சிவப்பு நிறப் பக்கங்களுக்கும் இவை ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்லும் போது உருவாகின்ற எதிர்கோணங்களானதால், இந்தப் பக்கங்களின் இடையிலுள்ள கோணங்களும் சமமாகும் (ஆறாம் வகுப்பில் **கோடுகளும் கோணங்களும்** என்ற பாடத்தில் **வெட்டிச் செல்லும் கோடுகள்** என்ற பகுதி).

Segment உபயோகிச்சு AB என்ற ஒரு கோடு வரைந்து Midpoint or Centre பயன்படுத்தி அதன் மையப்புள்ளி C யை அடையாளப்படுத்தவும். C ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையவும். வட்டத்தில் D என்ற ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தி C, D என்னும் புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற கோடு வரையவும். இந்தக் கோடு வட்டத்தை சந்திக்கும் புள்ளி E அடையாளப்படுத்தவும். கோடும் வட்டமும் மறைத்து வைத்த பின் DE வரையவும். நாற்கரம் ADBE வரையவும். இது ஒரு இணைகரமான பக்கங்களின் நீளத்தை அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கவும். உச்சிகளின் இடத்தை மாறறி பார்க்கவும். AB, CD என்னும் மூலை விட்டங்களின் நீளம் சமமாகும் போது நாற்கரத்திற்கு என்ன நிகழும்?. மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் போது?

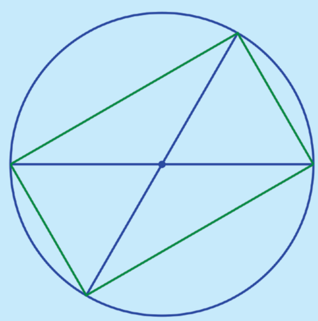
### செவ்வகம் வட்டத்திலும்

ஒரு வட்டமும் அதன் ஒரு விட்டமும் வரையவும். வட்டத்தின் இரு பாகங்களிலும் ஒவ்வொரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தி விட்டத்தின் முனைப் புள்ளிகளுடன் இணைக்கவும்.



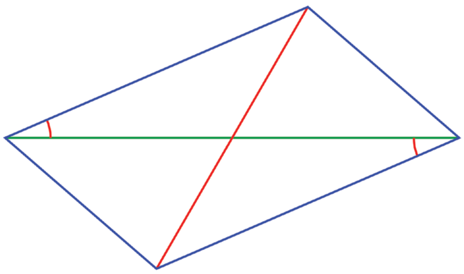
இவ்வாறு கிடைக்கின்ற நாற்கரம் செவ்வகமாக வேண்டுமென்றில்லை. ஆனால் விட்டத்தின் இரண்டு பக்கங்களிலுமுள்ள இரண்டு கோணங்களும் செங்கோணங்களாகும் (ஏன்?). மற்ற இரண்டு கோணங்கள்?

படத்திலுள்ள செங்கோண உச்சிகள் வேறொரு விட்டத்தின் முனைகளில் ஆனால்?



நான்கு உச்சிகளிலும் உள்ள கோணங்கள் செங்கோணங்களாகும். அதாவது நாற்கரம் செவ்வகமானது.

அப்போது இந்த முக்கோணங்களிலுள்ள மூன்றாவது (நீலம்) பக்கங்களும், ஒரே நீளமுள்ள பக்கங்களுக்கெதிரேயுள்ள மற்ற இரண்டு கோணங்களும் சமமாகும்.



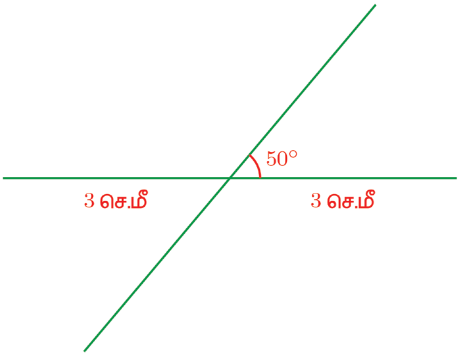
அதாவது, நம்முடைய நாற்கரத்தில் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்கள் சமமாகும்; அவை பச்சை நிறக் கோட்டுடன் உருவாக்குகின்ற கோணங்களும் சமமாகும்.

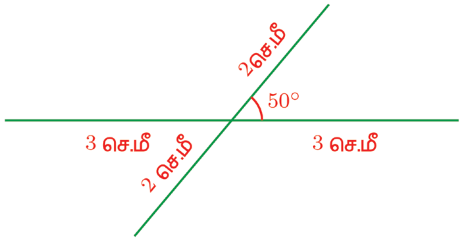
எனவே, நீல நிறக்கோடுகள் இணையாகும். இரண்டு கோடுகள் சமமும் இணையுமானதால் நாற்கரம் இணைகரமாகும்.

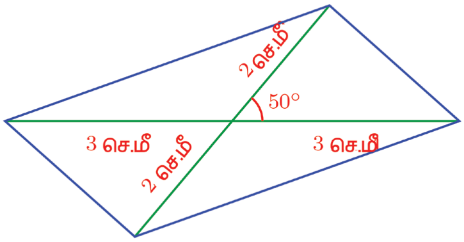
**எந்த இணைகரத்திலும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கிறது. மாறாக மூலைவிட்டங்கள் சமபாகம் செய்கின்ற எந்த நாற்கரமும் இணைகரமாகும்.**

சாய்வு சதுரமெனில், மூலைவிட்டங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணம் செங்கோணமுமாகும், பக்கங்களின் நீளங்கள் சமமல்லாத இணைகரங்களில் இந்தக் கோணம் பல அளவுகளிலாயிருக்கும்:

அப்போது மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தையும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தையும் பொறுத்து இணைகரம் வரையலாம். எடுத்துக்காட்டாக மூலைவிட்டங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டரும் 4 சென்டிமீட்டரும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $50°$ யுமான இணைகரத்தை இவ்வாறு வரையலாம்:

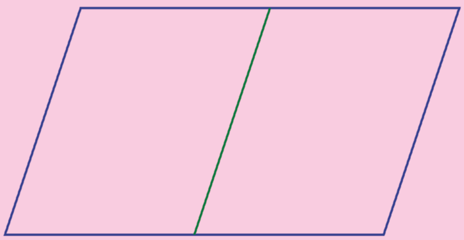


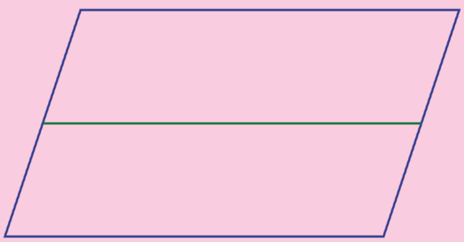



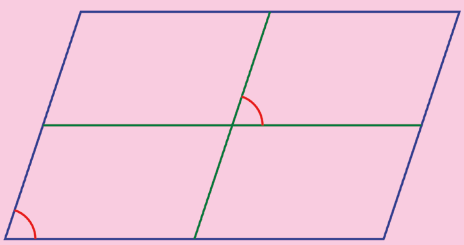
(1) மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் 8 சென்டிமீட்டரும் 6 சென்டிமீட்டரும், அவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணம் $60°$ யும் உள்ள இணைகரம் வரையவும்.

(2) ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து வரையும் கோடு மற்ற இரண்டு பக்கங்களுக்கு இணையாகும் என நிறுவுக:





(3) படத்தில் ஒரு இணைகரமும், அதன் எதிர்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்தக் கோடுகளே காண்பிக்கப் பட்டுள்ளன.

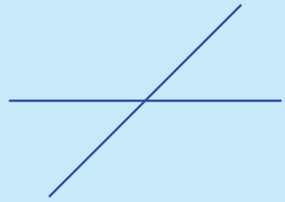


(i) இந்தக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்கிறது என நிறுவுக.

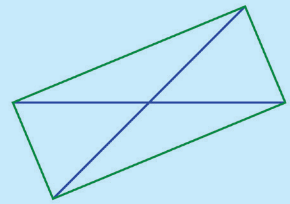
(ii) இந்தக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள ஒரு கோணம், இணைகரத்தின் பக்கங்களுக் கிடையிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமமென நிறுவுக.

## மூலைவிட்டத்தின் சிறப்பு

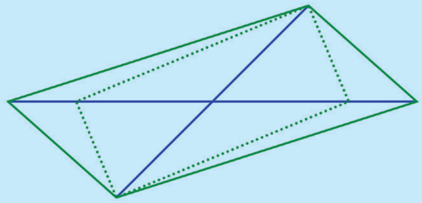
ஒரே நீளமுள்ள இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இரு சமவெட்டிகளாகும். ஆனால் செங்குத்துக்கோடு ஆகாமல் வரையவும்.



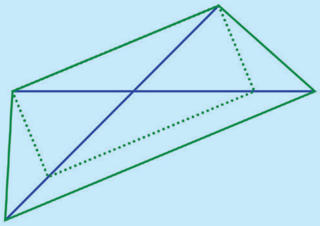
இவற்றின் முனைகளை இணைத்தால் எந்த வகை நாற்கரம் கிடைக்கும்?



இனி ஒரு கோட்டின் நீளத்தை இருபக்கமும் ஒன்றுபோல் நீட்டி, முனைகளை இணைத்தால்?



இனி, முதல் படத்தில் ஒரு கோட்டை இருபக்கமும் ஒரேபோல் நீட்டுவதற்குப் பதிலாக கிடைமட்டமான கோட்டை வலது பக்கமும் சாய்ந்த கோட்டை கீழ் நோக்கியும் ஒரேபோல் நீட்டி முனைகளை இணைத்தால்?



(4) மூலைவிட்டங்களின் நீளம் 6.5 சென்டிமீட்டரும் 4.5 சென்டிமீட்டரும், அவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் $70°$ யுமான இணைகரம் வரையவும்.

(5) ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களுக்கு ஒரே நீளமெனில், அது ஒரு செவ்வகமென நிறுவுக.

(6) மூலைவிட்டங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டரும் அவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணம் $60°$ உம் ஆன செவ்வகம் வரையவும்.

## பரப்பளவு

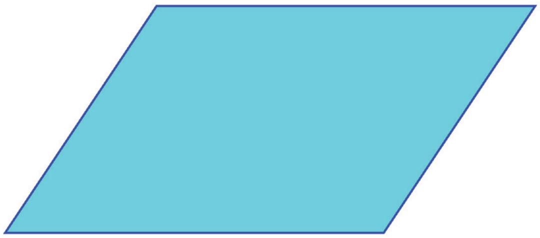
ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு பக்கங்களின் நீளங்களின் பெருக்கற்பலனாகும்.

இணைகரமானால் ?

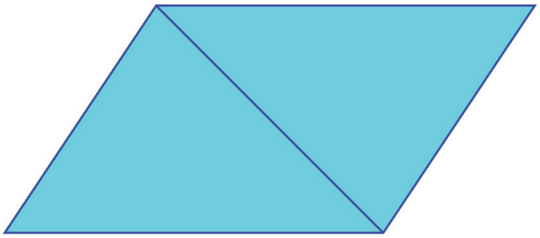
பக்கங்களின் நீளங்கள் ஒரே போலுள்ள பல இணைகரங்கள் வரையலாமென்று பாடத்தின் ஆரம்பத்தில் பார்த்தோமல்லவா. இவற்றிற்கெல்லாம் ஒரே பரப்பளவு ஆக வேண்டுமென்பதில்லை.

இணைகரத்தின் எந்த அளவுகள் பரப்பளவை தீர்மானிக்கிறது ?

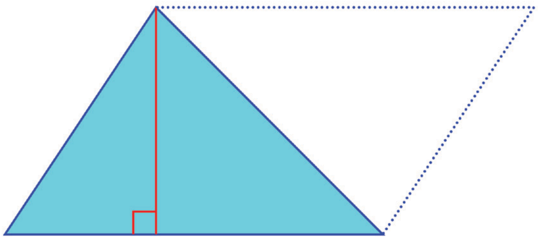
இந்த இணைகரத்தைப் பார்க்கவும்:



பரப்பளவு கணக்கீடு செய்ய, முதலில் ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்து இதை இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்:



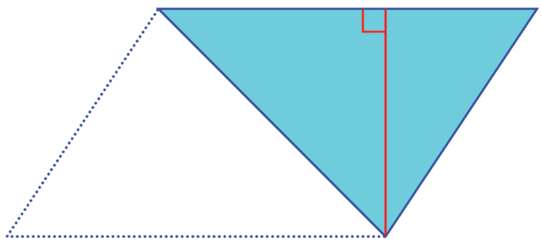
இடது முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட எந்தெந்த அளவுகள் தேவை ?



முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தினுடையவும், அதிலிருந்து மேல் உச்சிக்குள்ள உயரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதியல்லவா பரப்பளவு.

முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம், இணைகரத்தின் அடிப்பக்கமே ஆகும். முக்கோணத்தின் மேல் உச்சிக்குள்ள உயரம் ?

அது இணைகரத்தின் கீழேயும் மேலேயுமுள்ள இணையான பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரமல்லலவா? இனி வலது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ?

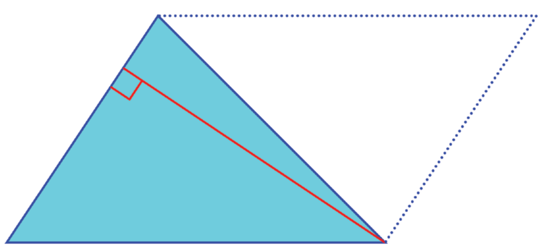


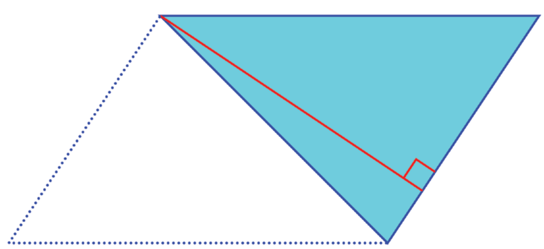
இணைகரத்தின் மேல் பக்கத்தினுடையவும் கீழேயும் மேலேயுமுள்ள பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதி.

அப்போது இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே பரப்பளவாகும். இணைகரத்தின் பரப்பளவு, இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகையல்லவா. அதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் இரண்டு மடங்கு. அது எவ்வளவு ?

இணைகரத்தின் கீழ் (அல்லது மேல்) பக்கத்தினுடையவும் கீழேயும் மேலேயுமுள்ள பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற் பலனாகும்.

முக்கோணங்களின் பரப்பளவு கணக்கிட, மேலேயும், கீழேயுமுள்ள பக்கங்களுக்குப் பதிலாக, இடது, வலது பக்கங்களைப் பயன்படுத்தினால் ?





ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடையவும் பரப்பளவை எவ்வாறு கூறலாம் ?

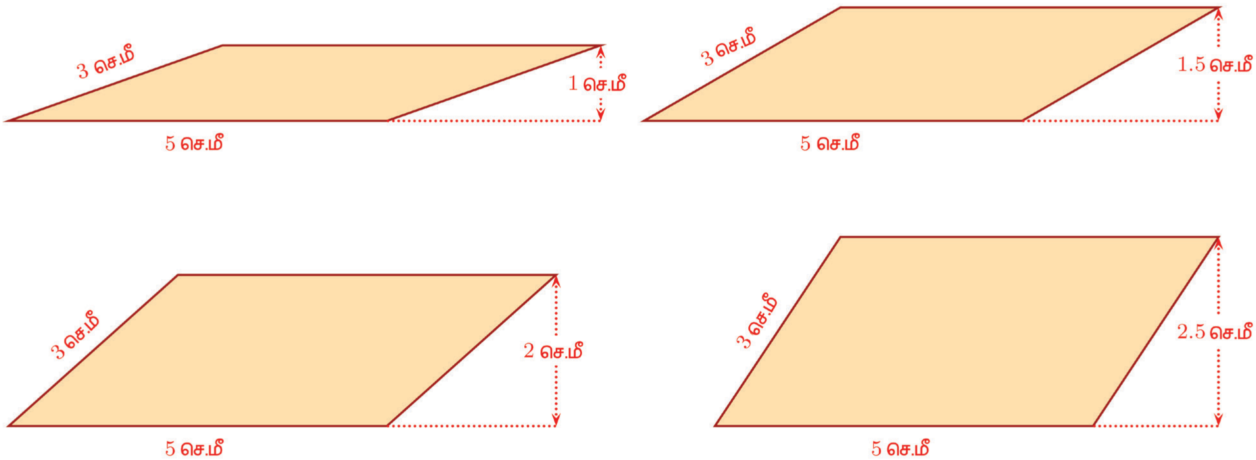
இணைகரத்தின் பரப்பளவு ?

இடது (அல்லது வலது) பக்கத்தின் நீளத்தினுடையவும், இடது– வலது பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலன், அல்லவா ?

அப்போது பொதுவாக ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைப் பற்றி என்ன கூறலாம் ?

**இணைகரத்தின் பரப்பளவு ஏதேனும் பக்கத்தினுடையவும் எதிர் பக்கத்திற்குள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனாகும்.**

இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:




நான்கு இணைகரங்களிலும் பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். ஒவ்வொன்றினுடையவும் பரப்பளவைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

பரப்பளவை இன்னும் அதிகரிக்கலாமா ? எவ்வளவு வரை அதிகரிக்கலாம் ?

இதே அளவுகளில் மிகவும் அதிகப் பரப்பளவு கிடைக்கின்ற இணைகரத்திற்கு ஏதேனும் சிறப்பியல்பு உள்ளதா ?

இனி ஒரு வினா பக்கங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டரும், 4 சென்டிமீட்டரும், பரப்பளவு 18 சதுரசென்டிமீட்டருமான ஓர் இணைகரம் வரைவது எவ்வாறு ?

முதலில் 6 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரைந்தால், அதை இணைகரத்தின் கீழ்ப்பக்கமாக எடுக்கலாம்:

இணைகரத்தின் கீழேயுள்ள இரண்டு உச்சிகள் இந்தக் கோட்டின் முனைகள் அல்லவா.

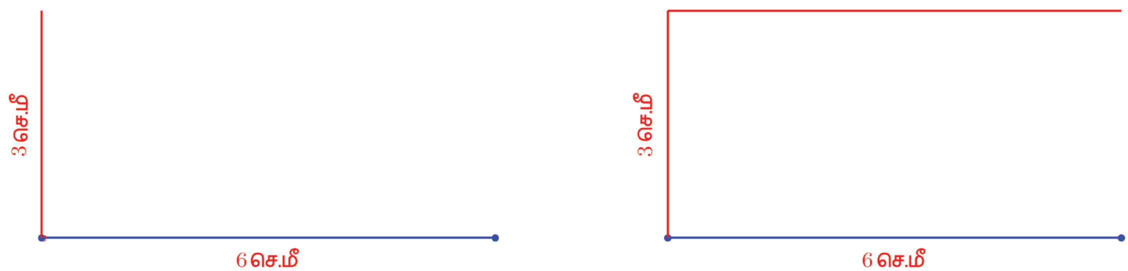
மேல் பக்க உச்சிகள் ?

மேல் பக்கத்தைப் பற்றி என்ன கூறலாம் ?

பக்கங்கள் மாறாமல் என்ற ஜியோஜிப்ரா செயல்பாட்டில் செய்தது போல பக்கங்கள் 5 உம் 3 உம் உள்ள இணைகரம் ABCD வரையவும். Area வைப் பயன்படுத்தி இதன் பரப்பளவைக் காணவும். C யின் இடத்தை மாற்றி பார்க்கவும். பரப்பளவு மாறுகிறதா? பரப்பளவு மிக அதிகரிப்பது எப்போது? மிகவும் குறைவது?

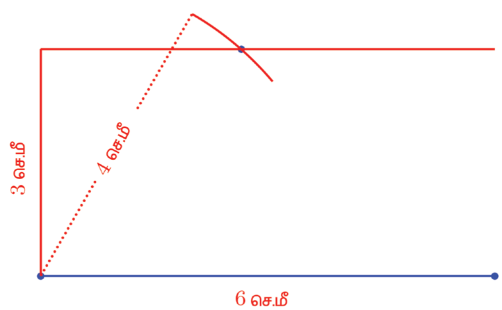
பரப்பளவு 18 சதுரசென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டும். அப்போது மேல்பக்கம், அடிப்பக்கத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்க வேண்டும் ?

அதாவது, கோட்டின் ஒரு முனையிலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் உயரத்தில் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து, அதன் மேல்முனை வழியாக முதல் கோட்டிற்கு இணையானகோடு வரைந்தால் அதன் ஒரு பாகமே மேல்பக்கம்:

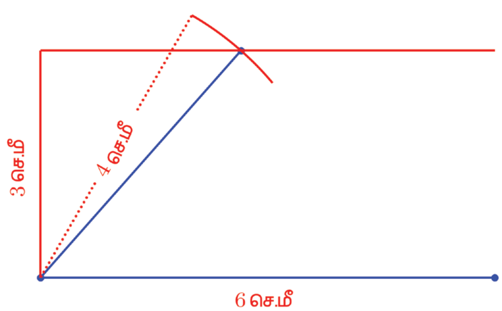


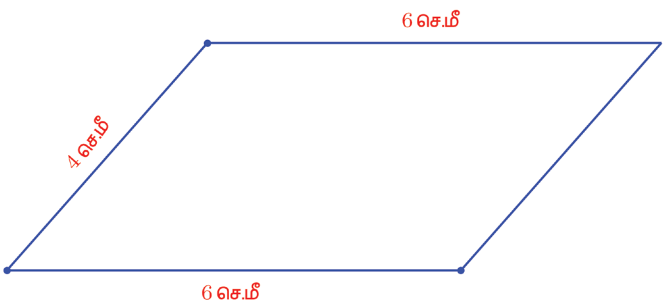

இணைகரத்தின் இடது மேல் உச்சி இந்தக் கோட்டின் ஏதேனும் ஓர் இடத்தில் அமையும். இடது பக்கத்தின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டுமல்லவா. அப்போது கீழ் இடது உச்சியிலிருந்து 4 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் தான் மேல்பக்க இடது உச்சி. அது மேலேயுள்ள கோட்டிலும் இருக்க வேண்டும்.

அதை எவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாம் ?



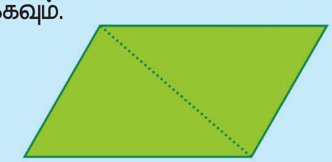

இனி இணைகரத்தை முழுமையாக்கலாம்.



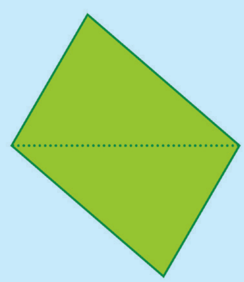



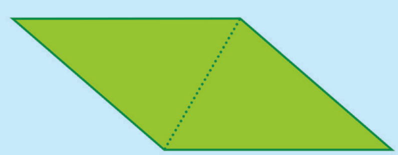

### பரப்பளவு மாறாமல்

கீழே தரப்பட்டுள்ள இணைகரத்தை பார்க்கவும்.



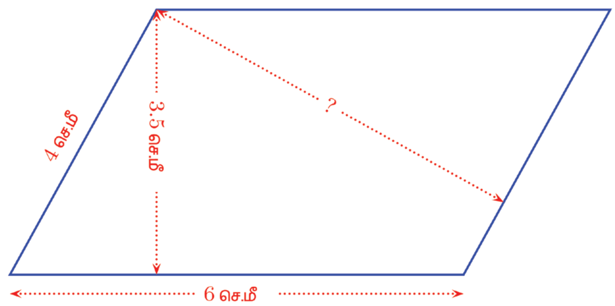
மூலைவிட்டம் வழியாக வெட்டி மாற்றி இணையான பக்கங்களை சேர்த்து வைத்து புதிய இணைகரங்கள் உருவாக்கலாம்.





இந்த இணைகரங்களின் பக்கங்களும் மூலைவிட்டமும் முதல் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்துடனும் பக்கங்களுடனும் எவ்வாறு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன? மற்ற மூலைவிட்டம் வழியாக மாற்றி வைத்தால்?

வேறொரு கணக்கு. இந்த இணைகரத்தைப் பார்க்கவும்:

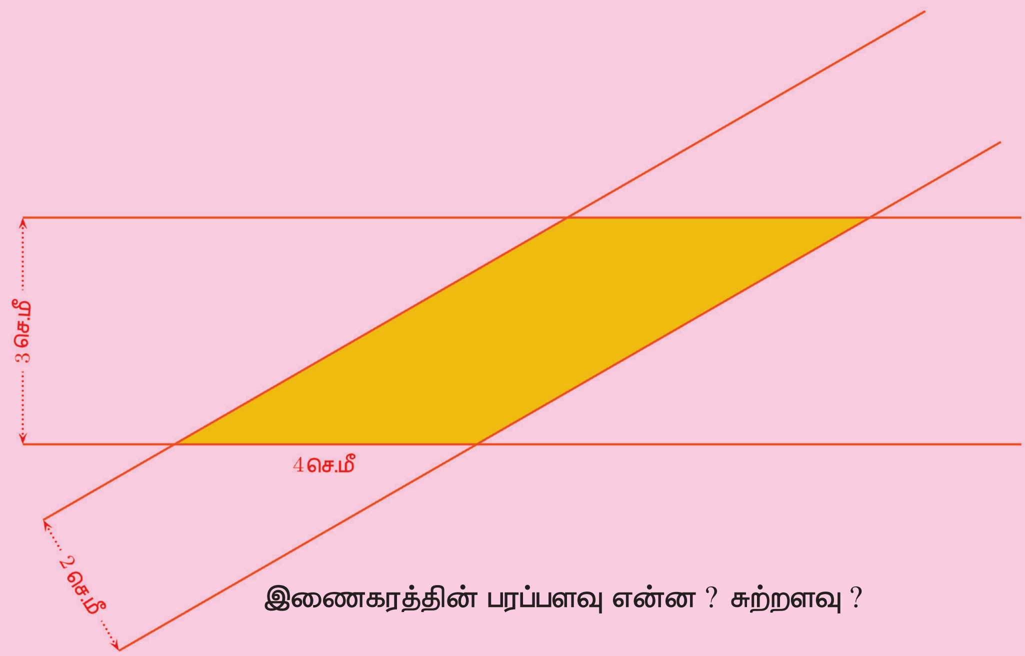



இதன் இடது, வலது பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் என்ன ?
அடிப்பக்கம் 6 சென்டிமீட்டரும் மேல்பக்கத்திற்கு உள்ள தூரம் 3.5 சென்டிமீட்டரும் ஆனதால் இணைகரத்தின் பரப்பளவு, $6 \times 3.5 = 21$ சதுர சென்டிமீட்டர்.
இடது பக்கம் 4 சென்டிமீட்டர் ஆனதால் வலது பக்கத்திற்கு உள்ள தூரத்தை 4 ஆல் பெருக்கினாலும் பரப்பளவான 21 கிடைக்க வேண்டும்;
அப்போது வலது பக்கத்திற்கு உள்ள தூரம் $21 \div 4 = 5.25$ சென்டிமீட்டர்.

(1) பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டரும் 6 சென்டிமீட்டரும் பரப்பளவு 25 சதுரசென்டிமீட்டருமான இணைகரம் வரையவும்.

(2) பரப்பளவு 25 சதுரசென்டிமீட்டரும் சுற்றளவு 24 சென்டிமீட்டருமான ஓர் இணைகரம் வரையவும்.

(3) இரண்டு ஜோடி இணைகோடுகள் வெட்டிக் கடந்துசெல்லும்போது உருவாகும் இணைகரம் படத்தில் காணப்படுகிறது.




இணைகரத்தின் பரப்பளவு என்ன ? சுற்றளவு ?

(4) ஓர் இணைகரத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் 12 சென்டிமீட்டரும் 10 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். சிறிய பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 6 சென்டிமீட்டருமாகும்.

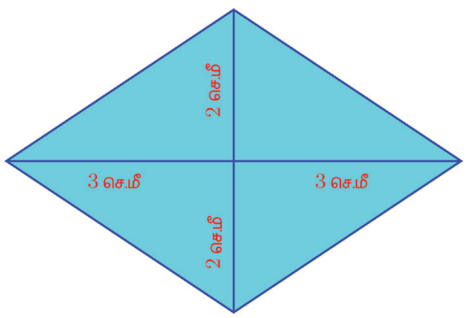
(i) இணைகரத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

(ii) 12 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் எவ்வளவு ?

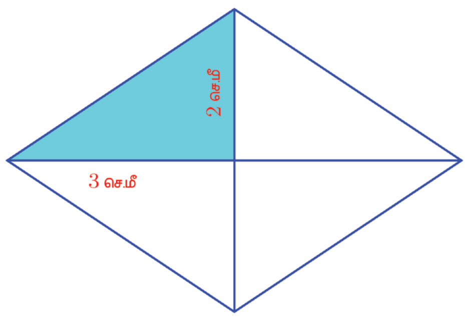
## சாய்வு சதுரம்

ஒரு சாய்வு சதுரம் வரைய அதன் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் தெரிந்தால் போதுமல்லவா. (**இரு சமவெட்டிகள்** என்ற பாடத்தில் **சாய்வு சதுரங்கள்** என்ற பகுதி). அவ்வாறு வரைகின்ற சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவு கணக்கிடுவது எவ்வாறு ?

எடுத்துக்காட்டாக மூலைவிட்டங்கள் 6 சென்டிமீட்டரும், 4 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சாய்வு சதுரத்தைப் பார்ப்போம்:




இது சமமான நான்கு செங்கோண முக்கோணங்கள் சேர்ந்ததல்லவா. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு ?




$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$ சதுரசென்டிமீட்டர்

நான்கு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே பரப்பளவு அல்லவா? அப்போது இணைகரத்தின் பரப்பளவு

$$4 \times 3 = 12$$ சதுரசென்டிமீட்டர்

இது போல எந்த சாய்வு சதுரத்தினுடையவும் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா.

(i) சாய்வு சதுரம் நான்கு சமமான செங்கோண முக்கோணங்கள் சேர்ந்ததல்லவா.

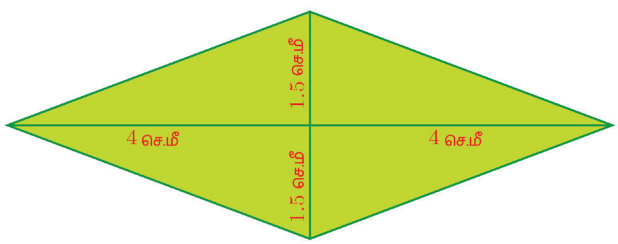
(ii) ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணத்தினுடையவும் செங்கோணப் பக்கங்கள், மூலைவிட்டங்களின் பாதியாகும்.

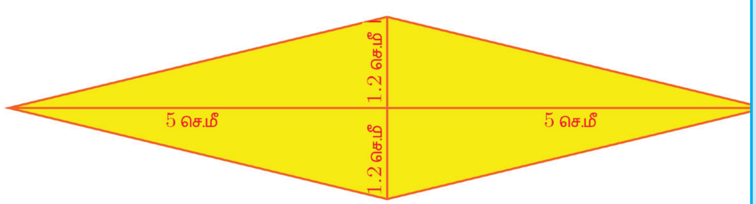
(iii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, மூலை விட்டங்களின் பாதிகளின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும், அதாவது மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற் பலனின் எட்டிலொன்று ஆகும்.

(iv) நான்கு முக்கோணங்களினுடைய மொத்தப் பரப்பளவு, மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற்பலனின் பாதி

**எந்தச் சாய்வு சதுரத்தினுடையவும் பரப்பளவு, மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.**

அப்போது 12 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சாய்வு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களை வேறு நீளங்களாகவும் வரையலாமல்லவா.



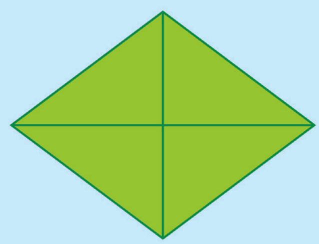

மூலை விட்டங்கள் இரண்டும் சமமான சாய்வு சதுரமல்லவா சதுரம். அப்போது மூலை விட்டங்களின் பெருக்கற் பலன் என்பது சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கமாகும்.

அப்போது சதுரத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு கூறலாம்?

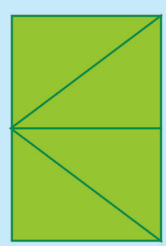
**எந்தச் சதுரத்தினுடையவும் பரப்பளவு, மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கத்தின் பாதியாகும்.**

### சாய்வு சதுரமும் சதுரமும்

ஒரு சாய்வு சதுரம் வரைந்து அதன் இரண்டு மூலை விட்டங்களும் வரையவும்.



இனி மூலைவிட்டங்கள் வழியாக வெட்டி நான்கு முக்கோணங்களாக்கவும் இவற்றை ஒரு செவ்வகமாக்கி மாற்றி எடுக்கலாம்.



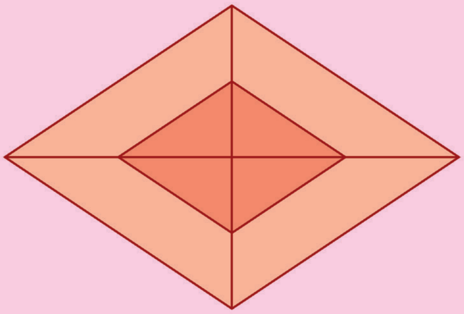
இந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவு அல்லவா. செவ்வகத்தின் பக்கங்களுக்கும் சாய்வு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன?

அப்போது சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்கும், மூலைவிட்டங்களின் நீளத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன?

(1) $4\frac{1}{2}$ சதுர செண்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரையவும்.

(2) 9 சதுர செண்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் அல்லாத சாய்வு சதுரம் வரையவும்.

(3) படத்தில் சாய்வு சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் பாதிகளின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து சிறிய ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



(i) இந்த நாற்கரமும் சாய்வு சதுரமா? ஏன் ?

(ii) சிறிய நாற்கரத்தின் பரப்பளவு 3 சதுர செண்டிமீட்டராகும், பெரிய சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு ?

(4) ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 10 செண்டிமீட்டரும் ஒரு மூலை விட்டத்தின் நீளம் 16 செண்டிமீட்டர் ஆகும்.

(i) இரண்டாவது மூலைவிட்டத்தின் நீளம் என்ன ?

(ii) சாய்வு சதுரத்தின் பரப்பளவு என்ன ?

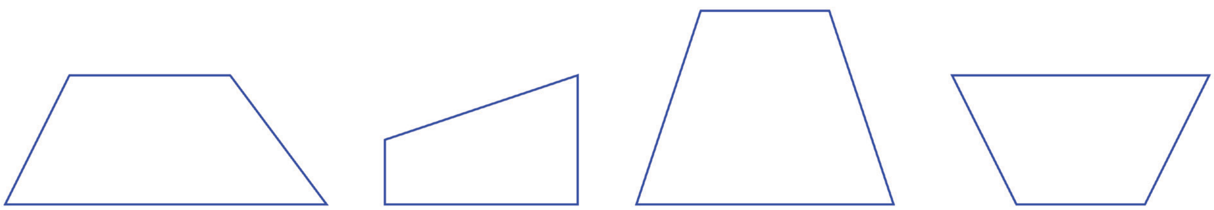
(iii) எதிர்பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் எவ்வளவு ?

# 12

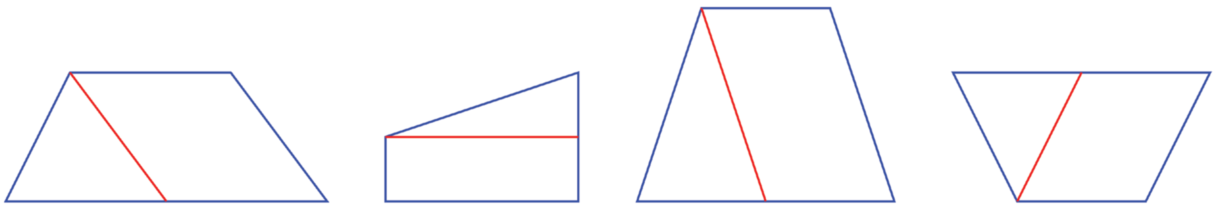
# சரிவகங்கள்

## பக்கங்களும் கோணங்களும்

இரண்டு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையான நாற்கரங்களல்லவா இணைகரங்கள். ஒரு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் மட்டும் இணையான ஒரு நாற்கரத்திற்குச் சரிவகம் (Trapezium) என்று பெயர்:

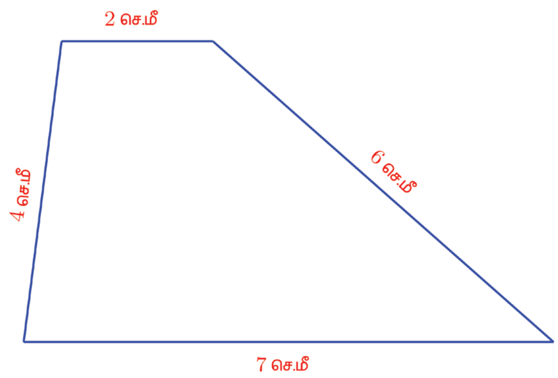


இணையல்லாத பக்கங்களில் ஒன்றிற்கு இணையாக ஒரு கோடு உள்ளே வரைந்து, எந்தச் சரிவகத்தையும் ஒரு இணைகரமும் ஒரு முக்கோணமுமாகப் பிரிக்கலாம்:



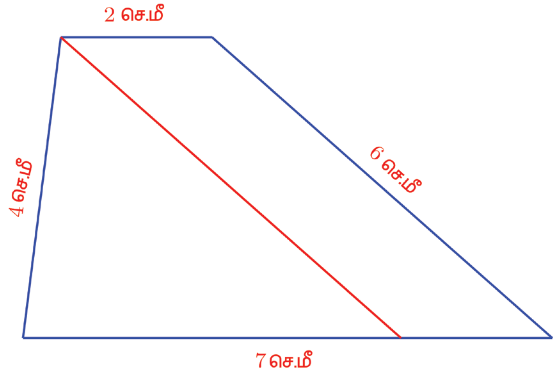
மாறாக, ஒரு இணைகரத்தையும், அதற்குப் பொருத்தமான முக்கோணத்தையும் சேர்த்து வைத்து சரிவகம் உருவாக்கவும் செய்யலாம்.

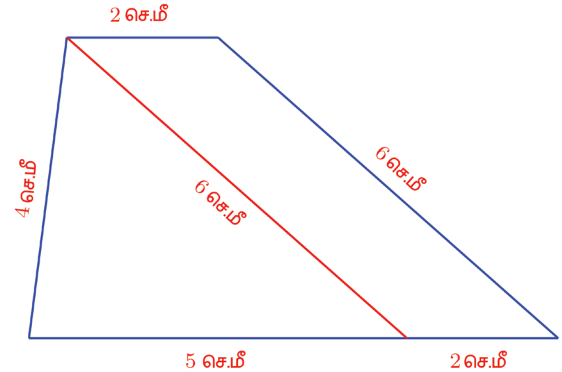
எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்களின் நீளம் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளதைப் போல உள்ள சரிவகத்தை எவ்வாறு வரையலாம் ?



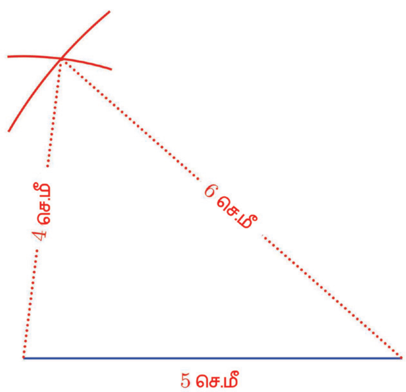
வலது பக்கத்திற்கு இணையான கோடு வரைந்து, இதனை முக்கோணமும் இணைகரமும் ஆக வெட்டினால் ?

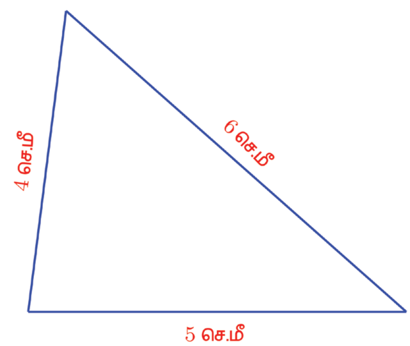
முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு ?



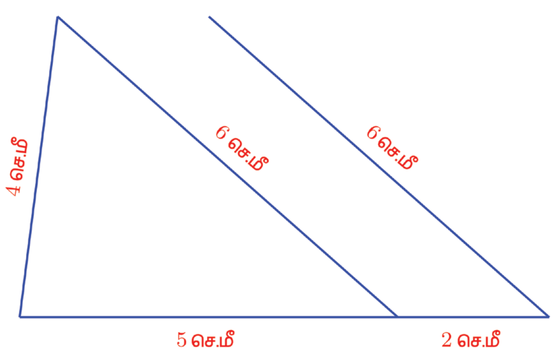



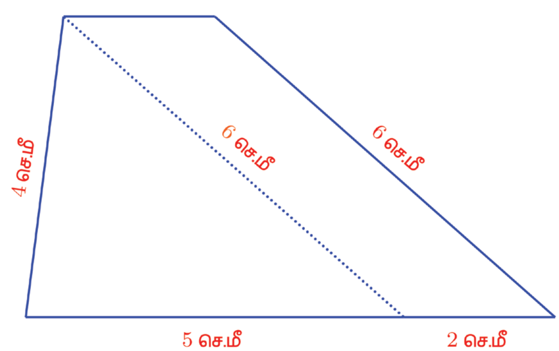

அப்போது இந்தச் சரிவகம் வரைவதற்கு, முதலில் இதிலுள்ள முக்கோணத்தை வரையலாம்.




இனி கீழே உள்ள பக்கத்தை 2 சென்டிமீட்டர் நீட்டி, அதன் முனைகளின் வழியாக வலது பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்து, அதில் 6 சென்டிமீட்டர் அடையாளப்படுத்தவும்; அதன் மேல் முனையையும், முக்கோணத்தின் மேல் முனையையும் இணைத்தால் சரிவகம் ஆகும்.

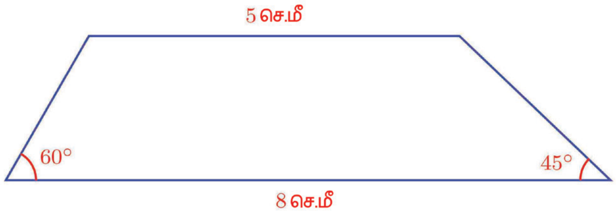


நாற்கரத்தின் மேல் பக்கம் கீழ்ப்பக்கத்திற்கு இணையாகவும், அதன் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும் ஆக இருக்குமா? எதனால் ?

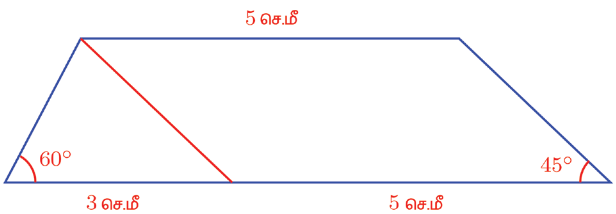
இனி நான்கு பக்கங்களின் நீளத்திற்குப் பதிலாக, இணையான பக்கங்களின் நீளமும், மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் அவற்றில் ஒன்றுடன் உருவாக்குகின்ற கோணங்களையும் தீர்மானித்து சரிவகம் வரைய இயலுமா ?

எடுத்துக்காட்டாக இந்தச் சரிவகத்தைப் பார்க்கவும்:



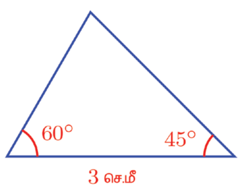
பக்கங்களும் கோணங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இந்தப் படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்து பார்க்கவும்.
Angle with Given Size, Line, Intersect, Parallel line, Polygon முதலான நூல்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

முன்பு செய்தது போல முக்கோணமாகவும், இணைகரமாகவும் பிரிக்கலாம்:

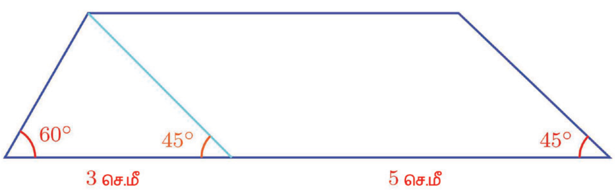



முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கமும் அதில் ஒரு கோணமும் தெரியும் ; முக்கோணம் வரைவதற்கு அதே பக்கத்தின் அடுத்த கோணமும் தெரியவேண்டுமல்லவா. அது எவ்வளவு ?

அப்போது முக்கோணத்தை இவ்வாறு வரையலாம்:

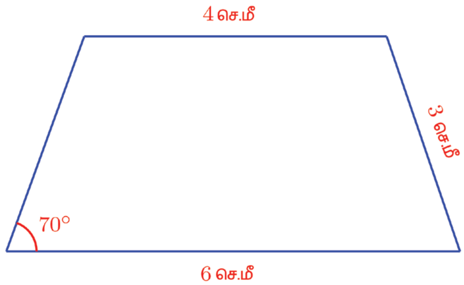



இனி கீழே உள்ள கோட்டை 5 சென்டிமீட்டர் வலதுபக்கம் நீட்டி, முனையில் 45° சாய்வில் ஒரு கோடும், முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியின் வழியாகக் கீழே உள்ள கோட்டிற்கு இணையான கோடும் வரைந்து இணைத்தால் சரிவகம் ஆகும்.

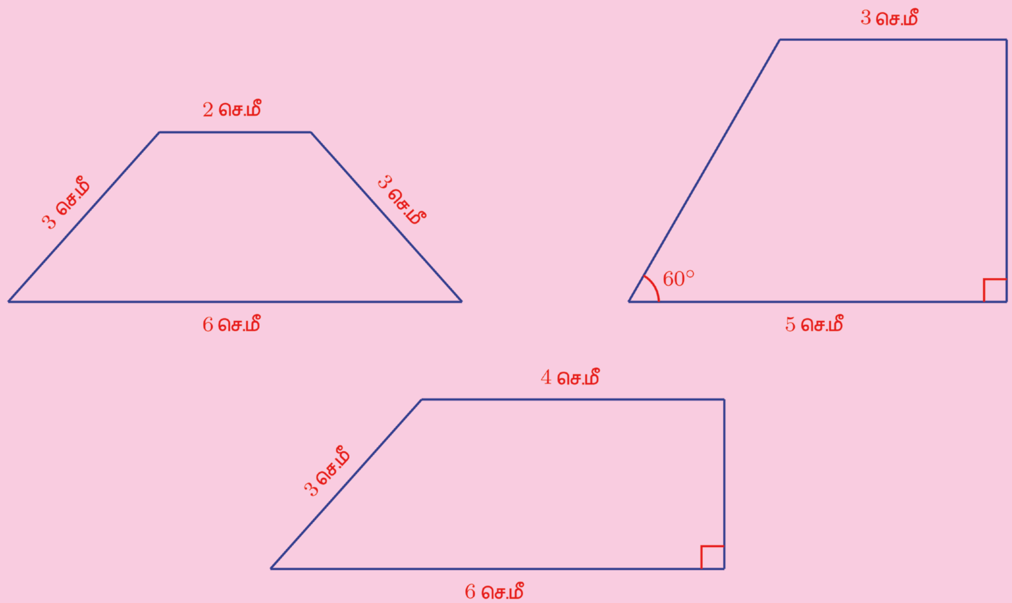


மேல் பக்கத்தின் நீளமும் 5 சென்டிமீட்டர் ஆவதற்குக் காரணம் என்ன ?

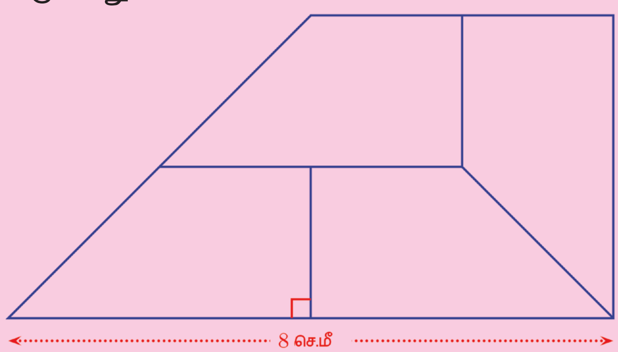
இனி கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ள சரிவகத்தை வரையலாமா ?




(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சரிவகங்களை வரையவும்.



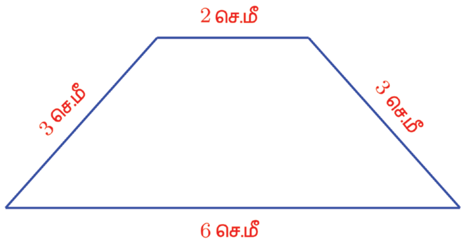

(2) சமமான நான்கு சரிவகங்களைச் சேர்த்து வைத்துள்ள படம் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.




இந்தப் படத்தை வரையவும்.

## இருசமபக்க சரிவகங்கள்

முன்பு வரைந்த ஒரு சரிவகத்தைப் பார்க்கவும்:




இதன் சிறப்புத் தன்மை என்ன ?

இணையல்லாத பக்கங்கள் ஒரே நீளமுள்ள சரிவகங்களை இருசமபக்க சரிவகம் (Isosceles trapezium) எனக் கூறலாம்.

எந்தச் சரிவகத்தையும் ஒரு முக்கோணமும் ஒரு இணைகரமுமாகப் பிரிக்கலாம் எனப் பார்த்தோமல்லவா. இருசமபக்க சரிவகத்தை வேறொரு முறையில் பிரிக்கலாம்:

ஒரு செவ்வகமும் இரண்டு முக்கோணங்களும். இந்த முக்கோணங்களைக் குறித்து என்ன கூறலாம் ?

- இரண்டும் செங்கோண முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- கர்ணங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும் (எதனால் ?)
- செங்குத்தானப் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும் (எதனால் ?)

அப்போது பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, (கிடைமட்டமான) மூன்றாவது பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமாக வேண்டுமல்லவா.

மூன்று பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளமானதால், முக்கோணங்களின் கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

முதல் படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்களைப் பார்க்கவும்:

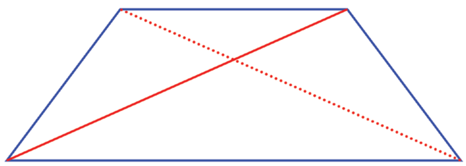
முன்பு பார்த்த முக்கோணங்களின் கோணங்கள் ஆனதால் இவை சமம் ஆகும்.

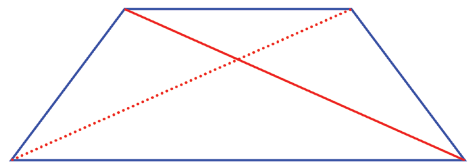
அப்போது இரண்டாவது படத்தின் கோணங்களும் சமமல்லவா (அது எவ்வாறு ?).

பொதுவாக ஒரு சரிவகத்தின் இணையான பக்கங்களை அடிப்பக்கங்கள் எனக் கூறலாம். அப்போது இந்தக் கோணங்களைச் சரிவகத்தின் அடிப்பக்கக்கோணங்கள் எனக் கூறலாம்.

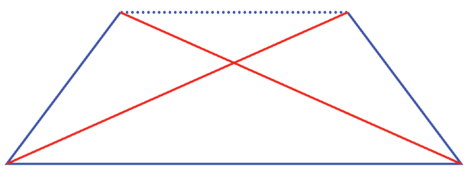
**எந்த இருசமபக்க சரிவகத்த்தினுடையவும் அடிப்பக்கக் கோணங்கள் சமமாகும்**

வேறொரு கருத்தைப் பார்க்கலாம். இந்த இருசமபக்க சரிவகத்தின் ஒவ்வொரு மூலை விட்டமும், அதனை இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்குமல்லவா.

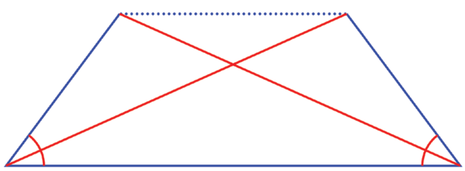




இவ்வாறு கிடைக்கின்ற முக்கோணங்களில் இடது பக்கமும் வலதுபக்கமும் உள்ள முக்கோணங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்:



இரண்டினுடையவும் கீழே உள்ள பக்கம், சரிவகத்தின் கீழே உள்ள பக்கமே ஆகும். மற்ற இரண்டு (நீலம்) பக்கங்கள் சரிவக்தின் இணையல்லாத பக்கங்கள் ஆனதால் சமமாகும். கீழே உள்ள பக்கத்திற்கும் இந்தப் பக்கத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணங்கள், இருசமபக்க சரிவகத்தின் அடிப்பக்கக்கோணங்களானதால் சமம் ஆகும்.



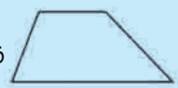
இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றின் இடையில் உள்ள கோணமும் சமமானதால் முக்கோணங்களின் மூன்றாவது (சிவப்பு) பக்கங்களும் சமமாகும்.

இந்தப் பக்கங்கள் சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அல்லவா. அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

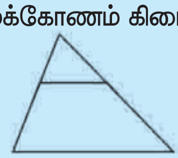
**எந்த இருசமபக்கச் சரிவகத்திலும் மூலைவிட்டங்கள் சமம் ஆகும்.**

### சரிவகமும் முக்கோணமும்

ஒரு சரிவகம் வரையவும்.

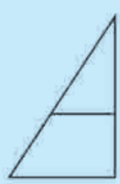


இதன் இணையல்லாத எதிர்ப்பக்கங்களை நீட்டினால் சந்திக்குமல்லவா. அப்போது முக்கோணம் கிடைக்கும்.



இனி ஒரு முக்கோணம் வரையலாம்.

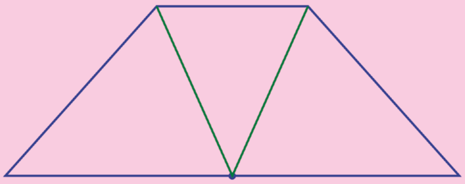
இதில் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக முக்கோணத்தின் உள்ளே ஒரு கோடு வரையவும். மேலே உள்ள இரண்டு கோடுகளையும் அழித்துவிடவும். ஒரு சரிவகம் கிடைத்ததல்லவா?



இருசமபக்க சரிவகத்திலிருந்து தொடங்கினால், கிடைப்பது எந்த வகையான முக்கோணம்?

மாறாக, இருசமபக்க முக்கோணத்தை இவ்வாறு வெட்டினால் கிடைக்கும் சரிவகத்தின் சிறப்புத் தன்மைகள் என்ன?

(1) படத்தில் ஒரு இருசமபக்க சரிவகத்தின் ஒரு அடிப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியும், மற்ற அடிப்பக்கத்தின் முனைகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

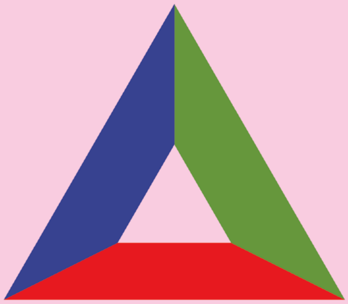


இந்தக் கோடுகளுக்கெல்லாம் ஒரே நீளம் என நிரூபிக்கவும்.

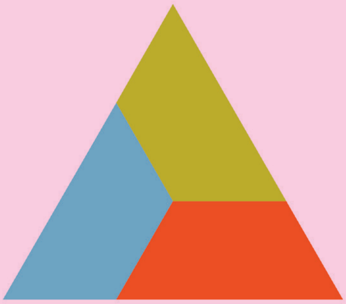
(2) ஒரு இருசமபக்க சரிவகத்தின் அடிப்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோடு, இரண்டு அடிப்பக்கங்களுக்கும் செங்குத்து என நிரூபிக்கவும்.

(3) கீழே உள்ள படங்களை வரையவும்.

(i) சமமான மூன்று இருசமபக்க சரிவகங்கள்

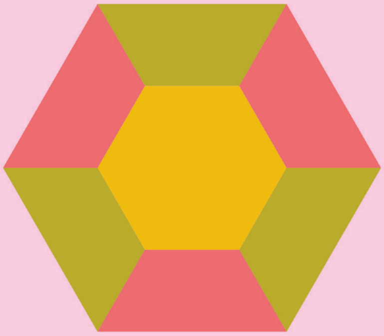


(ii) சமமான வேறு மூன்று இருசமபக்க சரிவகங்கள்



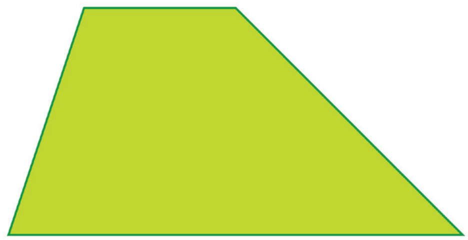
இந்தப் படங்களை ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்து நிறம் அளிக்கவும். குறிப்பிட்ட அளவுகளில் ஒரு இருசமபக்க சரிவகம் வரைந்த பின் Reflect about Line பயன்படுத்திச் சரிவகத்திலும், சரிவகத்தின் ஒரு பக்கத்திலும் கிளிக் செய்தால் அதனுடன் சேர்ந்து நிற்கின்ற ஒரு சரிவகம் எளிதில் வரையலாம்.

(iii) சமமான ஆறு இருசமபக்க சரிவகங்கள்

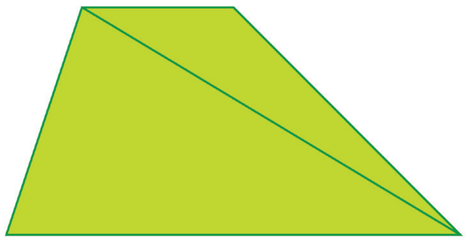


## பரப்பளவு

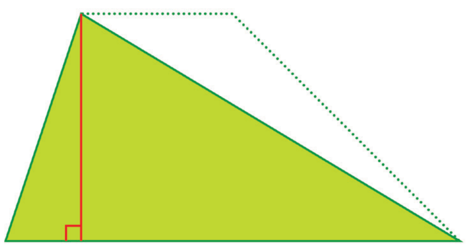
கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட எந்தெந்த அளவுகள் வேண்டும்?



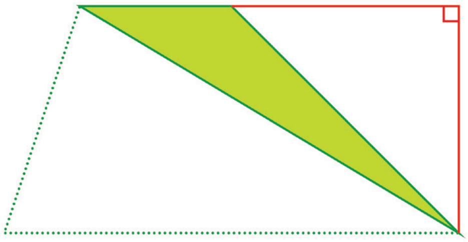
இணைகரத்தில் செய்ததுபோல, இதனையும் ஒரு மூலைவிட்டம் வரைந்து, இரண்டு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம்:



பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட எந்தெந்த அளவுகள் வேண்டும் ?

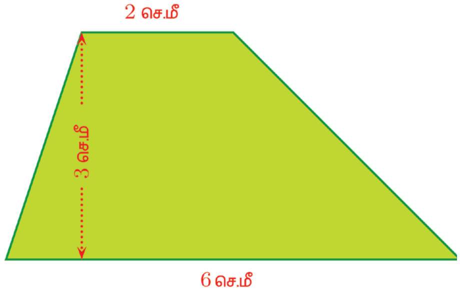


அதன் பரப்பளவு கீழே உள்ள பக்கத்தின் நீளத்தினுடையவும், அதிலிருந்து மேல் முனைக்குள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதி; அதாவது, சரிவகத்தின் அடிப்பக்கத்தினுடையவும், கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதி.



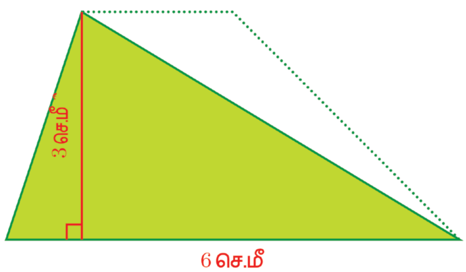
இனி சிறிய முக்கோணத்தை எடுத்தால் ?

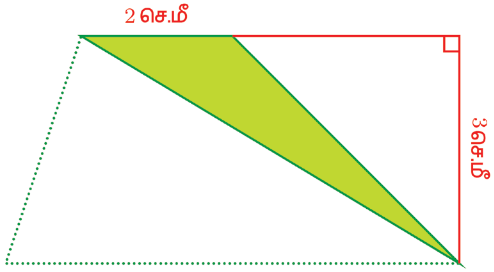
மேலே உள்ள பக்கத்தினுடையவும் கீழே உள்ள முனையிலிருந்து இந்தப் பக்கத்தை நீட்டியதின் உயரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதியே பரப்பளவு. அதாவது, சரிவகத்தின் மேல்பக்கத்தினுடையவும், மேல் மற்றும் கீழ்ப்பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதி.




அப்போது இந்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்களின் நீளமும், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரமும் தெரிந்தால் போதுமல்லவா?

மூலைவிட்டம் வரைந்தால் கிடைக்கின்ற முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் எவ்வளவாகும்?




- இடதுபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ சதுரசென்டிமீட்டர்
- வலதுபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ சதுரசென்டிமீட்டர்
- சரிவகத்தின் பரப்பளவு $9 + 3 = 12$ சதுரசென்டிமீட்டர்

சரிவகத்தின் பரப்பளவு கணக்கிடுவதை, இவ்வாறும் எழுதலாமல்லவா:

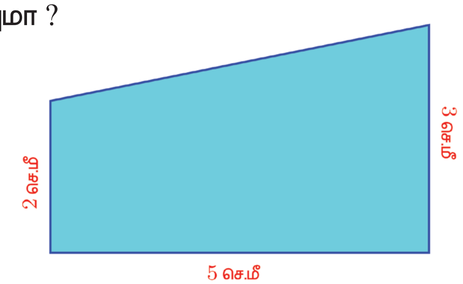
$$\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3\right) = \frac{1}{2} \times (6 + 2) \times 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$$

$$= 12 \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

அதாவது, சரிவகத்தின் இணையான பக்கங்களின் நீளங்களான 6 ஐயும், 2 ஐயும் கூட்டி இணையான பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள தூரமான 3 ஆல் பெருக்கி, பாதியைக் கணக்கிட்டோம்.

அப்போது இந்தச் சரிவகத்தின் பரப்பளவை எவ்வளவு எனக் கூற முடியுமா ?



Polygon ஐப் பயன்படுத்தி பல்வேறு சரிவகங்களை வரையவும். (Grid பயன்படுத்தி எளிதில் வரையலாம்) பரப்பளவு, ஒவ்வொன்றினுடையவும், இணையான பக்கங்களின் நீளம், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் என்பவற்றை அடையாளப்படுத்தவும். இவை எவ்வாறு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது என்று பார்க்கவும்.

இதில் இணையான பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் 5 சென்டிமீட்டரும்.

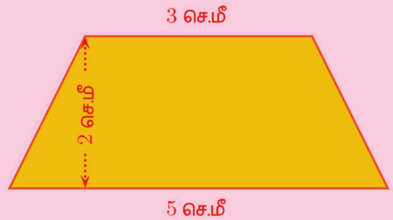
அப்போது பரப்பளவு

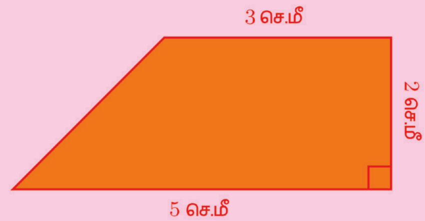
$$\frac{1}{2} \times (2 + 3) \times 5 = 12.5 \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

பொதுவாக என்ன கூறலாம் ?

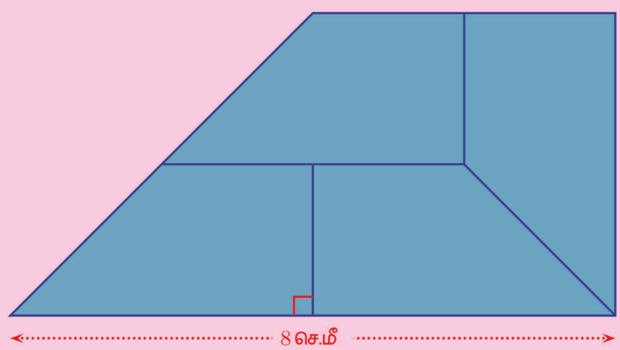
**சரிவகத்தின் பரப்பளவு, இணையான பக்கங்களின் தொகையினுடையவும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.**

(1) கீழே வரையப்பட்டுள்ள சரிவகங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

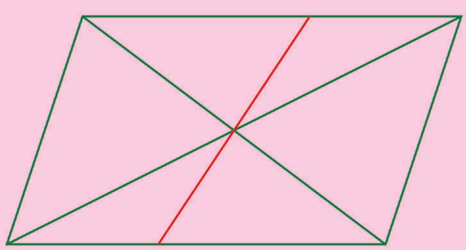


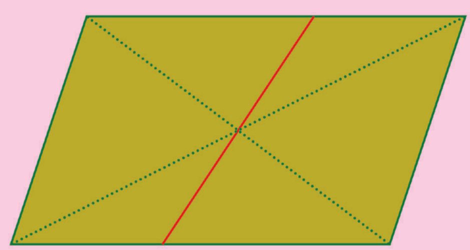




(2) சமமான நான்கு சரிவகங்களைச் சேர்த்து உருவாக்கிய பெரிய சரிவகமே கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது. பெரிய சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.




(3) படத்தில் ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளியின் வழியாக ஒரு கோடு வரையப்பட்டுள்ளது:





இந்தக் கோடு இணைகரத்தை ஒரே பரப்பளவுள்ள இரண்டு சரிவகங்களாகப் பிரிக்கிறது என நிரூபிக்கவும்.

# 13

# புள்ளியியல்

## அட்டவணைப்படுத்துதல்

பள்ளிக்கூடத்தில் 8A வகுப்பில் 40 குழந்தைகள் உள்ளனர். சுகாதார மன்றத்தின் சார்பில் ஒவ்வொருவரின் இரத்தப் பிரிவினை உறுதிப்படுத்தியது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| O+ | B+ | O+ | AB+ | AB– | B– |
| O+ | AB– | AB+ | AB+ | B– | AB+ |
| A+ | O+ | O+ | O+ | O+ | A+ |
| O– | A+ | A+ | O+ | O+ | O+ |
| B+ | B+ | A+ | A+ | B+ | O+ |
| AB+ | A+ | B+ | B+ | O+ | A+ |
| B– | O+ | O+ | B+ | | |

i) O– இரத்தப் பிரிவில் உள்ள குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

ii) B– இரத்தப் பிரிவில் உள்ள குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iii) O+ இரத்தப் பிரிவில் உள்ள குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iv) எந்த இரத்தப் பிரிவில் உள்ளவர்கள் மிகவும் கூடுதல்?

v) எந்த இரத்தப் பிரிவில் உள்ளவர்கள் மிகவும் குறைவு?

முதல் வினாவிற்கு விடை கண்டுபிடிக்க O– இரத்தப் பிரிவை மட்டும் எண்ணினால் போதும். இரண்டாவது வினாவிற்கு B– உம் மூன்றாவது வினாவிற்கு O+ உம் எண்ணினால் போதும்.

நான்காவது வினாவிற்கு?

எல்லாவற்றையும் தனித்தனியாக எண்ண வேண்டும் அல்லவா?

இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை பேர் இருக்கிறார்கள் என முதலிலேயே கணக்கிட்டு வைத்தால் வசதி ஆகும்.

| இரத்தப் பிரிவு | எண்ணிக்கை |
|---|---|
| A+ | 8 |
| B+ | 7 |
| AB+ | 5 |
| O+ | 14 |
| B– | 3 |
| AB– | 2 |
| O– | 1 |

இந்த அட்டவணையைப் பார்த்து கடைசி இரண்டு வினாக்களுக்கு விடைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வேறொரு கணக்கு.

ஒரு வகுப்பிலுள்ள குழந்தைகளுக்குத் தேர்வில் கிடைத்த மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 6 | 3 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 |
| 7 | 9 | 7 | 6 | 8 | 7 | 2 | 6 | 7 |
| 10 | 6 | 7 | 3 | 9 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 5 | 8 | 10 | 8 | 8 | 9 | 7 |
| 7 | 6 | 8 | 8 | 7 | 4 | 5 | 9 | 8 |

i) அதிகக் குழந்தைகளுக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண் எது?

ii) 8 உம் 8 ஐவிடக் கூடுதல் மதிப்பெண்ணும் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iii) 8 ஐவிடக் குறைவான மதிப்பெண் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iv) 10 மதிப்பெண் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

முன்பு உருவாக்கியது போன்று ஓர் அட்டவணையை இங்கேயும் உருவாக்கலாம். ஒவ்வொரு மதிப்பெண்ணும் எத்தனை முறை மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது என்பதல்லவா காண வேண்டியது.

இங்கு மிகக் குறைந்த மதிப்பெண் 2 உம் மிகக் கூடிய மதிப்பெண் 10 உம் ஆகும்.

2 முதல் 10 வரை உள்ள எண்களை ஒரு நிரலில் எழுதி ஒவ்வொன்றும் எத்தனை முறை மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது எனப் பார்க்கவும். ஐந்தாம் வகுப்பில் படித்த குறியீடுமுறையையே பயன்படுத்தலாம்.

| மதிப்பெண் | குறியீடு | குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|---|
| 2 | \| | 1 |
| 3 | \|\| | 2 |
| 4 | 卌 | 5 |
| 5 | \|\|\|\| | 4 |
| 6 | 卌 \| | 6 |
| 7 | 卌 卌 \| | 11 |
| 8 | 卌 卌 | 10 |
| 9 | \|\|\|\| | 4 |
| 10 | \|\| | 2 |
| மொத்தம் | | 45 |

இனி அட்டவணையைப் பார்த்து முன்பு கேட்ட எண்ணிக்கைகளை எல்லாம் கண்டுபிடிப்பது எளிது அல்லவா ?

அட்டவணையில், 2 ஒரு முறை, 3 இரண்டு முறை, 7 பதினொன்று முறை என்றிவ்வாறு ஒவ்வொரு மதிப்பெண்ணும் எத்தனை முறை என்றல்லவா காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு அட்டவணையில் ஒவ்வொன்றும் எத்தனை முறை மீண்டும் மீண்டும் வருகின்றது என்பதனைப் பொதுவாக நிகழ்வெண் (frequency) என்று கூறுவர்.

இவ்வாறான அட்டவணையை நிகழ்வெண் அட்டவணை (frequency table) என்றும் கூறுவர்.

1) ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 50 குடும்பங்களின் அங்கத்தினர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 9 | 4 | 4 | 2 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 7 | 3 | 3 | 2 | 3 | 7 | 6 | 3 | 2 | 5 |
| 5 | 13 | 9 | 9 | 7 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 7 | 2 | 3 | 3 | 10 | 8 | 6 | 6 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 4 | 3 | 8 | 7 | 5 | 6 | 3 |

நிகழ்வெண் அட்டவணையைத் தயார்செய்து கீழே உள்ள வினாக்களுக்கு விடைகள் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) இரு அங்கத்தினர்கள் மட்டும் உள்ள குடும்பங்கள் எத்தனை?

ii) நான்கும் அதைவிடக் குறைவாகவும் அங்கத்தினர்கள் உள்ள குடும்பங்கள் எத்தனை?

iii) பத்தும் அதைவிடக் கூடுதலாகவும் அங்கத்தினர்கள் உள்ள குடும்பங்கள் எத்தனை?

iv) எத்தனை அங்கத்தினர்கள் உள்ள குடும்பங்கள் மிகவும் கூடுதல்?

2) 8 B வகுப்பில் 44 குழந்தைகள் உள்ளனர். ஒவ்வொரு குழந்தையும் எத்தனை கிலோமீட்டர் தூரத்திலிருந்து வருகிறார்கள் எனக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 7 | 12 | 1 | 9 | 2 | 6 |
| 5 | 7 | 3 | 4 | 1 | 5 | 4 | 4 |
| 5 | 8 | 6 | 5 | 2 | 5 | 9 | 5 |
| 11 | 12 | 1 | 9 | 2 | 14 | 4 | 7 |
| 9 | 6 | 6 | 7 | 3 | 2 | 6 | 3 |
| 4 | 7 | 9 | 3 | | | | |

நிகழ்வெண் அட்டவணையைத் தயார் செய்து கீழே உள்ள வினாக்களுக்கு விடை எழுதவும்.

i) சரியாக ஒரு கிலோமீட்டர் தூரத்திலிருந்து வரும் குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

ii) 5 கிலோமீட்டருக்கு அதிகமான தூரத்திலிருந்து வரும் குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iii) 5 கிலோமீட்டருக்கும் 10 கிலோமீட்டருக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்திலிருந்து வரும் குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

iv) 10 கிலோமீட்டருக்கு அதிகமான தூரத்திலிருந்து வரும் குழந்தைகள் எத்தனை பேர்?

3) ஒரு வகுப்பில் நடத்திய வகுப்புத் தேர்வில் 35 குழந்தைகளுக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 10 | 18 | 11 | 19 | 16 | 15 | 17 | 14 | 18 | 13 | 15 |
| 17 | 16 | 15 | 14 | 15 | 17 | 14 | 15 | 13 | 16 | 11 | 11 |
| 16 | 20 | 13 | 12 | 10 | 16 | 17 | 13 | 12 | 14 | 12 | |

நிகழ்வெண் அட்டவணையைத் தயார் செய்து கீழே உள்ள வினாக்களுக்கு விடைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) 20 மதிப்பெண்கள் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை?

ii) 10 க்கும் 15 க்கும் இடையில் மதிப்பெண்கள் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை?

iii) 10 க்குக் குறைவான மதிப்பெண்கள் கிடைத்த குழந்தைகள் எத்தனை?

iv) மிக அதிக குழந்தைகளுக்கு கிடைத்த மதிப்பெண் எது?

## வேறொரு வடிவம்

ஒரு மட்டைப் பந்து விளையாட்டு வீரர் 50 ஒரு நாள் போட்டிகளில் அடித்த ரன்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 0 | 49 | 60 | 100 | 68 | 27 | 48 | 15 | 65 | 101 | 45 | 2 |
| 52 | 25 | 18 | 29 | 53 | 72 | 90 | 32 | 81 | 28 | 104 | 35 | 49 |
| 2 | 60 | 87 | 71 | 38 | 102 | 35 | 71 | 68 | 20 | 10 | 30 | 55 |
| 47 | 21 | 35 | 12 | 20 | 11 | 27 | 43 | 38 | 40 | 48 | | |

i) அவர் எடுத்த சதங்கள் எத்தனை ?

ii) அவர் எடுத்த அரை சதங்கள் எத்தனை ?

iii) 50-க்குக் குறைவான ரன்கள் பெற்ற எத்தனை போட்டிகள் உள்ளன?

இங்கு விளையாட்டு வீரர் எடுத்த மிகக் குறைந்த ரன் பூஜ்யமும், மிகக் கூடிய ரன் 104 உம் அல்லவா.

இதுவரை செய்தது போன்று அட்டவணையைத் தயார் செய்ய 0 முதல் 104 வரை உள்ள எண்களை முதல் நிரலில் எழுத வேண்டும். ஆனால் அனைத்து எண்களும் இங்கே தேவையில்லை. இவ்வாறு உள்ள அட்டவணையிலிருந்து விளையாட்டு வீரரின் திறமையைக் குறித்துள்ள பொதுக் கருத்தினை உருவாக்கவும் இயலாது.

வேறொரு முறையில் அட்டவணையைத் தயார் செய்வோம்.

ஒரு நிரலில் ரன்களை ஒவ்வொன்றாக எழுதுவதற்குப் பதில், சதம் (100உம், 100ஐ விடக் கூடுதலும்), அரைசதம் (50 - 99), அரை சதத்தை விடக் குறைவு (50-க்குக் குறைவு) என்பவற்றை ஒவ்வொரு பிரிவுகளாக எழுதி அட்டவணையைத் தயார் செய்யலாம்.

| பிரிவு | குறியீடு | போட்டிகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|---|
| 0 - 49 |卌 卌 卌 卌 卌 卌 \| | 31 |
| 50 - 99 | 卌 卌 卌 | 15 |
| 100 உம் அதற்குக் கூடுதலும் | \|\|\|\| | 4 |
| மொத்தம் | | 50 |

இந்த அட்டவணையைப் பார்த்து முன்பு கேட்ட வினாக்களுக்கு எளிதில் விடை கூறலாம் அல்லவா? விளையாட்டு வீரரின் திறமையை மேலும் பகுப்பாய்வு செய்ய வேண்டுமெனில்?

- 10 க்குக் குறைவாக ரன்கள் எடுத்த போட்டிகள் எத்தனை?
- 90 க்கும் 100 க்கும் இடையே ரன்கள் எடுத்த போட்டிகள் எத்தனை?
- 40 க்கும் 50 க்கும் இடையே ரன்கள் எடுத்த போட்டிகள் எத்தனை?

என்றிவ்வாறு பல வழிகளில் கணக்கிடும் போது வசதிக்கேற்ப பிரிவுகளாக ஆக்கி அட்டவணையைத் தயார் செய்ய வேண்டும்.

0 முதல் 9 வரை, 10 முதல் 19 வரை, 20 முதல் 29 வரை என்றிவ்வாறு பிரிவுகள் ஆக்கி ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை வீதம் வருகிறது எனக் கணக்கிடலாம்.

**அட்டவணைகள்**

விவர சேகரிப்பிலிருந்து சரியான கருத் தாக்கங்களை உருவாக்க, அவற்றை ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும். இவ்வாறு ஒழுங்குபடுத்துவதற்கான ஒரு வழிமுறை, அவற்றை வகைப்படுத்தி அட்டவணையாக்குவதாகும். சாதாரணமாக புள்ளி விவரக்கணக்கில் உபயோகிக்கும் ஒன்றுதான் நிகழ்வெண் அட்டவணை.

இவ்வாறு அட்டவணையாக்கும்போது சில விவரங்கள் விடுபட்டுப் போகின்றன. உதார ணமாக வருமானத்தைப் பற்றிச் சேகரித்த மொத்த விவரங்களைப் பிரிவுகளாக்கி, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கையை மட்டும் வெளியிடும் போது, இதில் ஒவ்வொருவரின் உண்மையான வருமானம் என்னவென்று கண்டுபிடிக்க முடியாது.

ஆனால், இது போன்ற ஓர் அட்டவணையிலிருந்து, வேறுபட்ட வருமானம் உள்ளவர்களின் பிரிவுகளைக் குறித்துள்ள பொதுவான கருத்துகள் கிடைக்கின்றன. ஆனால் ஒழுங்குபடுத்தப்படாத மொத்த விவரங்களிலிருந்து கிடைப்பதுமில்லை.

| ரன்கள் | குறியீடு | போட்டிகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|---|
| 0 - 9 | \|\|\| | 3 |
| 10 - 19 | ~~\|\|\|\|~~ | 5 |
| 20 - 29 | ~~\|\|\|\|~~ \|\|\| | 8 |
| 30 - 39 | ~~\|\|\|\|~~ \|\| | 7 |
| 40 - 49 | ~~\|\|\|\|~~ \|\|\| | 8 |
| 50 - 59 | \|\|\|\| | 4 |
| 60 - 69 | ~~\|\|\|\|~~ | 5 |
| 70 - 79 | \|\|\| | 3 |
| 80 - 89 | \|\| | 2 |
| 90 - 99 | \| | 1 |
| 100 - 109 | \|\|\|\| | 4 |
| மொத்தம் | | 50 |

முன்பு கேட்கப்பட்ட வினாக்களுக்கு இனி எளிதாக விடை கூறலாம் அல்லவா.

வேறொரு நிகழ்வைப் பார்ப்போம்.

பள்ளிக்கூடத்தில் உள்ள சுகாதாரமன்ற அங்கத்தினர்களின் எடை (கிலோகிராமில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | $37\frac{1}{2}$ | $40\frac{1}{2}$ | 59 | 48 | 48 | $37\frac{1}{2}$ |
| 58 | 50 | $54\frac{1}{2}$ | 39 | 40 | $40\frac{1}{2}$ | 49 |
| 32 | 43 | 45 | 53 | 37 | 44 | 51 |
| $50\frac{1}{2}$ | $32\frac{1}{2}$ | 46 | 55 | 36 | $44\frac{1}{2}$ | 47 |
| $42\frac{1}{2}$ | 33 | | | | | |

நிகழ்வெண் அட்டவணையை உருவாக்க வேண்டும்.

30 – 34, 35 – 39, 40 – 44, 45 – 49 என்றிவ்வாறு பிரிவுகளாக எடுத்தால் சரியாகுமா?

உதாரணமாக, $44\frac{1}{2}$ என்ற எடையை எந்தப் பிரிவில் எடுக்க வேண்டும் ?

### பகுக்கும் முறை

விவரங்களைச் சுருக்கமாகச் சொல்லவும். அதன்முலம் அவற்றைக் குறித்துள்ள பொது வான கருத்துகளை எளிதாக்குவதற்கும் தான் அவற்றைப் பகுத்து அட்டவணையாக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு செய்யும் போது சில விவரங்கள் விடுபடுவதையும் கண்டோம். மிகச் சிறிய இடைவெளியில் அதிகப் பிரிவுகள் ஆக்கினால் இவ்வாறான விடுபடுதலைக் குறைக்கலாம். ஆனால் அட்டவணை சிறியதாக இருக்காது. மேலும் பெரிய இடைவெளியில் குறைவான பிரிவுகள் ஆக்கினால் தகவல்களின் வெளியிடல் சுருங்கிப்போகும். அதனால் கருத்தாக்கங்களை உருவாக்க முடியாமல் விவரங்கள் விடுபட்டுப் போகும்.

உதாரணமாக, வருமான விவரங்களை அட்டவணையாக்கும் போது 1 ரூபாய் இடைவிட்டுள்ள பிரிவுகள் ஆக்கினால்? திரட்டிய தகவல்கள் அனைத்தும் அட்டவணையில் இருக்கும்; ஆனால் சுருக்கமாக ஒன்றுமே நடக்கவில்லை, மாறாக மிகவும் குறைந்த வருமானம் முதல் மிகவும் கூடிய வருமானம் வரையுள்ள ஒரே ஒரு பிரிவாக ஆக்கினால்? அட்டவணை மிகவும் சுருங்கிப் போகும். ஆகவே பொதுவான கருத்தாக்கங்கள் கிடைப்பதில்லை.

பிரிவுகளை 30 – 35, 35 – 40, 40 – 45 என்றிவ்வாறு எடுக்கலாம். அப்படியானால் $44\frac{1}{2}$ என்ற அளவு 40 – 45 என்ற பிரிவில் வரும் அல்லவா. 40 என்ற அளவு, 35 – 40 அல்லது 40 – 45 என்பதில் எந்தப் பிரிவில் உட்படுத்த வேண்டும். சாதாரணமாக 40 – 45 என்ற பிரிவில் தான் 40 உட்படுத்தப்படுகிறது. இது போன்ற 45 என்ற அளவு 45 – 50 என்ற பிரிவில் தான் உட்படுத்தப்படுகிறது.

இனி நிகழ்வெண் அட்டவணை உருவாக்கலாம் அல்லவா.

| பிரிவு | குறியீடு | நிகழ்வெண் |
|---|---|---|
| 30 - 35 | | |
| 35 - 40 | | |
| 40 - 45 | | |
| 45 - 50 | | |
| 50 - 55 | | |
| 55 - 60 | | |

1) 40 நகரங்களில் ஒரு நாளின் மிகக்கூடிய வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்வெண் அட்டவணை உருவாக்கவும்.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 23 | 32 | 40 | 25 | 30 | 38 | 47 | 40 | 39 |
| 26 | 31 | 37 | 32 | 36 | 41 | 30 | 25 | 27 | 30 |
| 29 | 40 | 38 | 36 | 43 | 37 | 28 | 27 | 32 | 36 |
| 38 | 36 | 33 | 32 | 28 | 27 | 23 | 26 | 28 | 31 |

2) உடற்தகுதிப் பரிசோதனையில் கலந்துகொண்ட 45 நபர்களின் உயரம் சென்டி மீட்டரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்வெண் அட்டவணை உருவாக்கவும்.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 145 | 168 | 156 | 168.4 | 170 | 163 | 177 | 143 | 175 | 169 | 154 |
| 163 | 176 | 160.3 | 164 | 150 | 168 | 166 | 148 | 154 | 159 | 164.5 | |
| 165 | 155 | 148.2 | 158 | 174 | 169 | 168 | 165 | 170 | 141 | 172.7 | |
| 179 | 167 | 171 | 159 | 167 | 171 | 165 | 171 | 167 | 162 | 171 | |

| உயரம் | குறியீடு | எண்ணிக்கை |
|---|---|---|
| 140 - 145 | | |
| 145 - 150 | | |
| ............. | | |
| ............. | | |
| ............. | | |
| ............. | | |

## புதிய ஒரு படம்

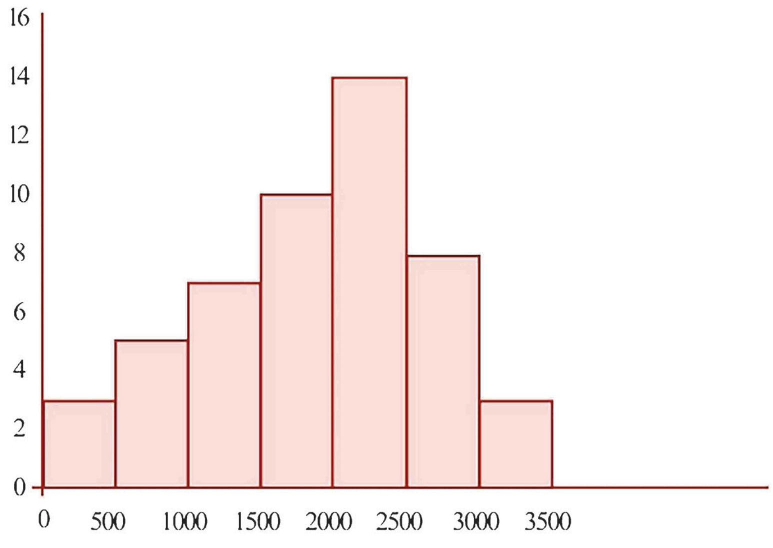
எண் வடிவிலான விவரங்களைச் செவ்வகப் படமாகவும் வட்டப்படமாகவும் வெளியிடத் தெரியும் அல்லவா.

இனி நிகழ்வெண் அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களைப் படமாக்குவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

50 குடும்பங்கள் ஒரு நாள் உபயோகிக்கும் தண்ணீரின் அளவு கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| **தண்ணீரின் அளவு (லிட்டரில்)** | **குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை** |
|---|---|
| 0 - 500 | 3 |
| 500 - 1000 | 5 |
| 1000 - 1500 | 7 |
| 1500 - 2000 | 10 |
| 2000 - 2500 | 14 |
| 2500 - 3000 | 8 |
| 3000 - 3500 | 3 |
| **மொத்தம்** | **50** |

அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களைப் படமாக்கி இருப்பதைப் பார்க்கவும்.




பிரிவுகள் கிடைமட்டக்கோட்டிலும் நிகழ்வெண்கள் செங்குத்துக்கோட்டிலும் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. செவ்வகத்தின் அகலம் ஒவ்வொரு பிரிவின் அளவையும், உயரம் நிகழ்வெண்ணையும் குறிப்பிடுகிறது. இவ்வாறு வரையும் படம் **நிகழ்வுச் செவ்வகம்** (histogram) ஆகும்.

1) ஒரு நெடுந்தூர ஓட்டப்பந்தயத்தில் இலக்கைச் சென்றடைய 30 குழந்தைகள் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

| நேரம் (நிமிடத்தில்) | குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 10 - 13 | 3 |
| 13 - 16 | 5 |
| 16 - 19 | 12 |
| 19 - 22 | 8 |
| 22 - 25 | 2 |

2) ஒரு பகுதியில் உள்ள 60 குடும்பங்களின் ஒரு நாள் வருமானம் அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| ஒரு நாள்வருமானம் (ரூபாயில்) | குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 800 - 850 | 3 |
| 850 - 900 | 7 |
| 900 - 950 | 15 |
| 950 - 1000 | 20 |
| 1000 - 1050 | 9 |
| 1050 - 1100 | 6 |

நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்..

3) ஜூன், ஜூலை மாதங்களில் கிடைத்த மழையின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த விவரங்களின் நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

| மழை (மி.மீ) | நாட்கள் |
|---|---|
| 10 - 20 | 4 |
| 20 - 30 | 6 |
| 30 - 40 | 9 |
| 40 - 50 | 15 |
| 50 - 60 | 10 |
| 60 - 70 | 8 |
| 70 - 80 | 5 |
| 80 - 90 | 3 |
| 90 - 100 | 1 |

4) ஓட்டப்பந்தயத்தில் 25 பெண்களும் 23 ஆண்களும் இலக்கைச் சென்றடைய எடுத்துக்கொண்ட நேரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பெண்களையும் ஆண்களையும் குறிப்பிடுகின்ற நிகழ்வுச் செவ்வகங்களை வெவ்வேறாக வரையவும்.

| நேரம் வினாடியில் | எண்ணிக்கை | |
|---|---|---|
| | பெண்கள் | ஆண்கள் |
| 30 - 40 | 2 | 3 |
| 40 - 50 | 6 | 7 |
| 50 - 60 | 8 | 5 |
| 60 - 70 | 5 | 5 |
| 70 - 80 | 4 | 3 |

5) ஒரு வகுப்பிலுள்ள 45 குழந்தைகளின் எடை கிலோகிராமில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது..

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 31 | 48 | 34 | 75 | 39 | 45 | 41 | 55 |
| 52 | 40 | 57 | 43 | 61 | 47 | 64 | 56 | 47 |
| 41 | 59 | 46 | 67 | 45 | 64 | 48 | 52 | 58 |
| 53 | 64 | 59 | 43 | 50 | 62 | 54 | 68 | 59 |
| 69 | 57 | 57 | 53 | 52 | 56 | 61 | 55 | 69 |

நிகழ்வெண் அட்டவணை தயார் செய்து நிகழ்வுச் செவ்வகம் வரையவும்.

# குறிப்புகள்

# குறிப்புகள்

# இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

## பாகம் 4 அ

### இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

**51 அ பிரிவுக்கூறு**

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதிநான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

# குழந்தைகளின் உரிமைகள்

*அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,*

*உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.*

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

## சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

*தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:*

**கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்**

ஸ்ரீ கணேஷ், TC. 14/2036, வான்ரோஸ் ஜங்ஷன்,

கேரளா பல்கலைகழகம் P.O, திருவனந்தபுரம்-34, தொலைபேசி : 0471-2326603

இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்-1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்-1090, நிர்பயா-1800 425 1400

கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் - 0471-324300/44000/45000

*Online* ***R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***